KAJ JE MNOŽICA

IZIDOR HAFNER

Math. Subj. Class. (1980): 03 E 99, 96 A 99

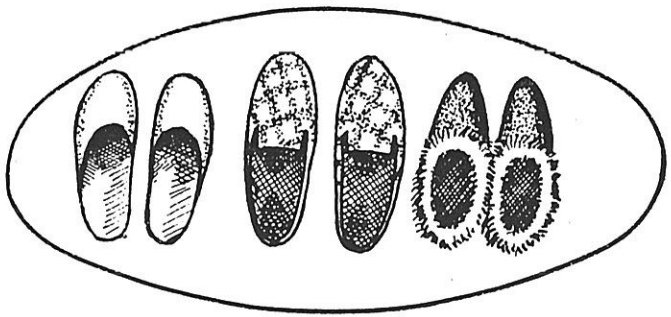
Članek obravnava pojem množice drugače, kot je opredeljen z aksiomi teorije množic. Odnos množice in njenega elementa bomo obravnavali kot odnos celote in njenega dela.

WHAT IS A SET

The article is concerned with the notion of set, which is different from the notion of set of the set theory. The relation of a set to it's element is treated as a relation of a whole to it's part.

V aksiomatični teoriji množic velja izrek $x \neq \{x\}$. Prenekateri učenec, dijak in celo študent, ki si množice predstavlja povsem konkretno, pa enači objekt x z množico $\{x\}$, množico treh parov čevljev z množico šestih čevljev itd. Gre torej za drugačno pojmovanje besede množica. Naloga tega sestavka je, da pokaže pot matematično korektne vpeljave pojma množice v tem novem smislu. Ena trditev že mora veljati: Reč x je isto kot množica, ki sestoji samo iz x. Teorijo, v kateri velja ta izrek, je razvil poljski logik Stanislaw Leśniewski (1886—1939).

1. Na vprašanje: »Koliko ima tale množica elementov?«



bosta najbolj pogosta odgovora »Šest« in »Tri«. Pri prvem odgovoru smo množico zaznali kot gručo čevljev, pri drugem pa kot skupino parov čevljev. Ker govorimo obakrat o istem objektu in ker v smislu teorije množic množica ne more imeti hkrati šest in tri elemente, je jasno, da gre za drugačen pomen besede *množica*. Odprto pa ostaja vprašanje: ali se da na osnovi takšnega pojmovanja množic, v katerem ima lahko množica hkrati 3 oz. 6 elementov, zgraditi osnovni pojem matematike, to je pojem *naravnega* števila. Problem je privlačen tudi zaradi dejstva, da govorimo o skupinah kot o konkretnih predmetih in ne o abstraktnih objektih, katerih eksistenco bolj ali manj prepričljivo zagotavljajo različne teorije množic.

Naša naloga bo zadovoljivo rešena, če bomo v simbolizmu matematične logike lahko zapisali izjave:

Množica čevljev je isto kot množica parov čevljev.

Pari so trije.

Čevljev je šest.

Če bomo pri tem uporabili pojme, ki niso domena logike, moramo le-te definirati ali privzeti kot nedefinirane in privzeti dodatne aksiome.

2. Preden storimo korak naprej, zaznamujemo naše čevlje z leve proti desni s črkami A, B, C, $\check{C}$, D in E. Te črke imajo vlogo *lastnih* imen — to je, vsaka zaznamuje natanko eno stvar.

Izrazi: čevelj, levi čevelj, desni čevelj in par čevljev zaznamujejo po več stvari — prva šest, preostale tri pa po tri. Zato bomo tem izrazom rekli *občа* imena. Okrajšano zapišimo ta imena $\check{c}$, l, d in p.

Izraz *levi in hkrati desni čevelj* ne zaznamuje nobenega objekta, zato je to *navidezno* ime. Zanj uporabimo oznako Λ. Izjavo

Reč A je levi čevelj

bomo simbolično zapisali

$$A \varepsilon l$$

in prebrali »A je l«.

Izjava

$$x \varepsilon y$$

je resnična natanko tedaj, kadar je x lastno ime, y pa lastno ali obče ime, ki pa med drugim zaznamuje tudi tisti objekt, ki ga zaznamuje ime x.*

Torej so resnične izjave $A \varepsilon \check{c}$, $B \varepsilon d$, $A \varepsilon A$, neresnične pa so izjave $A \varepsilon d$, $d \varepsilon d$, $\Lambda \varepsilon \Lambda$.

Če definiramo relacijo identitete

$$x = y \Leftrightarrow x \varepsilon y \wedge y \varepsilon x$$

potem so resnične izjave $A = A$, $B = B$, $C = C$, neresnične pa so izjave $\Lambda = \Lambda$, $\check{c} = \check{c}$, $d = d$.

Analogne pojme k operacijam z množicami nam podajajo naslednje definicije preseka, unije, navideznega imena in komplementa

$$x \varepsilon y \cap z \Leftrightarrow x \varepsilon y \wedge x \varepsilon z$$
$$x \varepsilon y \cup z \Leftrightarrow x \varepsilon y \vee x \varepsilon z$$
$$x \varepsilon \Lambda \Leftrightarrow x \varepsilon x \wedge \neg (x \varepsilon x)$$
$$x \varepsilon \mathbf{N}(y) \Leftrightarrow x \varepsilon x \wedge \neg (x \varepsilon y)$$

Do števil lahko pridemo z naslednjimi definicijami:

$$0(x) \Leftrightarrow \forall y(\neg (y \varepsilon x))$$
$$1(x) \Leftrightarrow x \varepsilon x$$
$$2(x) \Leftrightarrow \exists y \exists z(y \varepsilon x \wedge z \varepsilon x \wedge y \neq z \wedge \forall u(u \varepsilon x \Rightarrow u = y \vee u = z))$$

Izjava $0(x)$ pomeni, da je x navidezno ime; izjava $1(x)$ je resnična, če je x lastno ime. Izjavo $1(x)$ preberemo: x je *objekt*.

Simbolično izjavo $3(d)$ bi prebrali: desni čevlji so trije. Kaj pa pomenita izjavi $2(A \cup B)$, $0(A \cap B)$?

Vpeljanemu simbolizmu bomo rekli *logika imen* ali *ontologija*, kot jo je imenoval njen tvorec Leśniewski.

---

* ε ne pomeni nič drugega kot *je* v stavku: Ljubljana je mesto. Drugače bi to zapisali: Ljubljana ε mesto.

3. Poleg posameznih čevljev so povsem konkretne tudi naslednje stvari: trije pari čevljev, skupina levih čevljev, skupina desnih čevljev, skupina vseh čevljev. Zaznamujmo te objekte, pri čemer štejemo pare od leve proti desni: F, G, H, I, J in K. Dejstvo, da je čevelj A *del* para F bomo simbolično zapisali

$$A \varepsilon \mathbf{del}(F) \quad \text{(izjava } A \varepsilon F \text{ pa ni resnična)}$$

V naši teoriji je *del* osnoven, to je neopredeljen, pojem, ki zadošča štirim spodaj naštetim aksiomom.

Aksiom 1. Če je objekt X del objekta Y, potem Y ni del objekta X.

Aksiom 2. Če je X del objekta Y in je Y del objekta Z, potem je X del objekta Z.

Naslednja definicija uvaja soroden pojem:

Definicija 1. Objekt X je *element* objekta Y natanko tedaj, kadar je bodisi $X = Y$ ali pa je X del objekta Y.

Simbolično bomo to relacijo zapisovali

$$X \varepsilon \mathbf{el}(Y)$$

Zdaj pa želimo reči, da je objekt K množica vseh naših čevljev. To bomo zapisali

$$K \varepsilon \mathbf{Mn}(č)$$

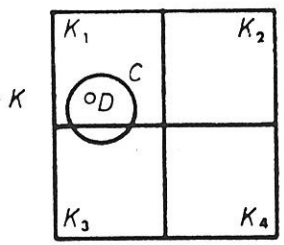
Ta pojem vpeljemo z definicijo:

Definicija 2. Objekt X je *množica vseh* stvari y natanko tedaj, kadar so izpolnjeni naslednji trije pogoji:

— vsaj en objekt je y;

— vsak y je element objekta X;

— za vsak element Q objekta X lahko najdemo objekta R in S tako, da velja: R je y, S je element stvari R in S je element stvari Q.



Primer. Lik K je množica kvadratov (K_1, K_2, K_3, K_4). Krog C je del (in element) lika K. Točka D je del (in element) tako kvadrata K_1 kot kroga C.

Oglejmo si še primer uporabe naših pojmov za odnose med črkami, besedami in stavkom.

Vzemimo konkreten stavek. Ta stavek je množica besed, uporabljenih pri njegovem zapisu. Množica uporabljenih samoglasnikov je del stavka. Množica uporabljenih črk a je del (element) množice uporabljenih samoglasnikov in tudi del stavka.

Naj bo S prvo nastopanje črke a v stavku, R pa beseda, kjer se a prvič pojavi. Potem je S element množice uporabljenih a-jev in tudi element R-a, ki je beseda stavka.

Dva dodatna aksioma določata popolnoma nov pojem:

Aksiom 3. Če je objekt P množica stvari y in je Q množica stvari y, potem je P isto kot Q.

Aksiom 4. Če je kakšen y, potem obstaja objekt P, ki je množica stvari y.

Te aksiome je zapisal Leśniewski leta 1916 [4].

Vprašanje, na katerega pa v tem sestavku ne bomo odgovorili, se pa na tem mestu zastavlja, je, ali vsi modeli te teorije ustrezajo našemu intuitivnemu pojmovanju *dela* ali ne.

Zdaj lahko zapišemo izjavo: »Množica naših čevljev je isto, kot množica naših parov.«

$$\mathbf{Mn}(č) = \mathbf{Mn}(p)$$

Kako bi prebrali naslednje zapise?

$$F = \mathbf{Mn}(A \cup B)$$
$$I = \mathbf{Mn}(l)$$
$$J = \mathbf{Mn}(d)$$

Če želimo zapisati, da je F par čevljev, to naredimo enostavno takole:

$$F \varepsilon p$$

Če pa želimo reči, da F sestavljata dva čevlja, moramo definirati:

Objekt X je *dvojica* objektov y natanko tedaj, kadar obstajata objekta Y in Z, $Y \neq Z$ in X je množica objektov $Y \cup Z$.

Simbolično zapisana definicija izgleda takole:

$$X \varepsilon 2(y) \Leftrightarrow (\exists\, Y, Z)\,(Y \neq Z \wedge X = \mathbf{Mn}(Y \cup Z))$$

4. Iz definicije 2 sledi, da *prazne množice* ni, saj je pogoj, da je X množica y to, da je vsaj en objekt y.

Prav tako sledi, da je vsak objekt isto kot množica, ki jo sestavlja ta objekt, npr.:

$$A = \mathbf{Mn}(A)$$
$$F = \mathbf{Mn}(F)$$

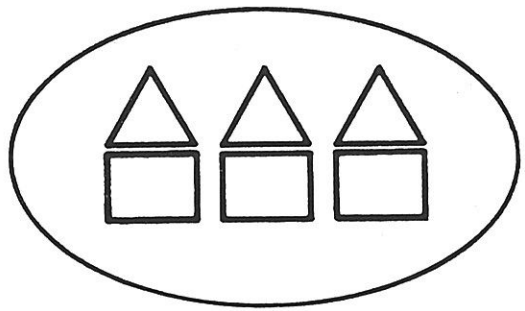
Množica vseh reči je *univerzum*. Simbolično bi ga vpeljali z dvema definicijama

$$A \varepsilon O \Leftrightarrow A \varepsilon A$$

(A je *objekt* natanko tedaj, kadar velja A je A).

$$A \varepsilon V \Leftrightarrow A \varepsilon \mathbf{Mn}(O)$$

(A je *univerzum* $\Leftrightarrow A$ je množica vseh reči).



5. Množice v našem smislu so konkretni objekti, zato lahko z njimi delamo vse tisto, kar lahko delamo z njihovimi elementi. Množico matematičnih ploščic lahko obkrožimo, vržemo ali izgubimo.

Jasno je, da se pojem množice uporablja v nižjih razredih osnovne šole v tem pomenu in ne v pomenu, ki ga opredeljuje teorija množic.

Vsi izrazi A, $\mathbf{Mn}(A)$, $\mathbf{Mn}(\mathbf{Mn}(A))$ so navidezna imena. Torej »A« ni ime za prazno množico. Lahko bi definirali tudi unijo, presek in komplement objektov. Komplement univerzuma pa ne obstaja.

Naloge kot »Koliko ima tale množica elementov«?, običajno ne delajo težav, ker navadno neka lastnost, na osnovi katere smo množico razbili na dele, izrazito izstopa. Če pa imamo dve taki lastnosti, kot npr. pri
se stvari zataknejo. Zato bi se moralo vprašanje glasiti: »Koliko ima tale množica elementov, ki imajo lastnost« . . .?

6. Za konec zapišimo aksiome *mereologije*, kot je to teorijo imenoval Leśniewski, v simbolni obliki:

Aksiom 1. $X \varepsilon \mathbf{del}(Y) \Rightarrow Y \varepsilon \mathbf{N}(\mathbf{del}(X))$

Aksiom 2. $X \varepsilon \mathbf{del}(Y) \wedge Y \varepsilon \mathbf{del}(Z) \Rightarrow X \varepsilon \mathbf{del}(Z)$

Definicija 1. $X \varepsilon \mathbf{el}(Y) \Leftrightarrow X = Y \vee X \varepsilon \mathbf{del}(Y)$

Definicija 2. $X \varepsilon \mathbf{Mn}(y) \Leftrightarrow (\exists Q)\,(Q \varepsilon y) \wedge (\forall Q)\,(Q \varepsilon y \Rightarrow Q \varepsilon \mathbf{el}(X)) \wedge$
$(\forall Q)\,(Q \varepsilon \mathbf{el}(X) \Rightarrow (\exists R, S)\,(R \varepsilon y \wedge S \varepsilon \mathbf{el}(R) \wedge S \varepsilon \mathbf{el}(Q)))$

Aksiom 3. $P \varepsilon \mathbf{Mn}(y) \wedge Q \varepsilon \mathbf{Mn}(y) \Rightarrow P = Q$

Aksiom 4. $X \varepsilon y \Rightarrow (\exists P)\,(P \varepsilon \mathbf{Mn}(y))$

Omenjena teorija ima naslednjo pomanjkljivost: V aksiomih nastopata definirana pojma (element, množica). Zato ne moremo reči, da relacijo *del* opredeljujeta prva dva aksioma, temveč jo vsi štirje. To pomanjkljivost je odpravil Lejewski, ki je zasnoval mereologijo na osnovi enega samega aksioma [3].

Mereologija nima kakšne neposredne zveze s teorijo množic, če seveda izvzamemo analogijo, ki bi jo lahko vzpostavili med pojmi ene in druge teorije.

Bolj neposredna pa je zveza ontologije in teorije množic. Imenom prve teorije ustrezajo množice v drugi teoriji (navideznemu imenu npr. prazna množica).

Osnove matematike, kot jih je zasnoval Leśniewski, sestojijo iz treh aksiomatičnih teorij: prototetike, ki je neke vrste izjavni račun; ontologije (ki vključuje prototetiko) in mereologije (ki vsebuje obe drugi teoriji).

Lejewski je dokazal, da sta tako mereologija kot ontologija konsistentni glede na protetiko [3].

Pri tem je treba poudariti, da noben aksiom ontologije ali mereologije ne zagotavlja eksistence objektov. Če bi dodali k ontologiji aksiom neskončnosti in aksiom izbire, bi se znašli pred podobnimi problemi, kot jih imamo z neprotislovnostjo teorije množic.

Drug problem je Russellova antinomija. Način, kako se ji izognemo v ontologiji, je obravnavan v [1].

LITERATURA

[1] I. Hafner, *Russellova antinomija in osnove matematike*, Anthropos (1982) 3, 11—14.

[2] C. Lejewski, *On Leśniewski's ontology*, Ratio **1** (1958) 2, 150—176.

[3] C. Lejewski, *Consistency of Leśniewski's mereology*, J. Symb. Logic 34 (1969) 3, 321—328.

[4] S. Leśniewski, *Foundations of the general theory of sets*, Prace polskiego kola naukowego w moskwie, Moskva, 1916.

ATOMSKI MODEL NIELSA BOHRA

JANEZ STRNAD

A 31.10

Članek se ob stoletnici rojstva spomni dosežkov Nielsa Bohra v fiziki. Nekoliko podrobneje obdela njegovo pot do modela za vodikov atom — odločilnega odkritja stare kvantne mehanike. Posebej poskuša poudariti to, kar je Bohr dodal obstoječemu znanju. Nazadnje omeni usodo nekaterih odkritij v fiziki: kljub izrednemu pomenu za razvoj kvantne mehanike je dandanes Bohrov model zastarel.

NIELS BOHR'S MODEL OF THE ATOM

On the occasion of the centenary of his birth the achievements of Niels Bohr in physics are reviewed. Somewhat more in detail his way to the model of the hydrogen atom — the decisive discovery of the old quantum mechanics — is considered. The article intends to expose what Bohr added to existing knowledge. Finally, the fate of some discoveries in physics is mentioned: in spite of the extraordinary impact on the development of quantum mechanics Bohr's model today is outdated.

Nielsu Bohru pripisujejo tri velike zasluge v fiziki: s svojim modelom vodikovega atoma je usmeril razvoj kvantne mehanike, sodeloval pri začetnih korakih v jedrsko fiziko in osnoval šolo teorijske fizike, ki so ji pripadali fiziki iz številnih dežel in ki ji najbrž ni bilo enake. Čeprav bi bilo zanimivo

Življenjska in strokovna pot Nielsa Bohra [1]

1885 7. oktobra, rojen v Kopenhagnu
1903 vpis na univerzo v rodnem mestu
1907 zlata medalja Kraljeve danske akademije za delo o merjenju površinske napetosti kapljevin
1909 magisterij z delom iz elektronske teorije kovin
1911 doktorat z delom, ki je nadaljevanje magistrskega
1911—1912 delo na univerzi v Cambridgu pri J. J. Thomsonu
1912 delo na univerzi v Manchestru pri E. Rutherfordu
1913 objava članka v treh delih *O zgradbi atomov in molekul*; predavatelj na univerzi v Kopenhagnu
1914—1916 predavatelj na univerzi v Manchestru
1916 profesor za teorijsko fiziko na univerzi v Kopenhagnu
1917 član Kraljeve danske akademije znanosti in umetnosti
1921 odprejo Inštitut za teorijsko fiziko na Blegdamsveju v Kopenhagnu
1922 osnovna razlaga periodne preglednice elementov; Nobelova nagrada iz fizike »za raziskovanje zgradbe atomov in sevanja, ki ga oddajajo«
1927 vprašanje merjenja v atomski fiziki, načelo komplementarnosti
1933 vprašanje merjenja v kvantni elektrodinamiki (skupaj z Leonom Rosenfeldom)
1936 model atomskega jedra kot kapljice
1939 predsednik Kraljeve danske akademije; teorija cepitve uranovega jedra (skupaj z Johnom Wheelerjem)
1940 Nemci zasedejo Dansko
1943 beg v ribiškem čolnu preko preliva na Švedsko
1943—1945 sodelovanje pri angleškem in pri ameriškem načrtu za izdelavo jedrske bombe
1945 vrnitev na Dansko
1950 odprto pismo Združenim narodom
1955 predsednik danske Komisije za atomsko energijo
1962 18. nove ra, umrl v Kopenhagnu