IZIDOR HAFNER
v sodelovanju z
MARKOM IN NADO RAZPET

SIMBOLNA LOGIKA V MATEMATIKI

2018

Kazalo

Uvod 6

I. Izjavne povezave **9**
1. Uvod v logiko z vitezi in oprodami 9
2. Izjavne funkcije enega in dveh argumentov 18
3. Resničnostne tabele 19
4. Alternativne predstavitve izjavnih funkcij 24
5. Preklopna vezja 27
6. Sklepanje 31
7. Metoda semantičnih dreves (tabel) 32

II. Kvantifikatorja **38**
1. Zgradba izjav in predikati 38
2. Še o sklepanju 66

III. Naloge **72**
1. Izjave 72
2. Enakovredne izjave 76
3. Sklepanje 80
4. Zgradba izjav in predikati 92
5. Še o sklepanju 101
6. Iz zgodovine logike 104
7. Nekaj logičnih nalog 107

Rešitve nalog 109
1. Izjave 109
2. Enakovredne izjave 114
3. Sklepanje 117
4. Zgradba izjav in predikati 125
5. Še o sklepanju 130
6. Iz zgodovine logike 133
7. Nekaj logičnih nalog 135

Uvod

Potreba po uvedbi simbolne logike se je porodila iz matematike. Pokazalo se je, da lahko vse trditve v matematiki zapišemo v jeziku, ki vsebuje nekaj izjavnih povezav, kvantifikatorja "za vsak" in "vsaj en" in znake za osnovne relacije. Običajno pomeni, da razumemo tuj jezik, če znamo misel hitro izraziti v materinem jeziku. V resnici obvladovanje tujega jezika pomeni, da tudi mislimo v tem jeziku. Isto velja za simbolni jezik. Problem nastopi, ker v simbolnem jeziku lahko oblikujemo stavke, ki imajo obliko, ki je v materinem jeziku ne uporabljamo. Po drugi strani je vrstni red besed v pogovornih jezikih lahko tudi nekoliko poljuben, je pa odvisen od poudarka.

Primer:

Vsak pisatelj izda vsako svojo knjigo pri neki založbi.
Vsak pisatelj pri neki založbi izda vsako svojo knjigo.
Pri neki založbi vsak pisatelj izda vsako svojo knjigo.

Ali vsi ti trije stavki ne pomenijo isto? Vzemimo še en primer, kjer Slovenci nimamo istega mnenja: "Vsi ljudje niso pametni." za nekatere pomeni isto kot "Vsi ljudje so neumni.", za druge "Nekateri ljudje so neumni, nekateri pa so pametni.", za tretje pa "Ni res, da so vsi ljudje pametni."

Prinaša pa simbolni jezik nekaj težav. Spremenljivki x in y lahko zavzameta isto vrednost. Če hočemo poudariti, da morata biti različni, moramo k pogojem dodati $x \neq y$. V simbolni logiki nam 0 pomeni stavek, ki je vedno neresničen (lahko bi bil to $2 \neq 2$), 1 pa vedno resničen stavek (recimo $2 = 2$). Seveda pa se lahko zgodi, da obravnavamo števila, kjer 0 in 1 pomenita števili.

Pri uporabi Vennovih diagramov pri množicah osenčitev pomeni množico, ki jo želimo omeniti. V izvirnem Vennovem članku pa osenčitev pomeni, da tam ni elementov.

Za bolj poglobljen uvid v simbolno logiko, vendar še vedno dostopen srednješolcu, priporočamo knjigo Niko Prijatelj, *Uvod v matematično logiko*, DMFA Slovenije. Za tiste, ki jih zanima zgolj reševanje logičnih nalog, povejmo, da je le-teh veliko na spletni strani: `http://www.logika.si/`.

Pravila konstrukcije semantičnih dreves

		$\neg\neg$	$\dfrac{\neg\neg A}{A}$
$\wedge$	$\dfrac{A\wedge B}{\begin{array}{c}A\\B\end{array}}$	$\neg\wedge$	$\dfrac{\neg(A\wedge B)}{\neg A \mid \neg B}$
$\vee$	$\dfrac{A\vee B}{A \mid B}$	$\neg\vee$	$\dfrac{\neg(A\vee B)}{\begin{array}{c}\neg A\\\neg B\end{array}}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{A\Rightarrow B}{\neg A \mid B}$	$\neg\Rightarrow$	$\dfrac{\neg(A\Rightarrow B)}{\begin{array}{c}A\\\neg B\end{array}}$
$\Leftrightarrow$	$\dfrac{A\Leftrightarrow B}{\begin{array}{c\|c}A & \neg A\\B & \neg B\end{array}}$	$\neg\Leftrightarrow$	$\dfrac{\neg(A\Leftrightarrow B)}{\begin{array}{c\|c}\neg A & A\\B & \neg B\end{array}}$

Enakovrednosti (zakoni)

Idempotentnost:	
$p \vee p \sim p$	$p \wedge p \sim p$
Asociativnost:	
$(p \vee q) \vee r \sim p \vee (q \vee r)$	$(p \wedge q) \wedge r \sim p \wedge (q \wedge r)$
Komutativnost:	
$p \vee q \sim q \vee p$	$p \wedge q \sim q \wedge p$
Distributivnost:	
$p \vee (q \wedge r) \sim (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \wedge (q \vee r) \sim (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
De Morganova zakona:	
$\neg(p \vee q) \sim \neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge q) \sim \neg p \vee \neg q$
Absorpcija:	
$p \vee (p \wedge q) \sim p$	$p \wedge (p \vee q) \sim p$
Lastnosti konstant 0 in 1:	
$\neg 1 \sim 0$	$\neg 0 \sim 1$
$p \vee 0 \sim p$	$p \wedge 0 \sim 0$
$p \vee 1 \sim 1$	$p \wedge 1 \sim p$
Lastnosti negacije:	
$\neg\neg p \sim p$	
$p \vee \neg p \sim 1$	$p \wedge \neg p \sim 0$
Zveze med logičnimi povezavami:	
$p \Rightarrow q \sim \neg p \vee q$	$p \veebar q \sim p \wedge \neg q \vee \neg p \wedge q$
$p \vee q \sim \neg p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q \sim (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
$p \uparrow q \sim \neg(p \wedge q)$	$p \downarrow q \sim \neg(p \vee q)$

Deset osnovnih pravil sklepanja

	uvedba (priključitev)	opustitev
$\Rightarrow$	Pogojni sklep (PS) Če $\mathscr{A}, B \models C$, potem $\mathscr{A} \models B \Rightarrow C$	Modus ponens (MP) $A, A \Rightarrow B \models B$
$\wedge$	Združitev (Zd) $A, B \models A \wedge B$	Poenostavitev (Po) $A \wedge B \models A$ $A \wedge B \models B$
$\vee$	Pridružitev (Pr) $A \models A \vee B$ $B \models A \vee B$	Dokaz z analizo primerov (AP) Če $\mathscr{A}, A \models C$ in $\mathscr{A}, B \models C$, potem $\mathscr{A}, A \vee B \models C$
$\neg$	Dokaz s protislovjem (RA) Če $\mathscr{A}, B \models 0$, potem $\mathscr{A} \models \neg B$	Dokaz s protislovjem (RA) Če $\mathscr{A}, \neg B \models 0$, potem $\mathscr{A} \models B$
$\Leftrightarrow$	Pravilo priključitve ekvivalence Če $\mathscr{A} \models A \Rightarrow B$ in $\mathscr{A} \models B \Rightarrow A$, potem $\mathscr{A} \models A \Leftrightarrow B$	Pravilo opustitve ekvivalence Če $\mathscr{A} \models A \Leftrightarrow B$, potem $\mathscr{A} \models A \Rightarrow B$ in $\mathscr{A} \models B \Rightarrow A$

Dodatna pravila sklepanja

$A \Rightarrow B, \neg B \models \neg A$	modus tollens (MT)
$A \vee B, \neg A \models B$	disjunktivni silogizem (DS)
$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$	hipotetični silogizem (HS)
$A \Leftrightarrow B, A \models B$	
$A \Leftrightarrow B, \neg A \models \neg B$	
$A \vee B, C \vee \neg B \models A \vee C$	

Osnovni pravili za kvantifikatorje

Opustitev univerzalnostnega kvantifikatorja (OU)	$\frac{\forall x Px}{Pa}$	
Opustitev eksistencialnostnega kvantifikatorja (OE)	$\frac{\exists x Px}{Pa}$	a je ime, ki do tega sklepa še ni nastopalo

Zveze med kvantifikatorji in izjavnimi povezavami

$\neg\forall x Px \sim \exists x \neg Px$
$\neg\exists x Px \sim \forall x \neg P$
$\forall x(Px \wedge Qx) \sim \forall x Px \wedge \forall x Qx$
$\exists x(Px \vee Qx) \sim \exists x Px \vee \exists x Qx$

I. Izjavne povezave

1. Uvod v logiko z vitezi in oprodami

Nekje daleč na oceanu obstaja otok, na katerem nekateri prebivalci, imenovani *vitezi*, vedno govore *resnico*, drugi, imenovani *oprode*, pa vedno *lažejo*. Drugih prebivalcev na tem otoku ni.

Naloge:

1. Recimo, da prebivalec A izjavi: "$2+2=4$." Kaj je prebivalec A, vitez ali oproda?

2. Kaj pa, če prebivalec A izjavi: "*Vitez sem.*"?

3. Ali lahko prebivalec izjavi, da je oproda?

4. Tokrat imamo opravka s tremi prebivalci, ki jih označimo z A, B, C. Nekoč so dejali:

   A: *C je star 10 let.*
   B: *C je star 12 let.*
   C: *Star sem 15 let.*

   Oceni število oprod med temi tremi prebivalci.

5. Zdaj imamo opravka s tremi drugimi prebivalci A, B in C. Nekoč so izjavili:

   A: *B je starejši od 20 let.*
   B: *Star sem 20 let.*
   C: *B je mlajši od 20 let.*

   Oceni število oprod med to trojico.

6. Zopet nastopata le dva prebivalca, A in B. Rekla sta tole.

   A: *Na otoku je zlato.*
   B: *To ni res.*

   Koliko oprod je med njima?

7. Dva otočana, A, B, sta dala tile izjavi:

   A: *Na otoku je zlato in srebro.*
   B: *To ni res. Na otoku ni vsaj ene od teh dveh kovin.*

   Kaj lahko sklepamo?

8. Tokrat sta dva druga otočana (spet ju imenujmo A, B), dala izjavi:

   A: *Na otoku ni ne zlata ne srebra.*

   B: *To ni res. Na otoku je vsaj ena od teh dveh kovin.*

   Kaj lahko sklepamo?

9. Tokrat imamo izjavo otočana A:

   A: *Midva z B-jem sva oprodi.*

   a) Dokaži, da je A oproda.

   b) Dokaži, da je B vitez.

10. O hišni številki otoškega vrača so otočani A, B in C izjavili:

    A: *Je večja kot 15.*

    B: *Je manjša kot 20.*

    C: *Je večkratnik števila 7.*

    Oceni število oprod.

11. Poročeni otočan A je tokrat dejal:

    A: *Z ženo sva oba enakega stanu.*

    (Da sta *enakega stanu*, pomeni, da sta oba oprodi ali oba viteza.)
    Kaj lahko sklepaš?

12. Recimo, da poročeni otočan izjavi o zakoncu:

    Vsaj eden od naju je oproda.

    Kaj lahko poveš o otočanu in njegovi ženi?

13. Tokrat sta otočana A in B dala tile izjavi:

    A: *B je star več kot 15 let.*

    B: *Star sem več kot 10 let.*

    Recimo, da je A vitez. Kaj lahko skepaš o B-ju?

14. Zdaj pa otočan A izjavi:

    A: $2 + 2 = 5$ *ali pa je* $2 + 2 = 4$.

    Kaj je otočan A?

15. Predpostavimo, da A izjavi: "*Če sem jaz vitez, je B oproda.*"
    Kaj lahko sklepamo?

16. Predpostavimo, da A izjavi: "*Če je B oproda, potem sem jaz vitez.*"
    Kaj sta A in B?

17. Kaj pa, če je A izjavil: "*Če B ni oproda, potem jaz nisem vitez.*"?

18. Kaj pa, če A reče: "*Če jaz nisem vitez, potem B ni oproda.*"

19. Nekoč je raziskovalec srečal tri otočane (zaznamujmo jih z A, B in C). Najprej je vprašal A-ja: *"Ali sta B in C oba viteza?"* A je odgovoril *"da"*. Nato je raziskovalec vprašal: *"Ali je B vitez?"* Tokrat je A odgovoril *"ne"*.

    Ali je otočan C vitez ali oproda?

20. Ob drugi priliki je raziskovalec srečal tri druge otočane (spet jih označimo A, B in C) in med njimi je bil tudi otoški vrač. Raziskovalec jih je vprašal: *"Kdo med vami je vrač?"*

    "Jaz," je odgovoril A.
    "Jaz sem," je odgovoril B.
    "Kvečjemu eden med nami govori resnico," je dejal C.

    (Na otoku je en sam vrač.)

    Kdo je otoški vrač?

21. Nekoč je raziskovalec srečal otočana, ki je dejal: *"Sem poročen oproda."*

    Ali je otočan oproda? Ali je poročen?

22. Spet imamo tri otočane, ki jih zaznamujmo z A, B in C. A in B sta izjavila

    A: *B je oproda.*
    B: *A in C sta istega tipa.*

    (Za dva otočana pravimo, da sta *istega tipa*, če in samo če sta ali oba viteza ali oba oprodi.)

    Kaj je otočan C?

23. Kot morda veste, na otoku treh plemen vsak prebivalec pripada natanko enemu od treh plemen: vitezom, ki vedno govorijo resnico, oprodam, ki vedno govorijo neresnico, in normalnežem, ki izmenično govorijo resnico oz. neresnico.

    Štirje moški prebivalci: A, B, C in D, so nekoč dali naslednje izjave:

A: 1. B mi je dolžan 10 mark.
2. C je vitez.
3. B je vitez.
4. D mi je dolžan 5 mark.

B: 1. C je oproda.
2. A-ju nisem dolžan 10 mark.
3. D ima 3 žene.
4. C mi je dožan 15 mark.

C: 1. Sem najšibkejši moški na otoku.
2. Sem najrevnejši moški na otoku.
3. Sem najgrši moški na otoku.
4. Imam 5 žena.

D: 1. Nisem vitez.
2. A-ju nisem dolžan 5 mark.
3. C ni normalnež.
4. C je neoženjen.

Katerim plemenom pripadajo naši otočani?

24. Kot že vemo, na otoku treh plemen vsak prebivalec pripada natanko enemu od treh plemen: vitezom, ki vedno govorijo resnico, oprodam, ki vedno govorijo neresnico, in normalnežem, ki izmenično govorijo resnico oz. neresnico.

    Tokrat na otoku velja zakon, da ima vsak otočan lahko samo eno ženo in ta ne sme pripadati istemu plemenu.

    Štiri otočanke E, F, G in H, ki so omožene, ne nujno v tem vrstnem redu, z otočani S, T, U in V, so nekoč izjavile:

    E: 1. S je poročen z G.
    2. S je oproda.
    3. V ni oproda.

    F: 1. G ni vitez.
    2. Moj mož je vitez.
    3. Moj mož je T.

    G: 1. H je omožena z oprodo.
    2. U je vitez.
    3. E je oproda.

    H: 1. F je vitez.
    2. G je oproda.
    3. E je normalna.

    Ugotovi, kdo je s kom poročen in kateremu plemenu pripada.

Več o vitezih in oprodah najdete v knjigi R. Smullyana, *Poznate naslov te knjige?*, ki je izšla v slovenskem prevodu leta 1987 pri *DZS*.

Rešitve:

1. Prebivalec A je izjavil resnico, zato je vitez.

2. Če prebivalec reče, da je vitez, potem je lahko vitez, ki govori resnico, lahko pa je oproda, ki se je zlagal, da je vitez.

3. Noben prebivalec otoka ne more zase izreči, da je oproda. Če bi to izrekel vitez, bi se lagal (toda vitezi ne lažejo). Če to izjavi oproda, bi govoril resnico (toda opode nikoli ne izjavijo resnice).

4. Tokrat so izjave treh prebivalcev takšne, da je lahko resnična samo ena med njimi, lahko pa so vse tri lažne. Število oprod je 2 ali 3.

   Razmislek: Če imamo dve izjavi, ki *ne moreta biti hkrati* resnični, lahko pa *sta obe* neresnični, govorimo o *izključujočih* se izjavah. S tujko rečemo, da sta izjavi *kontrarni*.
   Če imamo opravka z več kot dvema izjavama, lahko govorimo o množici *med seboj izključujočih* se izjav, če se vsaka dvojica izjav v tej množici izključuje.
   Izjave "*C je star 10 let.*", "*C je star 12 let.*" in "*C je star 15 let.*" so med seboj izključujoče.

5. Zdaj so izjave treh otočanov izključujoče, toda ena med njimi je zagotovo resnična. Zato imamo dve oprodi in enega viteza, ne moremo pa reči, kdo je kaj.

   Razmislek: Kadar imamo opravka z množico izjav, med katerimi je zagotovo *vsaj ena resnična*, govorimo o množici *dopolnjujočih se* izjav (s tujko – o *komplementarnih* izjavah). Takšna je naslednja množica izjav: "*C je starejši od 15 let.*", "*C je mlajši od 20 let.*".

   Množica izjav iz naše naloge: "*B je starejši od 20 let.*", "*B je star 20 let.*", "*B je mlajši 20 let.*", pa ima lastnost, da se izjave dopolnjujejo in medsebojno izključujejo. Pravimo, da gre za *izključujoče dopolnjevanje* (ali – *disjunktivno komplementarnost*).

6. Otočan B je *zanikal* izjavo otočana A. Če je izjava otočana A resnična, potem je izjava otočana B lažna, če je izjava otočana A lažna, je izjava otočana B resnična. Opravka imamo z enim vitezom in enim oprodo, ne moremo pa povedati, kaj je kateri.

   Razmislek: Tudi tokrat imamo opravka z množico izjav, ki se izključujejo in dopolnjujejo. Hkrati pa sta v tej natanko dve izjavi. Govorimo o dveh *nasprotujočih si* izjavah, s tujko pa o *kontradiktornih* izjavah.

   Izjava in njeno zanikanje (*negacija*) tvorita kontradiktoren par izjav.

7. Otočan A trdi, da je na otoku zlato in da je na otoku srebro. Če je A vitez, potem sta na otoku obe dragoceni kovini. Otočan B pa je oproda.

Če je A oproda, potem je B vitez in ni res, da sta na otoku zlato in srebro. Lahko, da ni zlata, lahko, da ni srebra, lahko pa da ni nobene od obeh kovin.

8. Če je otočan A vitez, na otoku ni ne zlata in ne srebra. Če pa je na otoku vsaj ena od teh dveh kovin, je A oproda. Otočan B je nasprotne sorte od A-ja.

   Razmislek: Sestavljeni izjavi, s katero trdimo resničnost *dveh* izjav, imenujemo *konjunkcija* teh dveh izjav. Konjunkcija dveh izjav je resnična, če sta resnični *obe* izjavi, ki jo sestavljata. Konjunkcija pa je neresnična, če je neresnična *vsaj ena* izjava, ki jo sestavlja.

   Izjava "*Na otoku je zlato in srebro.*" je konjunkcija izjav "*Na otoku je zlato.*" in "*Na otoku je srebro.*".

   Sestavljeni izjavi, s katero trdimo, da je resnična *vsaj ena* izmed dveh izjav, pravimo *disjunkcija* teh dveh izjav. Disjunkcija dveh izjav je neresnična, če sta neresnični obe izjavi, ki jo sestavljata.

   Disjunkcijo izjav "*Na otoku je zlato.*" in "*Na otoku je srebro.*" bomo zapisali "*Na otoku je zlato ali na otoku je srebro.*" ali "*Na otoku je zlato ali srebro.*".

9. Dokazati moramo, da je A oproda.

   Vzemimo *nasprotno* izjavo, to je, da je A vitez. Ker pa vitezi govorijo resnico, je izjava, da sta A in B oprodi, resnična. Zato je oproda tudi sam A. Otočan A je hkrati vitez in oproda. To je *protislovje*. *Predpostavka*, da je A vitez, nas je pripeljala do protislovja, zato je ta predpostavka neresnična. A je torej oproda.

   Ker je A oproda, ni res da sta z B-jem oba oprodi. Vsaj en je vitez, toda A to ni. Torej je B vitez.

   Razmislek: Izjavi, ki ne more biti resnična, pravimo *protislovje*. Konjunkcija izjave in njene *negacije* je protislovje.

   O *protislovni množici* izjav govorimo, če lahko iz te množice izpeljemo protislovje. Enako bi lahko govorili o protislovni množici, če bi iz nje lahko izpeljali neko izjavo in njeno negacijo.

   Pri reševanju naloge smo dokazali, da je A oproda tako, da smo predpostavili nasprotno, da je A vitez in izpeljali protislovje (da je A hkrati vitez in oproda). Temu sklepanju pravimo *dokazovanje s protislovjem* (latinsko: *reductio ad absurdum*). Drugi izraz za tako dokazovanje je *indirektni dokaz*, saj namesto *neposrednega* dokaza, da je A oproda, dokažemo protislovnost nasprotne izjave.

10. Izjave "*Je večja od 15.*", "*Je manjša od 20.*" in "*Je večkratnik števila 7.*" ne morejo biti hkrati resnične. Prvi dve sta *izpolnjeni* pri vrednostih 16, 17, 18 in 19. Toda nobeno od teh števil ni večkratnik števila 7. Hkrati pa sta po dve izjavi iz te trojice hkrati izpolnjivi.

    Zato je med trojico vsaj en oproda. Ker pa sta izjavi A-ja in B-ja dopolnjujoči (če predpostavimo, da tudi na tem otoku označujejo hiše z naravnimi števili), je med dvojico A in B vsaj en vitez.

    Razmislek: Izjave A-ja, B-ja in C-ja *ne morejo biti hkrati izpolnjene* (resnične). Taki množici izjav pravimo, da je *nezdružljiva*. Če je neka množica izjav nezdružljiva, se vseeno lahko zgodi, da je poljubna njena prava podmnožica izjav *združljiva* (*kompatibilna*).

    Če je neka množica izjav nezdružljiva, potem lahko izpeljemo iz nje protislovje. Zato taki množici izjav rečemo tudi protislovna množica izjav.

    Množica medseboj kontrarnih izjav je seveda protislovna. Obratno pa ni nujno res.

11. A je vitez ali oproda.

    Recimo, da je A vitez. Potem sta z ženo oba viteza, ker je res, da sta enakega stanu.
    Recimo, da je A oproda. Potem nista enakega stanu in ker je A oproda, je njegova žena vitez.
    A-jeva žena je torej vitez, ne moremo pa sklepati o A-ju.

    Razmislek: Zgoraj smo sklepali takole:

    > A je vitez ali oproda.
    > Če ja A vitez, je A-jeva žena vitez.
    > Če je A oproda, je njegova žena vitez.
    > Njegova žena je vitez.

    Takšnemu sklepanju pravimo *dokazovanje z analizo primerov*. Najprej imamo neko dopolnjujočo množico pogojev (*A je vitez*, *A je oproda*). Iz vsakega pogoja lahko izpeljemo isto izjavo (*Njegova žena je vitez.*) Potem je ta izpeljana izjava resnična.

12. Izjava "*Vsaj eden od naju je oproda*" je disjunkcija izjav "*Jaz sem oproda.*" in "*Moja žena je oproda.*"
    Pokažimo, da A ne more biti oproda. Če bi bil oproda, bi bilo res, da je med njima vsaj en oproda. Imeli bi oprodo, ki govori resnico.
    A je torej vitez, zato je res, da je med njima vsaj en oproda. Ker pa A ni oproda, mora biti oproda njegova žena.

13. Izjavi A-ja in B-ja sta v takšnem odnosu, da iz resničnosti prve sledi resničnost druge. Če je B star več kot 15 let, potem je gotovo star več kot 10 let. Ker je po predpostavki A vitez, je vitez tudi B.

    Če pa bi bilo dano, da je B vitez, potem o A-jevemu stanu ne bi mogli sklepati ničesar.

14. Izjava oblike p *ali* q je resnična, če je resnična vsaj ena od izjav p oziroma q. Ker je izjava $2 + 2 = 4$ resnična, je A vitez.

    Kaj pa, če bi A dejal: $2 + 2 = 5$ *in* $2 + 2 = 4$? Tedaj bi bil oproda.

15. Predpostavimo, da je A vitez. Potem je res: "*Če je A vitez, je B oproda.*" Zato je B oproda, saj je A vitez.

    Pri predpostavki, da je A vitez, smo izpeljali, da je B oproda. Torej je res: "*Če je A vitez, potem je B oproda.*" In ker je A-jeva trditev resnična, je A vitez. Ker pa je A vitez, je B oproda.

    Izjavi oblike "*Če p, potem q.*" pravimo *pogojna* izjava. Izjavi p pravimo *pogoj*, izjavi q pa *posledica*. Pogojna izjava je *neresnična samo* v primeru, če je izjava p resnična, q pa neresnična.

    Pri sklepanju s pogojnimi izjavami pogosto uporabljamo *pravilo sklepanja*, ki mu rečemo *modus ponens*: Iz "p" in "*Če p, potem q*" sledi "q".

    Drugo pravilo pa je pravilo *uvedbe pogojne povezave*: če pri predpostavki "p" izpeljemo izjavo "q", potem smo dokazali izjavo "*Če p, potem q.*"

    Obe pravili smo uporabili pri sklepanju v naši nalogi.

16. Izjava: "*Če je B oproda, potem je A vitez*", je napačna samo v primeru, če sta oba oprodi. Če je A vitez, je B lahko karkoli.

    Izjava oblike "*Če q, potem p*" je *obrat* (ali obratna izjava) izjave "*Če p, potem q.*" Iz zadnjih dveh nalog sklepamo, da izjava in njen obrat *nista enakovredni* izjavi.

17. Recimo, da A ni vitez. Potem je njegova izjava napačna, to pa je samo v primeru, če B ni oproda, A pa je vitez. To je v protislovju s predpostavko. A je torej vitez. Ker je izjava "*Če B ni oproda, potem A ni vitez.*" resnična, ni res, da B ni oproda. Torej B je oproda.

    Dobili smo isti rezultat kot pri nalogi 15. Izjavi "*Če ni q, potem ni p.*" pravimo *kontrapozicija* izjave "*Če p, potem q.*" Pogojna izjava in njena kontrapozicija *sta* enakovredni.

    Izjavi "*Če ni p, potem ni q.*" pravimo, da je *inverzna* k izjavi "*Če p,*

potem q.". Inverzna izjava je kontrapozicija obratne izjave in je zato enakovredna obratni izjavi. Dokaži to na primeru 16. naloge.

18. Isto kot 16. naloga.

19. Oba odgovora otočana A ne moreta biti resnična. Zato je oproda in je obakrat odgovoril napačno. Zato je B vitez. Toda oba (B in C) nista viteza, zato je C oproda.
    Odgovor: C je oproda.

20. Izjava otočana C je resnična ali neresnična. Če je neresnična, potem sta resnični izjavi prvih dveh. To pa ni mogoče, saj je vrač en sam. Zato je C-jeva izjava resnična, izjavi prvih dveh pa ne. Med prvo dvojico ni vrača, ker pa je med njimi vrač, je to C.
    Odgovor: C je vrač.

21. Vitez ne bi nikoli izjavil, da je poročen oproda. To je lahko izjavil le oproda. Ker pa oproda ne govori resnice, otočan ne more biti poročen.
    Odgovor: Otočan je neporočen oproda.

22. Recimo, da je A oproda. Potem je B vitez in je res, da sta A in C istega tipa. C je potem oproda.
    Recimo, da je A vitez. Potem je B oproda, B-jeva izjava je napačna in A in C sta različnih tipov. Ker ja A vitez, je C oproda.
    Odgovor: C je v vsakem primeru oproda.

23. D je gotovo normalnež, saj le tak lahko zase reče, da ni vitez. Hkrati je to resnica. Zato sta $D1$ (prva D-jeva izjava) in $D3$ resnici, $D2$ in $D4$ pa neresnici.
    Ker je $A4$ negacija izjave $D2$, je resnična, zato je resnična tudi izjava $A2$. C je torej vitez.
    $B1$ je zato neresnica in B ni vitez, zato je $A3$ neresnica in je A normalnež.
    $B2$ je negacija $A1$ in je zato resnica. B je torej normalnež.
    Odgovor: A, B in D so normalneži, C je vitez.

24. Iz druge izjave osebe F ($F2$) sklepamo, da F ni vitez. Če bi bila vitez, bi bila poročena z vitezom, kar ni mogoče.
    Zato je $H1$ (in tudi $H3$) neresnica. H je oproda ali normalna. Recimo, da je H oproda. Potem je $G1$ neresnica, enako $G3$. E torej ni oproda ($G3$) in ni normalna ($H3$). Torej je E vitez. Kaj pa, če je H normalna.

Potem je G oproda in $G3$ neresnica. Tudi zdaj je E vitez.
E je torej vitez. G je poročena z oprodo ($E1$ in $E2$), zato G ni oproda. Ker pa G ni vitez, je G normalna. Izjava $G2$ je resnična. Ker je tudi $H2$ napačna, je H oproda.
Ker je $F1$ resnica in F ni vitez, je F normalna, $G1$ in $G3$ sta resnici, $G2$ pa ne. F-in mož ni vitez, je pa T. Ker je normalna, T ni, zato je T oproda. Ker je U vitez ($G2$), ni poročen z E, zato je poročen s H. Za E ostane V, ki ni oproda ($E3$), pa tudi vitez ni, ker je to E. V je torej normalnež.

Odgovor: Vitez E poročena z normalnim V.
Normalna F poročena z oprodo T.
Normalna G poročena z oprodo S.
Oproda H poročena z vitezom U.

2. Izjavne funkcije enega in več argumentov

Zanimajo nas stavki, ki so ali resnični ali neresnični. Resničen stavek ima vrednost 1, neresničen pa 0. Če spremenljivka p lahko zavzame samo vrednosti iz množice $\{1, 0\}$ in funkcija $g(p)$ samo vrednosti iz množice $\{1, 0\}$, so takšne funkcije samo štiri.

p	g_1	g_2	g_3	g_4
1	1	0	1	0
0	1	1	0	0

Zanimiva je samo funkcija, ki jo podaja stolpec g_2. Vrednost te funkcije pri 1 je 0, pri 0 pa 1. Tej funkciji rečemo *negacija*. Negacija resničnega stavka je neresničen stavek, negacija neresničnega stavka pa je resničen stavek. Za negacijo bomo uporabljali znak $\neg$.

Koliko je dvomestnih funkcij iz množice $\{1, 0\}$ v množico $\{1, 0\}$? Imamo 4 nabore vrednosti dveh spremenljivk. Pri vsakem naboru imamo dve vrednosti, torej je teh funkcij $2^4 = 16$. Spodaj so predstavljene vse te funkcije.

p	q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Funkcija, katere vrednosti podaja stolpec f_8, je resnična samo v primeru, če sta p in q resnična. Tej funkcuji rečemo *konjunkcija* in zanjo uporabljamo znak $\wedge$. Stavek " $p \wedge q$" beremo "p in q".
Funkcija, podana s stolpcem f_{14}, pa je resnična, če je vsaj eden med p in q resničen. Tej funkciji rečemo *disjunkcija* in zanjo uporabljamo znak $\vee$. Stavek "$p \vee q$" beremo "p ali q".

Funkcija "ali p ali q" (v simbolih "$p \veebar q$") pa naj bo resnična, če imata p in q različni vrednosti.

Funkcija "p, če in samo če q" (v simbolih "$p \Leftrightarrow q$") pa naj bo resnična v primerih, ko imata p in q isto vrednost. Če pa imata p in q različni vrednosti, je vrednost te funkcije 0. Tej funkciji rečemo *ekvivalenca*, podana pa je s stolpcem f_9.

Zdaj pa vzemimo resničen stavek, ki se nanaša na naravna števila: "Če je število x deljivo z 6, potem je x deljivo s 3."

Zato so resnični tudi primeri:

Če je število 12 deljivo s 6, potem je 12 deljivo s 3.
Če je število 9 deljivo s 6, potem je 9 deljivo s 3.
Če je število 7 deljivo s 6, potem je 7 deljivo s 3.

Ta funkcija ima lastnost, da je resnična v treh primerih $(1,1), (0,1)$ in $(0,0)$.

Neresnična je v primeru: Če je 5 več kot 4, potem je 4 več kot 5.

To funkcijo imenujemo *implikacija* (simbolno $p \Rightarrow q$). Neresnična je samo pri $(1,0)$.

3. Resničnostne tabele

Omenjeni prikaz izjavnih (stavčnih) funkcij imenujemo *resničnostne tabele*. Oglejmo si še nekaj zgledov.

a	b	$\neg(a \wedge b)$	$\neg a \vee \neg b$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	1	1

Tule imamo dve izjavni funkciji, ki imata pri vseh naborih argumentov isto vrednost. Rekli bomo, da sta *enakovredni*. Če bi naredili resničnostno tabelo za funkcijo $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$, bi dobili povsod 1. Rekli bomo,

da je ta izjavna funkcija *tavtologija*. To so v resnici logični zakoni. Najpreprostejši zgled je $a \vee \neg a$, ki mu rečemo zakon o *izključitvi tretje možnosti*. Izjavni funkciji, ki je vedno 0, rečemo *protislovje*. Najenostavnejši zgled za protislovje je $a \wedge \neg a$.

Za matematiko je značilno, da začne z nekaj osnovnimi pojmi, nadaljnje pa uvajamo z definicijami.

Če začnemo z negacijo, konjunkcijo in ekvivalenco, lahko disjuncijo, implikacijo in *izključevanje* definiramo takole:

$$a \vee b \Leftrightarrow \neg(\neg a \wedge \neg b),\ a \Rightarrow b \Leftrightarrow \neg a \vee b,\ a \veebar b \Leftrightarrow \neg(a \Leftrightarrow b).$$

a	b	$(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$	$(\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	1

Zgoraj smo ekvivalenco podali z dvema različnima izrazoma. Prvi je v obliki *disjunktivne normalne oblike,* drugi pa v obliki *konjuktivne normalne oblike*.

Disjunktivna normalna oblika je disjunkcija konjunkcij izjavnih spremenljivk ali njihovih negacij. Dobimo jih tako, da za vrednost 1 zapišemo spremenjivko, za vrednost 0 pa njeno negacijo. Upoštevamo pa samo tiste vrstice, kjer ima funkcija vrednost 1.

Konjuktivna normalna oblika pa je konjunkcija osnovnih disjunkcij, ki jih dobimo, tako da za vrstice z vrednostjo 0, pri vrednosti 1 zapišemo negacijo spremenljivke, pri 0 pa spremenljivko.

Na primer $\neg a \vee b$ pri drugi vrstici zgoraj. Ta disjunkcija ima vrednost 0 samo pri $a = 1$ in $b = 0$. Disjunkcija $a \vee \neg b$ ima vrednost 0 samo za $a = 0, b = 1$. Konjunkcija teh dveh disjunkcij pa ima vrednost 0 pri teh dveh vrsticah, drugod je 1.

Po navadi zapišemo disjunktivno normalno obliko takrat, ko je vrednosti 1 manj kot vrednosti 0, konjunktivno normalno obliko pa takrat, ko je vrednosti 0 manj kot vrednosti 1.

V splošnem ni nujno, da je normalna oblika tudi najkrajša. Včasih jo lahko še poenostavimo. Če je število členov v normalni obliki liho, je ugodno enega ponoviti, da potem lahko pri poenostavljanju združujemo po dva in dva in uporabimo distributivnostni zakon.

a	b	c	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

V zgornjem zgledu je disjunktivna normalna oblika poenostavljena. Sama funkcija izraža, da sta vsaj dve izjavni spremenljivki enaki 1. Spodnja pa, da je liho število spremenljivk enako 1.

a	b	c	$a \Leftrightarrow b \Leftrightarrow c$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Spodaj je na različne načine podana funkcija, ki jo v računalništvu poznamo kot "Če a, potem b, sicer c."

a	b	c	$(a \Rightarrow b) \wedge (\neg a \Rightarrow c)$	$(\neg a \vee b) \wedge (a \vee c)$	$(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge c)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0

Pri opuščanju oklepajev upoštevamo naslednji prednostni red povezav: $\neg, \wedge, \vee, \veebar, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Naloge:

1. Pokaži, da so naslednje izjave tavtologije:

   a) $\neg(p \wedge \neg p)$

   b) $p \wedge q \Rightarrow p$

   c) $p \Rightarrow p \vee q$

   č) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

   d) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

2. Pokaži, da sta izjavi A in B enakovredni (pišemo $A \sim B$):

   a) $p \Rightarrow q, \neg q \Rightarrow \neg p$

   b) $p \wedge q \Rightarrow r, p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q$

   c) $\neg(p \Rightarrow q), p \wedge \neg q$

   č) $p \Leftrightarrow q, \neg p \Leftrightarrow \neg q$

Rešitve:

1. a)

p	$\neg(p \wedge \neg p)$
1	1
0	1

b)

p	q	$p \wedge q \Rightarrow p$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

c)

p	q	$p \Rightarrow p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

č)

p	q	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

d)

p	q	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

2. a)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

b)

p	q	r	$p \wedge q \Rightarrow r$	$p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q$
1	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1

c)

p	q	$\neg(p \Rightarrow q)$	$p \wedge \neg q$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	0	0

č)

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$\neg p \Leftrightarrow \neg q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	1

3. Alternativne predstavitve izjavnih funkcij

Tokrat bomo imeli opravka z izjavnimi spremenljivkami $a, b, c, \ldots$ Strnjeni tabeli za dve funkciji sta dani spodaj.

$(\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)$

	a	$\neg a$
b	1	0
$\neg b$	0	1

$(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$

	a	$\neg a$
b	1	0
$\neg b$	0	1

Vrstica, označena z b, pomeni, da ima tam b vrednost 1, vrstica $\neg b$ pa, da ima b vrednost 0. Podobno velja za stolpca a in $\neg a$. Te tabele imajo nekoliko bolj strnjeno obliko kot resničnostne tabele.

Zgled:

$(\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (a \vee \neg c))$

		a	$\neg a$
b	c	1	0
	$\neg c$	0	1
$\neg b$	c	0	0
	$\neg c$	0	1

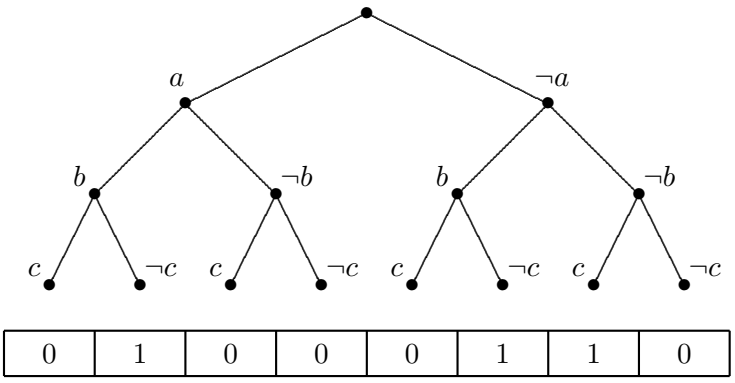
$(a \wedge b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg c)$

		a	$\neg a$
b	c	1	0
	$\neg c$	0	1
$\neg b$	c	0	0
	$\neg c$	0	1

Naslednja predstavitev je z odločitvenimi drevesi. Enako kot prej a označuje vejo, ko je $a = 1$, $\neg a$ pa, ko je $a = 0$.

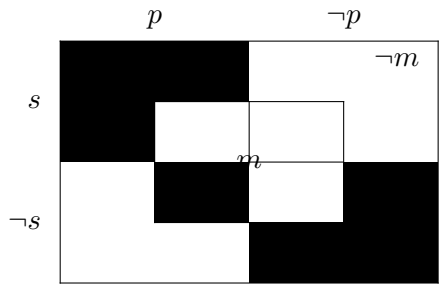
Zgled:

$(c \Leftrightarrow \neg b) \wedge (a \Rightarrow b)$



Pri predstavitvi z diagramom Lewisa Carrolla imamo spremenljivke s, p in m. Imamo pravokotnik, podeljen na 8 delov. Posamezni črni deli predstavljajo osnovne konjunkcije.

$$(m \wedge p \wedge \neg s) \vee (\neg m \wedge p \wedge s) \vee (\neg m \wedge \neg p \wedge \neg s)$$



Tudi Vennove diagrame, ki smo jih uporabljali pri množicah, lahko uporabimo za prestavitev izjavne funkcije.

Naloge:

1. Izpolni strnjeni tabeli:

$(\neg a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg b) \wedge (a \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee \neg c)$

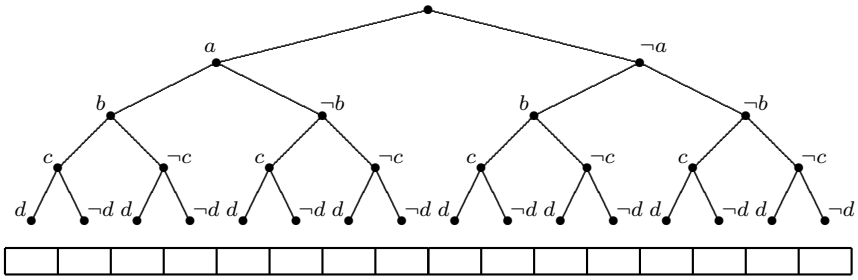
		a	$\neg a$
b	c		
	$\neg c$		
$\neg b$	c		
	$\neg c$		

$(a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c)$

		a	$\neg a$
b	c		
	$\neg c$		
$\neg b$	c		
	$\neg c$		

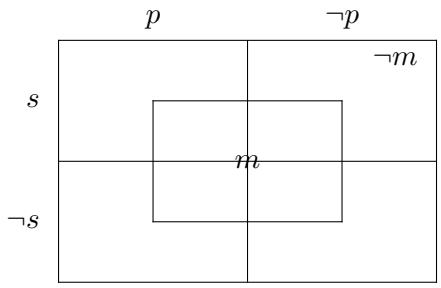
2. Izpolni preglednico pod drevesom:

$(b \Rightarrow \neg c) \wedge (a \Leftrightarrow b) \wedge (a \Rightarrow d)$



3. Osenči diagram, da bo ustrezal funkciji:

$$(m \wedge \neg p) \vee (\neg m \wedge \neg s)$$



Rešitve:

1.

$(\neg a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg b) \wedge (a \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee \neg c)$

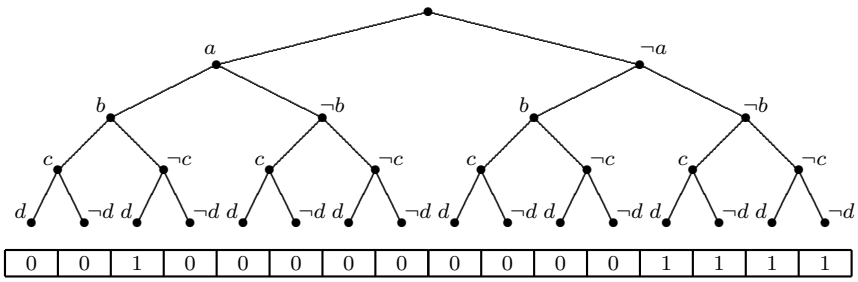
		a	$\neg a$
b	c	0	0
	$\neg c$	1	0
$\neg b$	c	1	0
	$\neg c$	0	1

$(a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c)$

		a	$\neg a$
b	c	0	0
	$\neg c$	1	0
$\neg b$	c	1	0
	$\neg c$	0	1

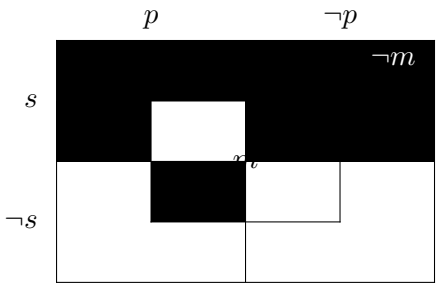
2.

$(b \Rightarrow \neg c) \wedge (a \Leftrightarrow b) \wedge (a \Rightarrow d)$



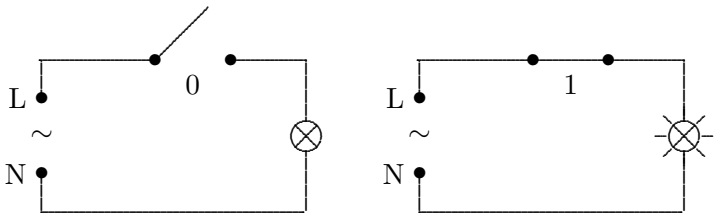
3.

$$(m \wedge \neg p) \vee (\neg m \wedge \neg s)$$



5. Preklopna vezja

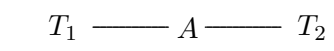
Na nekaterih stikalih v stanovanjih opazimo ob gumbu tako ali drugače zapisani številki 0 in 1, kar nas takoj spomni na logiko. In res! Če pritisnemu gumb ob 1, se prižge luč, če prej ni gorela in če seveda žarnica oziroma sijalka ni pregorela, slabo privita, žica do nje prekinjena itd. Če ob prižgani luči pritisnemo na istem stikalu gumb ob 0, pa luč ugasnemo. Torej s pritiskom ob 1 električnemu toku odpremo prosto pot do luči in jo s tem prižgemo, tokokrog do žarnice smo sklenili ali zaprli, s pritiskom ob 0 pa toku pot zapremo, tokokrog smo prekinili, odprli, in luč ugasne. Stikalo je v prvem primeru v stanju 1 in luč gori, v drugem primeru pa v stanju 0, luč ne gori. Pravimo tudi, da je v prvem primeru preklop zaprt ali v stanju 1, v drugem primeru pa je preklop odprt ali v stanju 0.



Na sliki sta z L in N označeni faza in ničla v električnem omrežju. Lahko vzamemo za vir baterijo in jo preko stikala povežemo s primerno žarnico.

Stikalu oziroma preklopu a priredimo izjavo A, ki je pravilna, če je preklop a zaprt (v stanju 1), in nepravilna, če je preklop a odprt (v stanju 0). Sliko poenostavimo tako, da označimo kar izjavo A v vrzeli prekinjene črte, ki ponazarja žico, ter vstopno in izstopno točko (T_1 in T_2). Zanima nas, kdaj tako zelo preprosto vezje prevaja električni tok. To se zgodi natanko

tedaj, ko je preklop a v stanju 1 oziroma ustrezna izjava pravilna. V nasprotnem primeru je preklop a v stanju 0, ustrezna izjava pa je nepravilna. Med preklopi in izjavami imamo na ta način preprosto korespondenco.

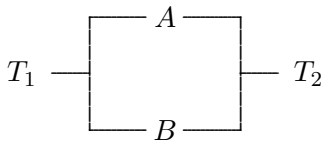


Preklope lahko tudi povezujemo v *preklopna vezja*. Preklopa v istem preklopnem vezju sta *simultana*, če sta hkrati zaprta oziroma hkrati odprta. Taka je smiselno označevati z isto črko. Preklopa pa sta si v istem preklopnem vezju *obratna*, če je istočasno prvi zaprt, drugi pa odprt oziroma prvi odprt in drugi zaprt. Tedaj enega označimo z a, preostalega pa z $\bar{a}$. V jeziku izjav ustrezata A in $\neg A$. Slednje bomo na slikah zaradi tehničnih težav označevali z $\bar{A}$.

Preklope lahko povezujemo *zaporedno* in *vzporedno*. Zanima nas, kdaj je tako vezje zaprto in kdaj odprto.

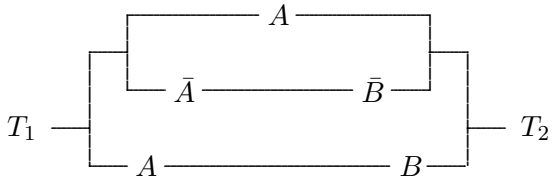


Očitno je pri zaporedni vezavi preklopov vezje zaprto samo takrat, ko so v njem vsi preklopi zaprti. Če je vsaj en preklop v takem vezju odprt, je vezje odprto. Zaporedni vezavi preklopov očitno ustreza konjunkcija ustreznih izjav, na sliki $A \vee B$.



Očitno pa je pri vzporedni vezavi preklopov vezje zaprto takrat, ko je vsaj en preklop zaprt. Če pa so vsi preklopi v takem vezju odprti, je vezje odprto. Vzporedni vezavi preklopov očitno ustreza disjunkcija ustreznih izjav, na sliki $A \wedge B$.

S kombinacijo zaporednih in vzporednih vezav preklopov lahko sestavimo bolj zapletena vezja.



Hitro lahko zapišemo, kateri izjavi ustreza vezje na sliki. Spodnji veji ustreza izjava $A \wedge B$, zgornji veji izjava $A \vee (\neg A \wedge \neg B)$, celotnemu vezju pa izjava

$$A \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$$

Ta je nepravilna samo v primeru, ko so nepravilne izjave A, $A \wedge B$ in $\neg A \wedge \neg B$. Če je A nepravilna, je $A \wedge B$ tudi nepravilna, ne glede na to, kakšna je B. Izjava $\neg A \wedge \neg B$ je nepravilna, če je $\neg B$ nepravilna, torej B pravilna izjava. Zgornja sestavljena izjava je nepravilna le takrat, ko je A nepravilna in B pravilna izjava. Ustrezno vezje je odprto le takrat, ko je odprt preklop A in zaprt preklop B.

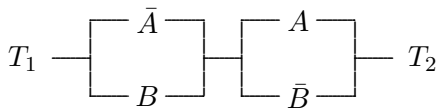
Po vsem tem lahko sestavimo seznam ustreznih izrazov v jeziku vezij in izjav logike:

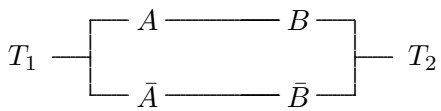
preklop	izjava
obratni preklop	negacija izjave
zaprt	pravilen
odprt	nepravilen
preklopno vezje	sestavljena izjava
zaporedno vezje	konjunkcija
vzporedno vezje	disjunkcija
simultani preklopi	logično ekvivalentne izjave

Primer: Skiciraj preklopno vezje, ki ustreza izjavi $A \Leftrightarrow B$. Kot vemo, je ta ekvivalentna izjavama

$$(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \quad \text{in} \quad (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

Dvomljivci lahko preverijo ekvivalentnost izjav na primer z resničnostno tabelo. Dani izjavi ustrezata preklopni vezji





Naloge:

1. Skiciraj preklopni vezji, ki ustrezata ekvivalentnima izjavama
$$(A \vee B) \wedge C \quad \text{in} \quad (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$
(glej tabele na stran 6)

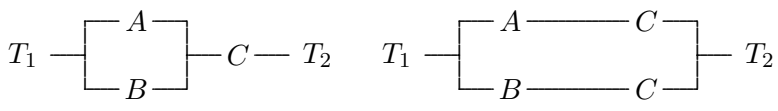
2. Skiciraj preklopni vezji, ki ustrezata ekvivalentnima izjavama
$$(A \wedge B) \vee C \quad \text{in} \quad (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

3. Skiciraj preklopno vezje za izjavo $A \veebar B$.

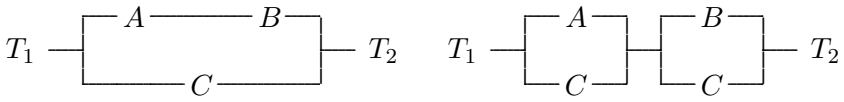
4. Skiciraj preklopno vezje za izjavo $A \Rightarrow B$.

Rešitve:

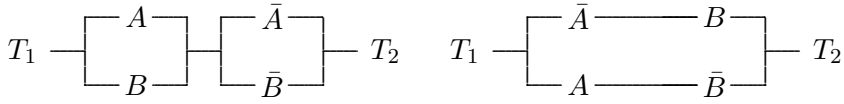
1.



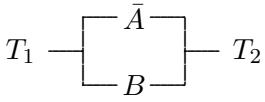
2.



3. Izjavo $A \veebar B$ najprej zapišemo v normalni obliki kot $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$ ali pa kot $(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$, nato pa skiciramo ustrezni preklopni vezji.



4. Uporabimo dejstvo, da je implikacija $A \Rightarrow B$ logično ekvivalentna izjavi $\neg A \vee B$.



6. Sklepanje

Izjava B je *logična posledica* izjav $A_1, A_2, \ldots, A_n$, natanko takrat, ko za vsak nabor vrednosti enostavnih izjav velja: če so vse izjave $A_1, A_2, \ldots, A_n$ resnične, potem je resnična tudi izjava B. Takšni trditvi o logični posledici rečemo *sklep* in jo simbolno zapišemo $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$. Izjavam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ rečemo *predpostavke (premise)*, izjavi B pa *zaključek* sklepa. Naslednja tabela nam prikazuje veljavnost (pravilnost) sklepa $p \Leftrightarrow q, q \models p$. V edini vrstici, kjer sta premisi resnični, je resničen tudi zaključek.

p	q	$p \Leftrightarrow q$	q	p
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	0	1	0
0	0	1	0	0

Dokažimo dva pomembna načina sklepanja: $A \models B \Rightarrow C$ natanko takrat, ko $A, B \models C$ (pravilo pogojnega sklepa).

Dokaz. Naj velja $A \models B \Rightarrow C$ in naj bosta A in B resnični. Ker je $B \Rightarrow C$ resnična izjava in je B resnična, je resnična tudi izjava C.

Obratno, naj velja $A, B \models C$ in naj bo A resnična izjava. Če je tudi B resnična, je resnična tudi C. Potem pa je resnična tudi izjava $B \Rightarrow C$.

$A, \neg A \models B$ (iz *protislovne množice* izjav izhaja karkoli). Dokaz sledi iz definicije sklepa, saj v tem primeru vse predpostavke niso resnične. Če želimo pokazati, da sklep ni veljaven, moramo poiskati takšen nabor vrednosti enostavnih izjav, da bodo vse premise resnične, zaključek pa neresničen. Pokažimo, da $p \Rightarrow q \models q \Rightarrow p$ ni veljaven sklep. V tretji vrstici je predpostavka resnična, zaključem pa ne.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

Naloge:

1. Pokaži pravilnost sklepov:
   a) $p \Rightarrow q, p \models q$ (modus ponens)
   b) $p \Rightarrow q, \neg q \models \neg p$ (modus tollens)

c) $p \Leftrightarrow q, \neg q \models \neg p$ (modus tollens za ekvivalenco)

č) $p \Rightarrow r, q \Rightarrow r \models p \vee q \Rightarrow r$

2. Pokaži nepravilnost sklepov:

a) $p \Rightarrow q, q \models p$

b) $p \Rightarrow q, \neg p \models \neg q$

c) $\neg p \Rightarrow \neg q \models \neg(p \Rightarrow q)$

Rešitve:

1. č)

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$p \vee q \Rightarrow r$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

2. b)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$
1	1	1	0	0
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	1	1

7. Metoda semantičnih dreves (tabel)

Ni boljšega načina za urjenje možganov od reševanja logičnih nalog. Takšne naloge so ponavadi zastavljene v pogovornem jeziku, zato od reševalca zahtevajo razumevanje jezika in obvladanje sklepanja. Čim bogatejši je jezik, lažje je zastaviti kratko, a težko nalogo. V tem sestavku se bomo ukvarjali z nalogami, v katerih metode sklepanja ne presegajo t. i. izjavnega računa.

Uporabili bomo metodo semantičnih dreves.

Naloge, ki jih bomo rešili, si bomo izposodili iz knjige R. Smullyana: *The lady or the tiger?* Prevod je izšel pri DZS.

Inšpektorja Craiga so poklicali, da bi pregledal nekaj umobolnic, za katere so sumili, da v njih ni vse v redu. V bolnišnicah so bili le pacienti in zdravniki. Nekateri od ljudi so bili popolnoma prisebni, tako da so vedno govorili resnico, ostali pa popolnoma neprisebni, tako da so vedno govorili neresnico.

1. V prvi bolnišnici je Craig govoril ločeno z Jonesom in Smithom.
   "*Kaj veste o Smithu?*" je vprašal Craig Jonesa.
   "*Zdravnik v bolnišnici je,*" je odogovoril Jones.

   Nekaj minut kasneje je Craig vprašal Smitha o Jonesu.
   "*Pacient je,*" je odogovoril Smith.
   V tej bolnišnici je nekaj narobe. Kaj?

2. V drugi bolnišnici je Craig srečal človeka, ki je izjavil nekaj takšnega, da je Craig sklepal, da gre za prisebnega pacienta, da torej ne sodi v bolnišnico. Kaj je ta človek rekel?

3. V tretji bolnišnici je neki človek izjavil nekaj takšnega, da je Craig sklepal, da gre za neprisebnega zdravnika. Kaj je ta človek rekel?

4. V četrti bolnišnici je Craig srečal dva človeka, A-ja in B-ja. A je menil, da je B nepriseben, B pa, da je A zdravnik. Craig se je zavzel, da enega od njiju odstranijo iz bolnice. Katerega?

Pri metodi sematničnih tabel želimo doseči, da bodo vse izjave v neki dani množici resnične. Pri sestavljenih izjavah ukrepamo takole:

Resnica	Neresnica
$\dfrac{A \wedge B}{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}$	$\dfrac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \mid \neg B}$
$\dfrac{A \vee B}{A \mid B}$	$\dfrac{\neg(A \vee B)}{\begin{array}{c} \neg A \\ \neg B \end{array}}$

$A \Rightarrow B$
$\neg A \mid B$

$\neg(A \Rightarrow B)$
A
$\neg B$

$A \Leftrightarrow B$	
A	$\neg A$
B	$\neg B$

$\neg(A \Leftrightarrow B)$	
$\neg A$	A
B	$\neg B$

$\neg(\neg A)$
A

Prva kolona nam daje pogoje za resničnost, druga pa pogoje za neresničnost sestavljene izjave.

Npr.: izjava $A \Leftrightarrow B$ je resnična, če sta A in B resnični ali pa če sta A in B obe neresnični. Ali pa: izjava $A \Rightarrow B$ je neresnična ($\neg(A \Rightarrow B)$ resnična), če je A resnična, B pa neresnična. Zadnjega pravila, da je $\neg A$ neresnična, če je A resnična, eksplicitno ne bomo zapisovali.

Uvedli bomo naslednje oznake:

- S_N za dejstvo, da je oseba N prisebna, oziroma samo S, če nastopa samo ena oseba.
  Če oseba ni prisebna, pišemo seveda $\neg S_N$.

- P_N pomeni, da je N pacient.
  $\neg P_N$ pomeni, da N ni pacient, torej je zdravnik.

Recimo, da oseba N izjavi, da velja X. Če je N prisebna oseba, potem je X resnica, če pa N ni prisebna oseba, potem je X neresnica. Zadnji dve dejstvi lahko skupaj zapišemo simbolično:

$$(S_N \Rightarrow X) \wedge (\neg S_N \Rightarrow \neg X)$$

ali ekvivalentno:

$$(S_N \Rightarrow X) \wedge (X \Rightarrow S_N)$$

to je

$$S_N \Leftrightarrow X$$

Pogoje prve naloge lahko zapišemo:

$$S_{J(ones)} \Leftrightarrow \neg P_{S(mith)}$$

$$S_S \Leftrightarrow P_J$$

Če želimo napraviti obe izjavi resnični, imamo naslednje možnosti:

S_J		$\neg S_J$	
$\neg P_S$		P_S	
S_S	$\neg S_S$	S_S	$\neg S_S$
P_J	$\neg P_J$	P_J	$\neg P_J$

To pa pomeni, da v odvisnosti od situacije velja ena od izjav:

1. Da je Jones priseben pacient.
2. Da je Smith nepriseben zdravnik.
3. Da je Smith priseben pacient.
4. Da je Jones nepriseben zdravnik.

V vsakem primeru je v bolnišnici nekaj narobe.

Recimo, da je oseba, ki jo je Craig srečal v drugi bolnišnici, izjavila X. Potem Craig ve

$$S \Leftrightarrow X$$

(če oseba govori resnico, je X resnica, če oseba govori neresnico, potem je X neresnica). Iz te izjave je Craig sklepal, da je ta oseba priseben pacient, torej

$$S \wedge P$$

Če iz neke izjave logično sledi neka druga izjava, to pomeni, da ni mogoče, da bi bila prva resnična, druga pa neresnična. Torej iz prve izjave in negacije druge sledi protislovje. Množica izjav

$$\{S \Leftrightarrow X, \neg(S \wedge P)\}$$

mora biti protislovna. Lahko pa je že sama množica $\{S \Leftrightarrow X\}$ protislovna. To se zgodi, če je X kar $\neg S$, če je torej oseba izjavila, da govori neresnico.

TO, KAR GOVORIM, NI RESNICA.

To pomeni, da že sama formulacija naloge vsebuje protislovje, zato to možnost izpustimo. Tabela za obe izjavi izgleda takole:

S		$\neg S$	
X		$\neg X$	
$\neg S$	$\neg P$	$\neg S$	$\neg P$
1	2	3	4

Vsaka veja mora vsebovati protislovje, prva ga že vsebuje. Druga veja bo vsebovala protislovje le, če iz X sledi vsaj eno: $\neg S$ ali P. Torej

$$X \Rightarrow \neg S \vee P \tag{1}$$

Tretja veja bo vsebovala protislovje, če bo iz $\neg X$ sledilo S,

$$\neg X \Rightarrow S.$$

Zaradi četrte veje mora biti

$$\neg X \Rightarrow S \vee P.$$

Vendar je, če je izpolnjen pogoj $\neg X \Rightarrow S$, avtomatično izpolnjen tudi pogoj

$$\neg X \Rightarrow S \vee P.$$

Veljati mora torej

$$\neg X \Rightarrow S \quad \text{oziroma} \quad \neg S \Rightarrow X \tag{2}$$

oziroma skupaj z (1):

$$(\neg S \Rightarrow X \wedge X \Rightarrow \neg S \vee P) \tag{3}$$

Rešitev $\neg S$ ne pride v poštev, ostane le

$$\neg S \vee P \quad \text{ali ekvivalentno} \quad \neg(S \wedge \neg P).$$

To pomeni, da je oseba izjavila:

NISEM PRISEBEN ZDRAVNIK.

(ali nekaj, kar je logično ekvivalentno temu).

V tretjem primeru je Craig iz $S \Leftrightarrow X$ logično izpeljal $\neg S \wedge \neg P$. Semantična tabela za pogoj, da je prva izjava resnična in druga neresnična, je:

S		$\neg S$	
X		$\neg X$	
S	P	S	P
1	2	3	4

Prva veja zahteva $X \Rightarrow \neg S$, druga $X \Rightarrow \neg S \vee \neg P$. Če je prvi pogoj izpolnjen, je tudi drugi avtomatično izpolnjen. Tretja veja že vsebuje protislovje, četrta pa zahteva $\neg X \Rightarrow S \vee \neg P$ oziroma $\neg S \wedge P \Rightarrow X$. Torej skupaj

$$(\neg S \wedge P \Rightarrow X) \wedge (X \Rightarrow \neg S).$$

Rešitev je $\neg S \wedge P$, se pravi, da je oseba rekla

SEM NEPRISEBEN PACIENT.

Četrti primer vsebuje pogoja

$$S_A \Leftrightarrow \neg S_B \qquad (1)$$
$$S_B \Leftrightarrow \neg P_A \qquad (2)$$

Tabelo nadaljujemo takole

S_A		$\neg S_A$	
$\neg S_B$		S_B	
S_B	$\neg S_B$	S_B	$\neg S_B$
$\neg P_A$	P_A	$\neg P_A$	P_A
1	2	3	4

Veji 1 in 4 vsebujeta protislovje (S_B, $\neg S_B$). Druga veja pravi, da je A priseben pacient. Tretja pa, da je A nepriseben zdravnik. Tako v enem kot v drugem primeru A ne sodi v bolnišnico.

Naloge:

1. Preveri rešitve druge in tretje naloge z običajnim sklepanjem.

2. Poišči z metodo semantičnih tabel vse takšne formule X, za katere je

$$(((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow \neg(X \vee (q \Rightarrow r))) \Leftrightarrow X$$

tavtologija, to je, resnica za vse možne vrednosti osnovnih izjav.

II. Kvantifikatorja

1. Zgradba izjav in predikati

Vpeljava kvantifikatorjev nam omogoča, da simbolično zapišemo izjave, v katerih nastopajo fraze "za vsak", "noben", "vsaj en" ipd. Spoznavamo odnose med kvantifikatorji in izjavnimi povezavami. V simbolizmu zapisujemo izreke in definicije matematike.

1.1 Posamične izjave. Izjave, zapisane s spremenljivkami

Vzemimo, da se ta trenutek ukvarjamo z lastnostmi naravnih števil. To množico bomo imenovali pogovorno področje (PP). Posamezna naravna števila imajo še dodatne lastnosti, med njimi veljajo določeni odnosi, npr.:

7 je praštevilo.

Število 5 deli število 10.

Število 7 je za 2 večje od števila 5.

Razlika števil 8 in 5 je enaka vsoti števil 1 in 2.

V prvem primeru gre za lastnost števila 7, v drugem za odnos med številoma 5 in 10, v tretjem za odnos med tremi števili in v četrtem za odnos med štirimi števili. Naše štiri izjave govorijo o posameznih številih, zato jim rečemo **posamične izjave**.

V splošnem primeru posamična izjava govori o odnosu med n rečmi. Vsaka reč je v izjavi zastopana z **imenom**, odnos pa v izjavi predstavlja **predikat**. Za pomembnejše odnose si v matematiki izberemo posamezne znake. Tako drugo izjavo iz seznama zapišemo $5 \mid 10$.

Če bi se nam tudi drugi trije primeri zdeli dovolj pomembni, bi uvedli posebne znake in pisali

$$P(7) \qquad V(7,2,5) \qquad R(8,5,1,2).$$

Če pa ne bi uvajali dodatnih znakov, bi zadnji dve izjavi lahko kljub temu zapisali simbolično

$$7 = 2 + 5 \qquad 8 - 5 = 1 + 2.$$

V splošnem se dogovorimo, da bomo odnos med n rečmi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ iz pogovornega področja zapisovali

$$S(a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{ali} \quad Sa_1a_2 \ldots a_n$$

ter brali

"Reči $a_1, a_2, \ldots, a_n$ so v odnosu S."

ali

"Med rečmi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ velja relacija S."

V primeru $n = 1$ pa rečemo "Reč a_1 ima lastnost S."

V matematiki običajno dvomestne odnose zapisujemo tako, da znak za odnos stoji med obema imenoma, torej bomo dvomestne odnose zapisovali tudi takole: $a_1 P a_2$. Znaki za odnose vežejo močneje kot izjavne povezave.

Vaja.

1. Naštej nekaj lastnosti in odnosov med števili, točkami, premicami. Za katere odnose smo izbrali posebne simbole?

2. V oznakah iz prejšnjih primerov ugotovi, katere izmed naslednjih izjav so resnične:

a) $P(5)$	č) $V(2,7,5)$	f) $R(8,5,2,1)$
b) $P(8)$	d) $V(9,3,6)$	g) $R(5,8,2,1)$
c) $P(31)$	e) $V(9,3,5)$	h) $R(9,5,2,2)$

Posamične ali **singularne** izjave lahko povezujemo z izjavnimi povezavami. S tem se izognemo uvajanjem dodatnih simbolov. Toda tudi takšne izjave govorijo le o posameznih rečeh, so torej še vedno singularne izjave. Za matematiko pa so značilne takele izjave (o teh več v naslednjem razdelku):

$$x + y = y + x \qquad x \mid y \wedge y \mid z \Rightarrow x \mid z$$
$$x(y + z) = xy + xz \qquad p \perp q \Rightarrow q \perp p$$

Iz prve izjave sledijo izjave

$$1 + 2 = 2 + 1 \qquad x + 1 = 1 + x$$
$$2 + 3 = 3 + 2 \qquad x + (y + z) = (y + z) + x$$

Seveda imajo ti simbolični zapisi smisel samo za tistega, ki ve, kaj pomenijo posamezni znaki in na katero množico se nanašajo spremenljivke.

V našem primeru je **zaloga vrednosti** spremenljivk x, y in z množica naravnih števil, zaloga vrednosti spremenljivk p, q in r pa množica vseh premic v neki ravnini.

Veliko število matematičnih izrekov ima obliko

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$$

Kot vemo, jih dokažemo tako, da izhajamo iz predpostavk $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in izpeljemo B z uporabo matematičnih zakonov.

Primer: Dokažimo: $|x-1| < \frac{1}{10} \Rightarrow |\sqrt{x}-1| < \frac{1}{10}$, kjer je x nenegativno realno število.

Dokaz:

1. $\|x-1\| < \frac{1}{10}$	predpostavka
2. $\|\sqrt{x}-1\| \cdot \|\sqrt{x}+1\| < \frac{1}{10}$	sledi iz 1 in $\|a^2-b^2\| = \|a-b\| \cdot \|a+b\|$
3. $\|\sqrt{x}-1\| < \frac{1}{10\|\sqrt{x}+1\|}$	2 delimo z $\|\sqrt{x}+1\|$
4. $\frac{1}{10\|\sqrt{x}+1\|} \leq \frac{1}{10}$	sledi iz $1 \leq \sqrt{x}+1$
5. $\|\sqrt{x}-1\| < \frac{1}{10}$	sledi iz 3 in 4 zaradi $a < b \wedge b \leq c \Rightarrow a < c$

Primer: Dokažimo: $2^k > 2k+1 \Rightarrow 2^{k+1} > 2(k+1)+1$, kjer je k poljubno naravno število.

Dokaz:

1. $2^k > 2k+1$	predpostavka
2. $2 \cdot 2^k > 2(2k+1)$	neenačbo 1 pomnožimo s številom 2
3. $2^{k+1} > 2(k+1)+2k$	preuredimo enačbo 2
4. $2^{k+1} > 2(k+1)+1$	sledi iz 3 in $2k > 1$

Naloge:

⋆ 1. Dokaži: a) $|x-x_0| < 0,1 \Rightarrow |2x-2x_0| < 0,2$

b) $|x-1| < \frac{1}{100} \Rightarrow |\sqrt{x}-1| < \frac{1}{100}$

c) $|x-1| < \frac{1}{1000} \Rightarrow |\sqrt{x}-1| < \frac{1}{1000}$

č) $|x-4| < \frac{1}{10} \Rightarrow |\sqrt{x}-2| < \frac{1}{20}$

d) $|x-4| < \frac{1}{100} \Rightarrow |\sqrt{x}-2| < \frac{1}{200}$

e) $|x-4| < \frac{1}{1000} \Rightarrow |\sqrt{x}-2| < \frac{1}{2000}$

2. Zapiši simbolično naslednje trditve:

a) Če je vsota kvadratov dveh števil enaka 0, sta obe števili enaki 0.

b) Če je produkt dveh števil enak 0, potem je vsaj eno od obeh števil enako 0.

c) Če sta dve premici vzporedni tretji, sta vzporedni tudi med seboj.

3. Imamo dve števili, ki nista obe enaki 0. Kaj lahko poveš o njunem produktu? Zapiši pogoj "števili a, b nista obe enaki 0" v simboliki izjavnega računa.

Rešitve:

1. b)

1.	$\lvert x-1\rvert < 0,01$	predpostavka
2.	$\lvert\sqrt{x}-1\rvert \cdot \lvert\sqrt{x}+1\rvert < 0,01$	sledi iz 1 in $\lvert a^2-b^2\rvert = \lvert a-b\rvert \cdot \lvert a+b\rvert$
3.	$\lvert\sqrt{x}-1\rvert < \dfrac{0,01}{\sqrt{x}+1}$	sledi iz 2
4.	$\lvert\sqrt{x}-1\rvert < 0,01$	sledi iz 3 in $\sqrt{x}+1 \geq 1$

2. a) $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0$

b) $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$

c) $p \parallel q \wedge r \parallel q \Rightarrow p \parallel r$

3. V pogovorni praksi najdemo tri možnosti za razumevanje pogoja "števili a, b nista obe enaki 0":

i) $a \neq 0 \wedge b \neq 0$. Produkt $ab \neq 0$.

ii) $a \neq 0 \veebar b \neq 0 (\Leftrightarrow a = 0 \veebar b = 0)$. Produkt je 0.

iii) $\neg(a = 0 \wedge b = 0) (\Leftrightarrow a \neq 0 \vee b \neq 0)$.

O produktu ne moremo povedati ničesar.

Janez Gradišnik v delu "Še znamo slovensko?" zagovarja drugo možnost (str. 71, 72, 147).

1.2. Kvantifikatorji

Tovarišica:	Koliko je $(a+b)^2$?
Janezek:	$(a+b)^2 = a^2 + b^2$.
Tovarišica:	To ne drži.
Janezek:	Potem je $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$.
Tovarišica:	Tudi to ne drži.
Janezek:	Potem pa zakon $p \vee \neg p$ ne velja.
Tovarišica:	Janezek, že tretjič si ga polomil.

Zakaj je prišlo do nesporazuma?

Kje tiči nesporazum med Janezkom in tovarišico? Tovarišica sklepa takole: Če vzamemo $a = 1$ in $b = 1$, ne velja $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. Če pa

vzamemo $a = 1$ in $b = 0$, potem ne velja $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$. Janezek pa sklepa takole: Če ne velja $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, potem velja $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$. Kako odpraviti ne sporazum?

Matematični zakoni, kot je npr. $x + y = y + x$, nam pravzaprav zagotavljajo:

Za poljubni števili x in y velja, da je $x + y = y + x$.

Po tem principu "zakon" $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ pomeni:

Za poljubni števili a in b velja $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.

Negacija te trditve je:

Obstajata taki števili a in b, da velja $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$.

To pa je res. Podobno "zakon" $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$ pomeni:

Za poljubni števili a in b velja $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$.

Negacija te trditve je matematična resnica:

Obstajata taki števili a in b, da velja $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.

Če želimo simbolično zapisati omenjene izjave, si moramo za fraze "za poljubni števili a in b" oziroma "obstajata taki števili a in b" izmisliti dodatno simboliko.

Naj bo pogovorno področje neka neprazna množica $\mathscr{U}$ in naj bo H neka smiselna lastnost za elemente množice $\mathscr{U}$ (recimo, da je $\mathscr{U}$ množica naravnih števil, H pa lastnost "biti praštevilo"). Izjavo "za vsak x velja $H(x)$" oziroma "vsak x ima lastnost H" bomo simbolično zapisovali

$$\forall x H(x) \quad \text{oziroma} \quad \forall x H x$$

Simbol $\forall$ imenujemo **univerzalnostni kvantifikator**.

Izjavo "obstaja tak x, da velja $H(x)$" oziroma "vsaj en x ima lastnost H" bomo simbolično zapisovali

$$\exists x H(x) \quad \text{oziroma} \quad \exists x H x$$

Simbol $\exists$ imenujemo **eksistencialnostni kvantifikator**. Tudi izraza $\forall x$ in $\exists x$ imenujemo kvantifikatorja. Izjava, ki se začenja z univerzalnostnim kvantifikatorjem, je **univerzalna izjava**, izjava, ki se začenja z eksistencialnostnim kvantifikatorjem, pa je **eksistencialna izjava**.

V zapisu $\forall x H(x)$ je zapis $H(x)$ **področje delovanja** kvantifikatorja $\forall x$. Kadar je zapis $H(x)$ sestavljen s pomočjo izjavnih povezav, moramo uporabiti oklepaje in zapisati na primer $\forall x(Px \wedge Qx)$, ker $\forall x Px \wedge Qx$ pomeni $(\forall x Px) \wedge Qx$ in je zadnje nastopanje spremenljivke x izven področja kvantifikatorja $\forall x$. Dogovorimo se torej, da kvantifikatorji vežejo močneje od izjavnih povezav.

V izjavi $\forall x H(x)$ lahko nastopajo še drugi kvantifikatorji, ki so v zapisu $H(x)$. Kvantifikator $\forall x$ je **glavni kvantifikator** in ga v matematiki običajno izpuščamo.

Kadar zapisujemo izjave v aritmetiki, se nam lahko zgodi, da postanejo zgornji zapisi nepregledni. Takrat uporabimo še dvopičje, ki kvantifikatorje loči od drugih zapisov, ter oklepaje.

Tako namesto $\exists x\ x > 0$ pišemo $\exists x : x > 0$ ali $\exists x(x > 0)$ in namesto $\forall x\ x = x$ pišemo $\forall x : x = x$ ali $\forall x(x = x)$.

Primer: Pogovorno področje je množica naravnih števil, lastnost P pa "biti praštevilo". Vsako izjavo pogovornega jezika zapišimo še simbolično:

Vsako naravno število je praštevilo.	$\forall x P(x)$
Vsaj eno naravno število je praštevilo.	$\exists x P(x)$
Nobeno naravno število ni praštevilo.	$\forall x \neg P(x)$
Ni res, da obstaja vsaj eno praštevilo.	$\neg \exists x P(x)$
Vsaj eno naravno število ni praštevilo.	$\exists x \neg P(x)$
Ni res, da je vsako naravno število praštevilo.	$\neg \forall x P(x)$

S tretjo izjavo povemo isto kot s četrto. Prav tako peta izjava pove isto kot šesta.

Vaja: Poseben problem v slovenskem jeziku pa so takšne izjave:

Vsako naravno število ni praštevilo.

Ni vsako naravno število praštevilo.

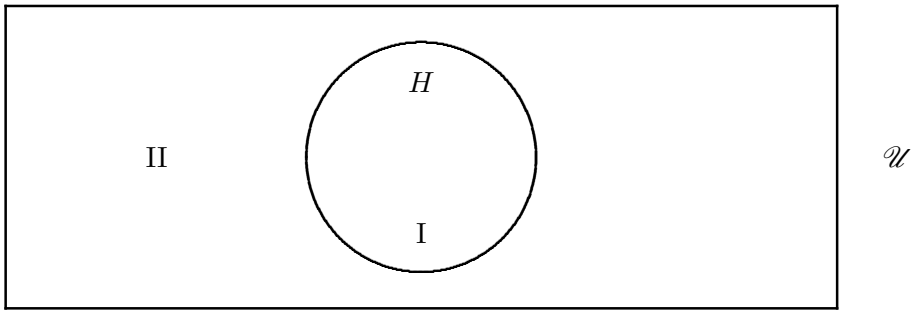
Ni res, da je vsako naravno število praštevilo. Kako bi prevedel te izjave v logično simboliko?

Izjave s kvantifikatorji lahko izrazimo tudi v jeziku množic:

$$\forall x H(x) \Leftrightarrow \{x; H(x)\} = \mathscr{U} \qquad \neg \exists x H(x) \Leftrightarrow \{x; H(x)\} = \emptyset$$
$$\exists x H(x) \Leftrightarrow \{x; H(x)\} \neq \emptyset \qquad \exists x \neg H(x) \Leftrightarrow \{x; \neg H(x)\} \neq \emptyset$$
$$\forall x \neg H(x) \Leftrightarrow \{x; \neg H(x)\} = \mathscr{U} \qquad \neg \forall x H(x) \Leftrightarrow \{x; H(x)\} \neq \mathscr{U}$$

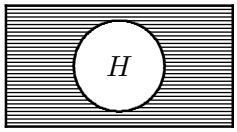
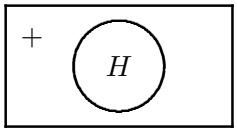
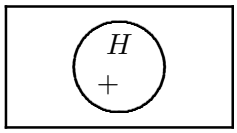
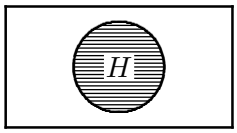
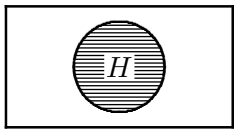
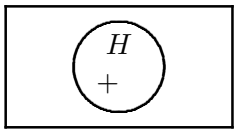
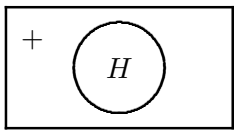
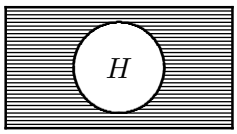
Prva ekvivalenca pravi, da imajo vsi x pogovornega območja lastnost H natanko tedaj, kadar se množica reči z lastnostjo H ujema s pogovornim področjem.

Vse skupaj lahko ponazorimo z Vennovimi diagrami. Pogovorno področje ponazorimo s točkami pravokotnika



Področje I na sliki ponazarja množico $\{x; H(x)\}$, področje II pa množico $\{x; \neg H(x)\}$. Če neko področje zaznamuje neprazno množico, bomo to na diagramu prikazali z znakom $+$. Nasprotno, če je področje prazno, ta del diagrama osenčimo.

Resničnost in neresničnost izjav s kvantifikatorji podaja naslednja tabela

	resnica	neresnica
$\forall x H(x)$		
$\exists x H(x)$		
$\forall x \neg H(x)$		
$\exists x \neg H(x)$		

Izjava $\forall x H(x)$ je resnična natanko tedaj, kadar je množica $\{x; \neg H(x)\}$ prazna, to pa pomeni, da je ta množica na diagramu osenčena. Izjava

$\forall x H(x)$ pa ni resnična, če množica $\{x; \neg H(x)\}$ ni prazna, se pravi, da je na diagramu zaznamovana s $+$. Podobno ugotovimo v drugih treh primerih.

Vaja: Ugotovi pravilnost tabele za ostale tri primere. Kako se med seboj razlikujeta diagrama za resničnost in neresničnost neke izjave?

Iz tabele razberemo, da je izjava $\forall x H(x)$ resnična natanko tedaj, kadar je izjava $\exists x \neg H(x)$ neresnična. To pa pomeni, da je ena negacija druge:

$$\neg \forall x H(x) \Leftrightarrow \exists x \neg H(x)$$
$$\neg \exists x \neg H(x) \Leftrightarrow \forall x H(x)$$

Podobno ugotovimo

$$\neg \exists x H(x) \Leftrightarrow \forall x \neg H(x)$$
$$\neg \forall x \neg H(x) \Leftrightarrow \exists x H(x)$$

Pravili, podani v prvem in tretjem zapisu, sta **zakona negiranja kvantifikatorjev**, druga ekvivalenca nam pove, da lahko univerzalnostni kvantifikator definiramo z eksistencialnostnim kvantifikatorjem, četrta ekvivalenca pa izraža eksistencialnostni kvantifikator z univerzalnostnim.

Vaja: Pogovorno področje je množica naravnih števil, $S(x) \equiv x$ je sodo število.

Zapiši simbolično naslednje izjave in ugotovi, katere izmed njih so resnične. Nariši tudi ustrezne diagrame.

a) Vsako število je sodo.
b) Nobeno število ni sodo.
c) Vsako število ni sodo.
č) Vsaj eno število ni sodo.
d) Vsaj eno število je sodo.
e) Ni res, da je vsako število sodo.
f) Ni res, da nobeno število ni sodo.

Primer: Pogovorno področje je množica naravnih števil. Želimo vpeljati nove znake za relacijo "... deli ..." in za lastnosti "... je praštevilo" ter "... je sodo število". To naredimo z definicijami:

Število m deli število n natanko tedaj, kadar obstaja takšno število k, da velja $n = km$.

V simbolični obliki jo zapišemo takole:

$$\forall m \forall n (m \mid n \Leftrightarrow \exists k (n = km))$$

oziroma po dogovoru o izpuščanju univerzalnostnega kvantifikatorja, ki se nanaša na celoten zapis:

$$m \mid n \Leftrightarrow \exists k(n = km).$$

Definicijo

"Število n je praštevilo natanko tedaj, kadar je deljivo le z ena in samim seboj in je različno od ena."

zapišemo

$$P(n) \Leftrightarrow \forall k(k \mid n \Rightarrow k = 1 \vee k = n) \wedge n \neq 1$$

Kdaj torej n ni praštevilo? Če velja

$$n = 1 \vee \exists k(k \mid n \wedge k \neq 1 \wedge k \neq n)$$

Število je sodo, če je deljivo z 2.

$$S(n) \Leftrightarrow 2 \mid n \quad \text{ali}$$
$$S(n) \Leftrightarrow \exists k(n = 2k)$$

Primer: Za množico $\mathscr{A}$ rečemo, da je podmnožica množice $\mathscr{B}$ natanko tedaj, kadar je vsak element množice $\mathscr{A}$ tudi element množice $\mathscr{B}$. To simbolično zapišemo

$$\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B} \Leftrightarrow \forall x(x \in \mathscr{A} \Rightarrow x \in \mathscr{B})$$

Kdaj neka množica $\mathscr{A}$ ni podmnožica množice $\mathscr{B}$? Seveda, če je izpolnjeno

$$\exists x(x \in \mathscr{A} \wedge x \notin \mathscr{B})$$

Enakost množic je podana z definicijo

$$\mathscr{A} = \mathscr{B} \Leftrightarrow \forall x(x \in \mathscr{A} \Leftrightarrow x \in \mathscr{B})$$

Torej sta množici $\mathscr{A}$ in $\mathscr{B}$ različni, če velja

$$\exists x(x \in \mathscr{A} \Leftrightarrow x \notin \mathscr{B})$$

Primer: Univerzalne izjave $\forall x R(x)$ v matematiki dokazujemo tako, da za poljuben x dokažemo $R(x)$. Npr., če želimo dokazati $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$, to je $\forall x(x \in \mathscr{A} \Rightarrow x \in \mathscr{B})$, naredimo kar tako, da pri poljubnem x iz predpostavke $x \in \mathscr{A}$ izpeljemo $x \in \mathscr{B}$. Dokažimo, da velja

$$\mathscr{A} \setminus \mathscr{B} \subseteq (\mathscr{A} \setminus \mathscr{C}) \cup (\mathscr{C} \setminus \mathscr{B})$$

Izrek bomo dokazali z analizo primerov (glede na to, ali je $x \in \mathscr{C}$ ali $x \notin \mathscr{C}$). Točke, ki se nanašajo na komutativnostne zakone, bomo izpustili.

Dokaz.

1.	$x \in \mathscr{A} \setminus \mathscr{B}$	predpostavka pogojnega sklepa
2.	$x \in \mathscr{A} \wedge x \notin \mathscr{B}$	1 definicija razlike
3.	$x \in \mathscr{A}$	2 poenostavitev
4.	$x \notin \mathscr{B}$	2 poenostavitev
5.1	$x \in \mathscr{C} \vee x \notin \mathscr{C}$	tavtologija $p \vee \neg p$
5.2.1	$x \in \mathscr{C}$	predpostavka pogojnega sklepa
5.2.2	$x \in \mathscr{C} \wedge x \notin \mathscr{B}$	5.2.1, 4 združitev
5.2.3	$x \in \mathscr{C} \setminus \mathscr{B}$	5.2.2 definicija razlike
5.2.4	$x \in \mathscr{A} \setminus \mathscr{C} \vee x \in \mathscr{C} \setminus \mathscr{B}$	5.2.3 pridružitev
5.2.5	$x \in (\mathscr{A} \setminus \mathscr{C}) \cup (\mathscr{C} \setminus \mathscr{B})$	5.2.4 definicija unije
5.2	$x \in \mathscr{C} \Rightarrow x \in (\mathscr{A} \setminus \mathscr{C}) \cup (\mathscr{C} \setminus \mathscr{B})$	5.2.1, 5.2.5 pogojni sklep
5.3.1	$x \notin \mathscr{C}$	predpostavka pogojnega sklepa
5.3.2	$x \in \mathscr{A} \wedge x \notin \mathscr{C}$	3, 5.3.1 združitev
5.3.3	$x \in \mathscr{A} \setminus \mathscr{C}$	5.3.2 definicija razlike
5.3.4	$x \in \mathscr{A} \setminus \mathscr{C} \vee x \in \mathscr{C} \setminus \mathscr{B}$	5.3.3 pridružitev
5.3.5	$x \in (\mathscr{A} \setminus \mathscr{C}) \cup (\mathscr{C} \setminus \mathscr{B})$	5.3.4 definicija unije
5.3	$x \in \mathscr{C} \Rightarrow x \in (\mathscr{A} \setminus \mathscr{C}) \cup (\mathscr{C} \setminus \mathscr{B})$	5.3.1, 5.3.5 pogojni sklep
5.	$x \in (\mathscr{A} \setminus \mathscr{C}) \cup (\mathscr{C} \setminus \mathscr{B})$	5.1, 5.2, 5.3 analiza primerov
$x \in \mathscr{A} \setminus \mathscr{B} \Rightarrow x \in (\mathscr{A} \setminus \mathscr{C}) \cup (\mathscr{C} \setminus \mathscr{B})$		1, 5 pogojni sklep

Vaja. Zapiši definicije unije, preseka in razlike.

Primer: Dokazovanje enakosti $\mathscr{A} = \mathscr{B}$ med množicami ponavadi poteka tako, da izpeljemo zaporedje med seboj ekvivalentnih izjav, izmed katerih je prva $x \in \mathscr{A}$, zadnja pa $x \in \mathscr{B}$. Tako dokažemo enakost

$$\mathscr{A} \cap (\mathscr{B} \cup \mathscr{C}) = (\mathscr{A} \cap \mathscr{B}) \cup (\mathscr{A} \cap \mathscr{C})$$

takole:

$$\begin{aligned} x \in \mathscr{A} \cap (\mathscr{B} \cup \mathscr{C}) &\sim x \in \mathscr{A} \wedge x \in \mathscr{B} \cup \mathscr{C} \sim \\ &\sim x \in \mathscr{A} \wedge (x \in \mathscr{B} \vee x \in \mathscr{C}) \sim \\ &\sim (x \in \mathscr{A} \wedge x \in \mathscr{B}) \vee (x \in \mathscr{A} \wedge x \in \mathscr{C}) \sim \\ &\sim x \in \mathscr{A} \cap \mathscr{B} \wedge x \in \mathscr{A} \cap \mathscr{C} \sim \\ &\sim x \in (\mathscr{A} \cap \mathscr{B}) \vee (\mathscr{A} \cap \mathscr{C}) \end{aligned}$$

Pri tem je prva ekvivalenca definicija preseka, druga sledi iz definicije unije, tretja je distributivnostni zakon v izjavnem računu, nato dvakrat uporabimo definicijo preseka in na koncu še unije.

Seveda pa bi enakost $\mathscr{A} = \mathscr{B}$ lahko dokazali tudi tako, da dokažemo $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ in $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$.

Naloge:

1. Zapiši v simbolizmu naslednje izjave. Pred tem določi pogovorno področje:

a)



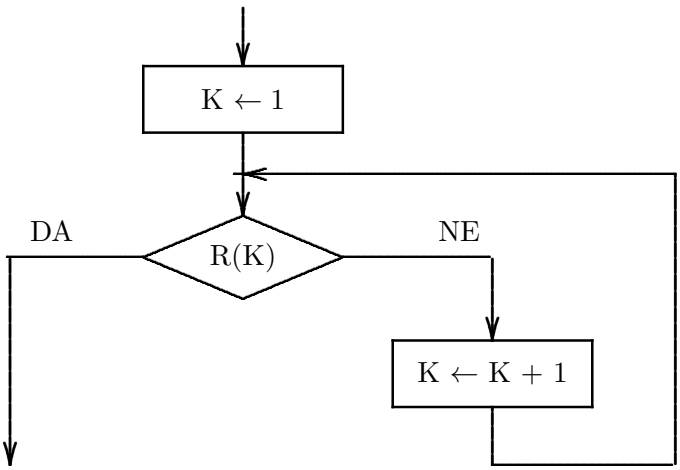
Janez je ugotovil:
Vsaka točka na desnem robu avtomobila ne opiše iste krivulje, kot jo opiše točka A. ($Tx \Leftrightarrow x$ je točka, ki opiše isto krivuljo kot točka A.)

b)

VSAK TE NE SOVRAŽI!
VSAK TE NITI NE POZNA.

($Sx \Leftrightarrow x$ te sovraži,
$Px \Leftrightarrow x$ te pozna)

2.



Kdaj se bo iztekel program?

3. Ali smo pravilno razumeli izjavo $\forall x(\neg\forall y(x = y))$. Če smo prebrali:
Vsako naravno število x ni enako vsakemu naravnemu številu y.

4. Preberi tale odstavek:

Recimo, da pomeni A izjavo "V trikotniku sta dve stranici enaki", B pa izjavo "V trikotniku sta dva kota enaka". Iz geometrije vemo, da je implikacija "Če sta v trikotniku dve stranici enaki, potem sta v trikotniku dva kota enaka" pravilna. Logična ekvivalenca $A \Rightarrow B \sim \neg B \Rightarrow \neg A$ pa nam pove, da je pravilna tudi implikacija "Če v trikotniku dva kota nista enaka, potem v trikotniku dve stranici nista enaki".

Ali je negacija izjave "V trikotniku sta dve stranici enaki" izjava "V trikotniku dve stranici nista enaki"?

5. Kaj pomeni za pisca naslednjega odstavka izraz "Vsi ... niso ..."?

"Vsi kmetje v Sloveniji niso plačniki kmečkega zavarovanja" – to pomeni, da nekateri kmetje so plačniki, drugi niso, torej niso vsi.

6. Pogovorno področje je množica naravnih števil. Katere funkcije oziroma relacije so definirane z naslednjimi izjavami:

a) $w = D(k, n) \Leftrightarrow \forall i(i \mid k \wedge i \mid n \Rightarrow i \mid w) \wedge w \mid k \wedge w \mid n$

b) $w = V(k, n) \Leftrightarrow k \mid w \wedge n \mid w \wedge \forall i(k \mid i \wedge n \mid i \Rightarrow w \leq i)$

c) $T(k, n) \Leftrightarrow \forall i(i \mid k \wedge i \mid n \Rightarrow i = 1)$

Naj bo P neka lastnost, ki velja za naravna števila in izpolnjuje pogoj $P(1) \wedge \forall i(P(i) \Rightarrow P(i + 1)$.
Ali velja $\forall i P(i)$?

⋆ 7. Dokaži

a) $\mathscr{A} \cup \mathscr{B} = \mathscr{B} \cup \mathscr{A}$
b) $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \mathscr{B} \cap \mathscr{A}$
c) $\mathscr{A} \cup \emptyset = \mathscr{A}$
č) $\mathscr{A} \cap \emptyset = \emptyset$
d) $\mathscr{A} \cup (\mathscr{B} \cap \mathscr{C}) = (\mathscr{A} \cup \mathscr{B}) \cap (\mathscr{A} \cup \mathscr{C})$
e) $(\mathscr{A} \cup \mathscr{B}) \cap \mathscr{A} = \mathscr{A}$
f) $\mathscr{A} \setminus (\mathscr{B} \cup \mathscr{C}) = (\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}) \cap (\mathscr{A} \setminus \mathscr{C})$
g) $\mathscr{A} \setminus (\mathscr{B} \cap \mathscr{C}) = (\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}) \cup (\mathscr{A} \setminus \mathscr{C})$
h) $\mathscr{A} \setminus (\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}) = \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$
i) $\mathscr{A} \cup \mathscr{B} = \mathscr{A} \cup (\mathscr{B} \setminus \mathscr{A})$
j) $\mathscr{A} \cap (\mathscr{B} \setminus \mathscr{A}) = \emptyset$

⋆ 8. Dokaži

a) $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A} \cup \mathscr{C} \subseteq \mathscr{B} \cup \mathscr{C}$
b) $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A} \cap \mathscr{C} \subseteq \mathscr{B} \cap \mathscr{C}$
c) $\mathscr{A} \cup \mathscr{B} = \mathscr{A} \cap \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A} = \mathscr{B}$
č) $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B} \cap \mathscr{C} \Leftrightarrow \mathscr{A} \subseteq \mathscr{B} \wedge \mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$
d) $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B} \Rightarrow (\mathscr{C} \setminus \mathscr{B}) \subseteq (\mathscr{C} \setminus \mathscr{A})$

⋆ 9. Dokaži ($\mathscr{A}' = \{x; x \notin \mathscr{A}\}$, $\mathscr{U}$ je pogovorno področje)

a) $(\mathscr{A} \cap \mathscr{B})' = \mathscr{A}' \cup \mathscr{B}'$
b) $(\mathscr{A} \cup \mathscr{B})' = \mathscr{A}' \cap \mathscr{B}'$
c) $(\mathscr{A}')' = \mathscr{A}$
č) $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}' = \mathscr{U}$
d) $\mathscr{A} \cap \mathscr{A}' = \emptyset$
e) $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} \subseteq \mathscr{C} \Leftrightarrow \mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}' \cup \mathscr{C}$

Rešitve:

Vaja (str. 42). Problem takih izjav, kot so:
Vsako naravno število ni praštevilo.
Ni vsako naravno število praštevilo.
Ni res, da je vsako naravno število praštevilo.
je obravnavan v že omenjeni knjižici J. Gradišnika in v "Slovenščini za vsakogar" istega avtorja (str. 294), od koder je vzeta naloga 5. Gradišnik zagovarja rešitev, ki bi se za prvi dve naši izjavi glasila $\exists x P(x) \wedge \exists \neg P(x)$.

Ena možnost je, da naštete izjave pomenijo isto, in sicer v prevodu v simboliko $\neg \forall P(x)$ ali, kar je isto, $\exists x \neg P(x)$. V rešitvah podobnih nalog bomo navajali takšno rešitev.

1. a) $\neg \forall x T x$ PP = množica točk na desnem robu avta
   b) $\neg \forall x S x$ PP = množica ljudi
   $\neg \forall x P x$
2. $\exists k R(k)$ PP = množica naravnih števil
3. Morali bi prebrati:

Nobeno naravno število ni takšno, da je enako vsakemu naravnemu številu.

4. "Ni res, da sta v trikotniku dve stranici enaki" pomeni "Nobeni dve stranici v trikotniku nista enaki".

V enakokrakem neenakostraničnem trikotniku imamo dve stranici enaki in imamo tudi dve neenaki stranici.

5. Če je pogovorno področje množica slovenskih kmetov, izjava "Vsi kmetje v Sloveniji niso plačniki zavarovanja" pomeni za pisca $\exists x Zx \wedge \exists x \neg Zx$, kjer Zx pomeni, da je kmet x zavarovan.

6. a) $D(k,n)$ je največji skupni delitelj števil k in n.

b) $V(k,n)$ je najmanjši skupni večkratnik števil k in n.

c) $T(k,n)$ pomeni, da sta si k in n tuji števili.

7. Pri nalogah, kjer nastopa prazna množica, moramo upoštevati $x \in \emptyset \Leftrightarrow 0$. To je sicer samo po sebi razumljivo, lahko pa to izpeljemo iz definicije prazne množice. Zaradi tavtologije $0 \Rightarrow p$ je treba dokazati le, da predpostavka $x \in \emptyset$ pripelje do protislovja.

Definicija: $\mathscr{X} = \emptyset \Leftrightarrow \forall x (x \notin \mathscr{X})$

Naj bo $x \in \emptyset$, potem velja $x \notin \emptyset$. Imamo torej protislovje.

a) $x \in \mathscr{A} \cup \mathscr{B} \sim x \in \mathscr{A} \vee x \in \mathscr{B} \sim x \in \mathscr{B} \vee x \in \mathscr{A} \sim x \in \mathscr{B} \cup \mathscr{A}$

c) $x \in \mathscr{A} \cup \emptyset \sim x \in \mathscr{A} \vee x \in \emptyset \sim x \in \mathscr{A}$

d) $x \in \mathscr{A} \cup (\mathscr{B} \cap \mathscr{C}) \sim x \in \mathscr{A} \vee x \in (\mathscr{B} \cap \mathscr{C}) \sim x \in \mathscr{A} \vee (x \in \mathscr{B} \wedge x \in \mathscr{C}) \sim$
$\sim (x \in \mathscr{A} \vee x \in \mathscr{B}) \wedge (x \in \mathscr{A} \vee x \in \mathscr{C}) \sim x \in \mathscr{A} \cup \mathscr{B} \wedge x \in \mathscr{A} \cup \mathscr{C} \sim$
$\sim x \in (\mathscr{A} \cup \mathscr{B}) \cap (\mathscr{A} \cup \mathscr{C})$

f) $x \in \mathscr{A} \setminus (\mathscr{B} \cup \mathscr{C}) \sim x \in \mathscr{A} \wedge x \notin (\mathscr{B} \cup \mathscr{C}) \sim x \in \mathscr{A} \wedge (x \notin \mathscr{B} \wedge x \notin \mathscr{C}) \sim$
$\sim (x \in \mathscr{A} \wedge x \notin \mathscr{B}) \wedge (x \in \mathscr{A} \wedge x \notin \mathscr{C}) \sim x \in \mathscr{A} \setminus \mathscr{B} \wedge x \in \mathscr{A} \setminus \mathscr{C} \sim$
$\sim x \in (\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}) \cap (\mathscr{A} \setminus \mathscr{C})$

h) $x \in \mathscr{A} \setminus (\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}) \sim x \in \mathscr{A} \wedge x \notin (\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}) \sim x \in \mathscr{A} \wedge (x \notin \mathscr{A} \vee x \in \mathscr{B}) \sim$
$\sim (x \in \mathscr{A} \wedge x \notin \mathscr{A}) \vee (x \in \mathscr{A} \wedge x \in \mathscr{B}) \sim 0 \vee x \in \mathscr{A} \cap \mathscr{B} \sim x \in \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$

j) $x \in \mathscr{A} \cap (\mathscr{B} \setminus \mathscr{A}) \sim x \in \mathscr{A} \wedge x \in \mathscr{B} \setminus \mathscr{A} \sim x \in \mathscr{A} \wedge x \in \mathscr{B} \wedge x \notin \mathscr{A} \sim$
$x \in \emptyset$

8. d)

1. $x \in \mathscr{A} \Rightarrow x \in \mathscr{B}$	predpostavka $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$
2.1 $x \in \mathscr{C} \setminus \mathscr{B}$	predpostavka pogojnega sklepa
2.2 $x \in \mathscr{C}$	2.1 poenostavitev
2.3 $x \notin \mathscr{B}$	2.1 poenostavitev
2.4 $x \notin \mathscr{A}$	2.3, 1 modus tolens
2.5 $x \in \mathscr{C} \setminus \mathscr{A}$	2.2, 2.4 združitev
2. $x \in \mathscr{C} \setminus \mathscr{B} \Rightarrow x \in \mathscr{C} \setminus \mathscr{A}$	2.1, 2.5 pogojni sklep
$\mathscr{C} \setminus \mathscr{B} \subseteq \mathscr{C} \setminus \mathscr{A}$	2 definicija razlike

9. a) $x \in (\mathscr{A} \cap \mathscr{B})' \sim x \notin \mathscr{A} \vee x \notin \mathscr{B} \sim x \in \mathscr{A}' \vee x \in \mathscr{B}' \sim x \in \mathscr{A}' \cup \mathscr{B}'$

c) $x \in (\mathscr{A}')' \sim x \notin \mathscr{A}' \sim \neg\neg x \in \mathscr{A} \sim x \in \mathscr{A}$

d) $x \in \mathscr{A} \cap \mathscr{A}' \sim x \in \mathscr{A} \wedge x \notin \mathscr{A} \sim 0 \sim x \in \emptyset$

1.3. Vrstni red kvantifikatorjev in pogojni kvantifikatorji

Vrstni red kvantifikatorjev. Preberimo naslednje pare izjav:

Za vsako naravno število obstaja vsaj eno število, ki je večje od prvega. $\forall x \exists y (y > x)$

Vsaj eno število je večje od vsakega naravnega števila. $\exists y \forall x (y > x)$

Za vsako naravno število x in za vsako naravno število y velja: $x < y$ ali $x \geq y$. $\forall x \forall y (x < y \vee x \geq y)$

Za vsako naravno število y in za vsako naravno število x velja: $x < y$ ali $x \geq y$. $\forall y \forall x (x < y \vee x \geq y)$

Za vsaj eno naravno število x in vsaj eno naravno število y velja: $x < y$. $\exists x \exists y (x < y)$

Za vsaj eno naravno število y in vsaj eno število x velja $x < y$. $\exists y \exists x (x < y)$

Izjavi prvega para govorita nekaj popolnoma različnega, prva je resnična, druga pa ne. Toda izjavi v drugih dveh parih govorita eno in isto. Splošno velja:

$$\forall x \forall y R(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x R(x, y)$$
$$\exists x \exists y R(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x R(x, y)$$

in še

$$\exists x \forall y R(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x R(x, y)$$

Toda implikacija v zadnji vrstici ne velja v obratni smeri, kar sledi iz prvega para izjav. Torej le istovrstne kvantifikatorje lahko zamenjamo.

Velja pa naslednja ekvivalenca

$$\forall x \exists y R(x, y) \Leftrightarrow \exists f \, \forall x R(x, f(x))$$

Recimo, da velja $\exists f \, \forall x R(x, f(x))$. To pomeni. da obstaja taka funkcija f_0, da velja $\forall x R(x, f_0(x))$. Potem za vsak x_0 iz pogovornega področja lahko najdemo tak y_0, da velja $R(x_0, y_0)$. Ta y_0 je lahko kar $f_0(x_0)$.

Da velja ekvivalenca tudi v obratni smeri, se prepričajmo z zgledom v množici $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, kjer je relacija R podana s tabelo, prav tako možna izbira za f_0.

R	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	0
a_2	0	0	1	0
a_3	1	1	1	1
a_4	1	1	0	0

x	$f_0(x)$
a_1	a_3
a_2	a_3
a_3	a_1
a_4	a_2

Vaja: Poišči še kakšno drugo primerno funkcijo.

Primer: Zapišimo nekaj izjav in njihovih negacij. Kot vemo, je samo ena od obeh izjav pravilna. Katera je to? Pogovorno področje je množica realnih števil.

(a) $\forall a \forall b(a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0)$

(a') $\exists a \exists b(a^2 + b^2 = 0 \wedge (a \neq 0 \wedge b \neq 0))$

(b) $\forall a \forall b(a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge b = 0)$

(b') $\exists a \exists b(a^2 + b^2 = 0 \wedge (a \neq 0 \vee b \neq 0))$

(c) $\forall a \forall b(ab = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge b = 0)$

(c') $\exists a \exists b(ab = 0 \wedge (a \neq 0 \vee b \neq 0))$

(č) $\forall a \forall b(ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0)$

(č') $\exists a \exists b(ab = 0 \wedge a \neq 0 \wedge b \neq 0)$

(d) $\forall a \forall b(a < b \Rightarrow a^2 < b^2)$

(d') $\exists a \exists b(a < b \wedge a^2 \geq b^2)$

(e) $\forall a \forall b(a^2 < b^2 \Rightarrow a < b)$

(e') $\exists a \exists b(a^2 < b^2 \wedge a \geq b)$

(f) $\forall a \forall b \exists c(a < b \Rightarrow a < c \wedge c < b)$

(f') $\exists a \exists b \forall c(a < b \wedge (a \geq c \vee c \geq b))$

Resnične so naslednje izjave:

(a) Če je vsota kvadratov 0, potem je vsaj eno število enako 0.

(b) Če je vsota kvadratov 0, potem sta obe števili enaki 0.

(c') Vzemimo $a = 0, b = 1$, potem je $ab = 0 \wedge (a \neq 0 \vee b \neq 0)$.

(č) Če je produkt enak 0, je vsaj en člen enak 0.

(d') Vzemimo $a = -2, b = -1$, potem je $a < b \wedge a^2 \geq b^2$, saj je $-2 < -1 \wedge 4 \geq 1$.

(e') Vzemimo npr. $a = -1, b = -2$. Dobimo $a^2 < b^2$ in $a \geq b$.

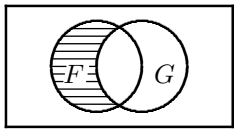
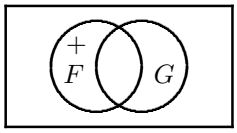
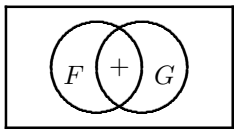
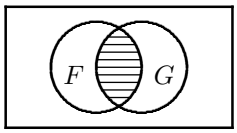
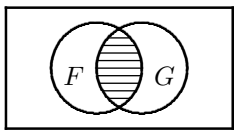
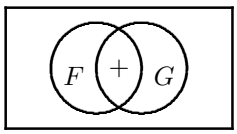
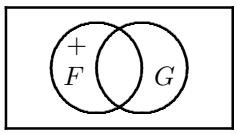
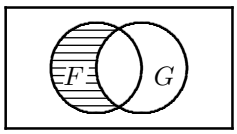
(f) Med dvema realnima številoma vedno lahko najdemo tretje, npr. $(a + b)/2$.

Izjave, v katerih govorimo o dveh lastnostih

Lastnosti zaznamujemo z F in G (npr. "biti sodo število" in "biti praštevilo"). K naslednjim izjavam pripišimo njihove simbolične prevode:

Vsak F je G.	$\forall x(F(x) \Rightarrow G(x))$
Vsaj en F je G.	$\exists x(F(x) \wedge G(x))$
Noben F ni G.	$\forall x(F(x) \Rightarrow \neg G(x))$
Vsaj en F ni G.	$\exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$

Z diagrami prikažemo resničnost teh izjav takole:

	resnična	neresnična
$\forall x(F(x) \Rightarrow G(x))$		
$\exists x(F(x) \wedge G(x))$		
$\forall x(F(x) \Rightarrow \neg G(x))$		
$\exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$		

Vaja: K vsaki izjavi v tabeli poišči njeno negacijo.

Pogojni kvantifikatorji. V matematiki imamo pogosto opraviti z več množicami hkrati. V tem primeru si izberemo spremenljivke, ki zavzemajo vrednosti iz prve množice, nato spet druge spremenljivke, ki zavzemajo vrednosti iz druge množice, itd. Še bolj pogosto pa zalogo vrednosti vedno znova omenjamo v vsaki izjavi.

Vaja: Katere množice so omenjene v naslednjih izjavah:

a) K vsakemu realnemu številu lahko najdemo racionalno število, ki je realnemu številu poljubno blizu.

b) Med dvema realnima številoma vedno obstaja racionalno število.

c) Razdalja dveh točk je realno število.

V simboličnem zapisovanju v teh primerih uporabljamo pogojna kvantifikatorja $\forall x \in \mathscr{S}$ ter $\exists x \in \mathscr{S}$, ki ju definiramo

$$\begin{aligned}(\forall x \in \mathscr{S})H(x) &\equiv \forall x(x \in \mathscr{S} \Rightarrow H(x)) \\ (\exists x \in \mathscr{S})H(x) &\equiv \exists x(x \in \mathscr{S} \wedge H(x))\end{aligned}$$

Pri njuni uporabi moramo paziti na to, da v prvi definiciji nastopa implikacija, v drugi pa konjunkcija. Namesto pogoja oblike $x \in \mathscr{S}$ pogosto uporabljamo tudi drugačne pogoje, npr. $x \leq 0, n > m$, pri čemer se kvantifikator nanaša na prvo spremenljivko, ki nastopa v izrazu. Po tem dogovoru lahko zapišemo izjavi a) in b) iz vaje takole

(1) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists q \in \mathbb{Q})|x - q| < \varepsilon$

(2) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x \neq y \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q})(x < q < y \vee y < q < x))$

Izjavo (2) lahko okrajšano zapišemo tudi takole

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(x \neq y \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q})x < q < y \vee y < q < x))$$

ali pa

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{x\})(\exists q \in \mathbb{Q})x < q < y \vee y < q < x))$$

Vaja: Izpolni naslednji tabeli, ki se nanašata na izjavi (1) in (2):

x	ε	q
$\sqrt{2}$	0,1	
$\sqrt{2}$	0,01	
$\sqrt{2}$	0,001	
$\sqrt{2}$	0,0001	
$\sqrt{2}$	0,00001	
$\sqrt{2}$	0,000001	

x	y	q
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2} - 0,1$	
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2} - 0,01$	
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2} - 0,001$	
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2} + 0,1$	
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2} + 0,01$	
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2} + 0,001$	

Primer: Zapišimo simbolično naslednjo izjavo:

Funkcija $\sin x$ ima vrednost 0 natanko takrat, ko je x oblike $k\pi$, kjer je k celo število.

Rešitev:

$\sin x = 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(x = k\pi)$

Ugotovi, zakaj ne ustreza prevod

$\sin x = 0 \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{Z})(x = k\pi)$

Naloge:

1. Zapiši v simboličnem jeziku, predtem določi področje pogovora.

a) Nekatere trgovine vzamejo prazne steklenice, nekatere ne. ($Tx \equiv x$ je trgovina, ki vzame prazne steklenice)

b) Če ni samorogov, potem so vsi samorogi črni. ($Ex \equiv x$ je samorog, $Čx \equiv x$ je črn)

c) Vsakdo govori o vremenu, toda nihče ničesar ne naredi o tem. ($Gx \equiv x$ govori o vremenu, $Nx \equiv x$ naredi nekaj v zvezi z vremenom)

č) Če je en kaznovan, potem stavkamo vsi. ($Kx \equiv x$ je kaznovan, $Sx \equiv x$ stavka)

d) Peter ni nikdar prestrašil nikogar. ($Pxyt \equiv x$ je prestrašil y v času t)

e) Nihče ne mara vsakogar. ($Rxy \equiv x$ ima rad y)

f) Vsi ljudje vse vedo. ($Vxt \equiv x$ ve, da velja t)

g) Človek je stopil na Mount Everest. ($Mx \equiv x$ je stopil na M. E.)

h) Človek je umrljiv. ($Ux \equiv x$ je umrljiv)

i) Drugi kiti se bojijo kitov ubijalcev. ($Kx \equiv x$ je kit, $Ux \equiv x$ je kit ubijalec, $Bxy \equiv x$ se boji y-a)

j) Vsakdo ljubi nekoga kdaj pa kdaj. Vsakdo ljubi nekoga vedno. ($Lxyt \equiv x$ ljubi y v času t)

2. Prevedi v pogovorno slovenščino naslednje simbolične stavke: PP (pogovorno področje) = ljudje

$Sxy \equiv$ oseba x sovraži osebo y
$Pxy \equiv$ oseba x ve za osebo y

a) $\forall x \exists y Sxy$
b) $\forall x \forall y (Sxy \Rightarrow Pxy)$
c) $\exists x \exists y Sxy$
č) $\forall x \exists y Pxy$
d) $\forall x \forall y (\neg Pxy \Rightarrow \neg Sxy)$
e) $\exists x Sxx$
f) $\exists x \forall y Sxy$
g) $\exists x \exists y (Sxy \Rightarrow \forall x \forall y Sxy)$
h) $\exists x \exists y Sxy \Rightarrow \forall x \forall y Sxy$
i) $\exists x \forall y Sxy \Rightarrow \exists x Sxx$
j) $\forall x \forall y (Pxy \Rightarrow Pyx)$
k) $\forall x \exists y (Pxy \Rightarrow Pyx)$
l) $\exists y \forall x Pxy$
m) $\exists y \forall x Sxy$

3. Zapiši simbolično naslednje izjave:

a) Vsako naravno število, ki ni večje od 10, je manjše od 11.
b) Vsaj eno naravno število, ki ni večje od 10, je manjše od 11.
e) Vsaj eno naravno število, ki ni večje od 10, ni manjše od 11.
č) Nobeno naravno število, večje od 10, ni manjše od 11.
⋆ d) Vsako naravno število, večje od 10, ni manjše od 11.
⋆ e) Vsako naravno število, večje od 10, ni manjše od 13.

⋆ 4. Naj bo pogovorno področje $\mathscr{M} = \{1 - 1/n; n \in \mathbb{N}\}$

Katera izjava velja?

a) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathscr{M})(y < x)$ ali $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathscr{M})(y \geq x)$
b) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathscr{M})(y < x)$ ali $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathscr{M})(y \geq x)$
c) $(\forall y \in \mathscr{M})(\exists x \in \mathbb{R})(y < x)$ ali $(\exists y \in \mathscr{M})(\forall x \in \mathbb{R})(y \geq x)$
č) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in \mathscr{M})(1 - x < \varepsilon)$ ali $(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in \mathscr{M})(1 - x \geq \varepsilon)$
d) $(\exists \varepsilon > 0)(\exists x \in \mathscr{M})(1 - x < \varepsilon)$ ali $(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in \mathscr{M})(1 - x \geq \varepsilon)$
e) $(\exists x \in \mathscr{M})(\forall \varepsilon > 0)(1 - x < \varepsilon)$ ali $(\forall x \in \mathscr{M})(\exists \varepsilon > 0)(1 - x \geq \varepsilon)$
f) $(\forall x \in \mathscr{M})(\exists y \in \mathscr{M})(x < y)$ ali $(\exists x \in \mathscr{M})(\forall y \in \mathscr{M})(x \geq y)$
g) $(\exists y \in \mathscr{M})(\forall x \in \mathscr{M})(x < y)$ ali $(\forall y \in \mathscr{M})(\exists x \in \mathscr{M})(x \geq y)$
h) $(\exists x \in \mathscr{M})(\forall y \in \mathscr{M})(x \leq y)$ ali $(\forall x \in \mathscr{M})(\exists y \in \mathscr{M})(x > y)$
i) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in \mathscr{M})(x < \varepsilon)$ ali $(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in \mathscr{M})(x \geq \varepsilon)$
j) $(\exists x \in \mathscr{M})(\forall \varepsilon > 0)(x < \varepsilon)$ ali $(\forall x \in \mathscr{M})(\exists \varepsilon > 0)(x \geq \varepsilon)$

⋆ 5. Naj bo pogovorno področje $\mathscr{A} = \{1 \pm 1/n; n \in \mathbb{N}\}$. Katere izjave držijo:

a) $\forall x \forall y(x < y \Rightarrow \exists z(x < z < y))$ ali $\exists x \exists y(x < y \wedge \forall z(\neg(x < z < y))$
b) $\forall x \forall y(x < 1 \wedge y > 1 \Rightarrow \exists z(x < z < y))$ ali $\exists x \exists y(x < 1 \wedge y > 1 \wedge \forall z \neg(x < z < y))$

6. Katere izjave so resnične:

a) $\cos x = 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(x = \pi/2 + k\pi)$
b) $\cos x = 0 \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{Z})(x = \pi/2 + k\pi)$
c) $\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(x = k\pi)$
č) $\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{Z})(x = k\pi)$
d) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall k \in \mathbb{Z})(x = k\pi)$
e) $(\forall k \in \mathbb{Z})(\exists x \in \mathbb{R})(x = k\pi)$
f) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{Z})(x \neq k\pi)$
g) $(\exists k \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{R})(x \neq k\pi)$

7. Katere izjave so resnične:

a) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}(x \cdot y = x)$
b) $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}(x \cdot y = x)$
c) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}(y^2 = x)$
č) $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}(y^2 = x)$
d) $\exists y \in \mathbb{R} \forall x > 0(y = \sin x)$
e) $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}(y = \sin x)$
f) $\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R}(y = \sin x)$
g) $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}(y \neq \sin x)$
h) $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}(\sin x \leq y)$
i) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}(\sin x \leq y)$

8. Področje spremenljivk x in y naj bo množica pisateljev, področje spremenljivk u, t množica knjig, p in q pa imata za zalogo množico založb. Oznaka $Zxup$ naj pomeni, da je pisatelj x napisal knjigo u, ki jo je izdala založba p.

Definiraj naslednji relaciji:

a) Pisatelj x je napisal knjigo $u(Nxu)$.
b) Založba p je izdala knjigo $u(Ipu)$.

Zapiši še naslednje izjave:

c) Neki pisatelj izdaja vse svoje knjige pri eni založbi.
č) Vsaka knjiga je izdana pri eni sami založbi.
d) Vsaka knjiga je izdana pri neki založbi.
e) Vsako knjigo je nekdo napisal.
f) Neka založba izdaja vsaj eno knjigo od vsakega pisatelja.
g) Nobene knjige ni napisalo več pisateljev.
h) Vsak pisatelj izda pri kakšni založbi vsako svojo knjigo.

Prevedi v pogovorni jezik:

i) $\forall x \exists u \forall p Zxup$
j) $\forall x \forall p \exists u Zxup$
k) $\forall x \exists u \exists p Zxup$
l) $Zxup \wedge Zxuq \Rightarrow p = q$
m) $\exists p \forall x \forall u(\exists q Zxuq \Rightarrow Zxup)$

9. Področje pogovora so ljudje. Uvedimo naslednje okrajšave: $Mx \equiv x$ je moški, $Rxy \equiv x$ je roditelj y-a, $Pxy \equiv x$ je prednik y-a. Zapiši definicije naslednjih lastnosti in relacij:

a) x je ženska. ($\check{Z}x$)
b) x je oče y-a (Oxy)
c) x je mati y-a (Sxy)
č) x je otrok y-a (Dxy)
d) x je sin y-a (Fxy)
e) x je brat y-a (Bxy)

⋆ 10. Področje pogovora je množica

$$\mathscr{M} = \{1 - 1/n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{1 + 1/n; n \in \mathbb{N} \wedge n > 1\} \cup \{3 - 1/n; n \in \mathbb{N}\}$$

Zapiši simbolično naslednje izjave z uporabo znakov $<$ in $=$.

a) V $\mathscr{M}$ ni največjega števila.
b) Vsako število ima neposrednega naslednika.
c) Vsako število ima neposrednega predhodnika.
č) Vsako število ima neposrednega naslednika, če le ni najmanjše.

Katere od teh izjav veljajo?

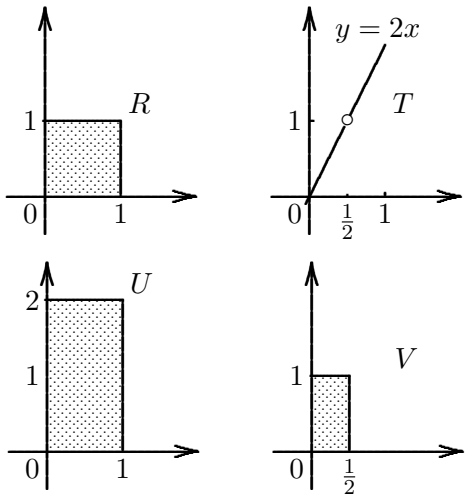
Definiraj funkcijo $S(x)$ = neposredni naslednik x-a (v $\mathscr{M}$).
Poišči takšno lastnost P, za katero bo veljalo $P(0) \wedge \forall x(P(x) \Rightarrow P(S(x)))$ in hkrati $\neg \forall x P(x)$.

Rešitve:

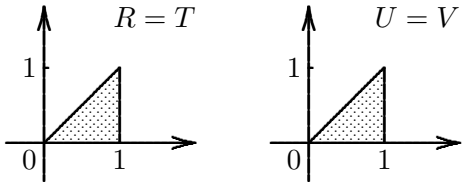
1. a) Če sta premici pravokotni na tretjo, sta vzporedni.
b) $\Leftrightarrow$ a)
c) Če neka premica seka eno od dveh vzporednic, seka tudi drugo.
č) Če je tretja premica vzporedna eni izmed dveh vzporednih premic, je vzporedna tudi drugi.
d) $\Leftrightarrow$ č)
e) Če sta premici vzporedni tretji premici, sta vzporedni tudi med seboj.
f) $\Leftrightarrow$ e) $\Leftrightarrow$ d)

2. a) Če je točka y med točko x in točko x, je y ista točka kot x.
b) Če je točka y med točkama x in u in je točka z med točkama y in u, je točka y med točkama x in z.
c) Če je točka y med x in z in hkrati med x in u in je y različna od x, potem je točka z med x in u ali pa je točka u med x in z.
č) Razdalja točk x in y je enaka razdalji točk y in x.
d) Če je razdalja točk x in y enaka razdalji točke z od nje same, potem je x isto kot y.
e) Če je točka t med x in u in je točka u med y in z, potem obstaja taka točka v, da je v med x in y in je točka t med z in v.
f) Za dane točke x, y, u in v lahko vedno najdemo točko z, tako da je točka y med x in z in da je razdalja točk y in z enaka razdalji točk u in v.
g) Obstajajo tri točke, ki niso na isti premici.
h) $Lxyz \Leftrightarrow Bxyz \vee Byxz \vee Bxzy$
i) $Kxyzt \Leftrightarrow Dxyyz \wedge Dyzzt \wedge Dzttx \wedge Dxzty$
j) $Rxyuv \Leftrightarrow \exists t(Bxyt \wedge y \neq t \wedge Dxtuv)$
k) $Vxyzt \Leftrightarrow \exists u \exists v \exists w \exists s(Bxuy \wedge Bxvy \wedge Bzwt \wedge Bzst \wedge Duvws \wedge Duwvs \wedge u \neq v)$

3. b)



c)



4. a) PP $= \{a_l, a_2\}$, resnična naj bo samo enostavna izjava Fa_1. Potem sta $\forall x Fx$ in $\forall x Gx$ obe neresnični, $\forall x Fx \Leftrightarrow \forall x Gx$ pa resnična. $Fa_1 \Leftrightarrow Ga_1$ ni resnična, zato $\forall x(Fx \Leftrightarrow Gx)$ ni resnična.

b) PP $= \{a_l, a_2\}$, resnični naj bosta samo Fa_1 in Ga_2. Potem sta resnični $\exists x Fx$ in $\exists x Gx$, ne pa $\exists x(Fx \Leftrightarrow Gx)$.

1.4. Kvantifikatorji in izjavne povezave

Eksistenčni pogoj in pogoj enoličnosti. V ravninski geometriji veljata naslednja dva izreka:

(1) Skozi poljubno točko v ravnini lahko potegnemo vsaj eno premico, ki je vzporedna dani premici.

(2) Skozi poljubno točko v ravnini lahko potegnemo kvečjemu eno premico, ki je vzporedna dani premici.

Prvi izrek nam zagotavlja eksistenco vsaj ene premice, drugi pa pravi, da je premica ena sama ali pa je sploh ni.

Oba izreka lahko združimo v enega:

(3) Skozi poljubno točko v ravnini lahko potegnemo natanko eno premico, ki je vzporedna dani premici.

Te tri izreke zapišimo simbolično, pri tem pa se dogovorimo, da bo zaloga spremenljivk $A, B, C, \ldots$ množica točk v ravnini, zaloga spremenljivk $p, q, r, \ldots$ pa množica vseh premic v isti ravnini.

(1') $\forall A \forall p \exists q (A \in q \wedge q \parallel p)$

(2') $\forall A \forall p \forall q \forall r (A \in q \wedge q \parallel p \wedge A \in r \wedge r \parallel p \Rightarrow q = r)$

Konjunkcijo obeh izjav okrajšamo

$\forall A \forall p \exists! q (A \in q \wedge q \parallel p)$

$\exists! x$ preberemo: "obstaja natanko en x, tako da ..."

Pogoju (1) rečemo **eksistenčni pogoj** in pogoju (2) **pogoj o enoličnosti**.

Vaja: Zapiši simbolično naslednje izjave, ustrezne eksistenčne pogoje in pogoje o enoličnosti in ugotovi resničnost ali neresničnost izjav.

a) V (1) in (2) zamenjamo vzporednost s pravokotnostjo.

b) Isto kot a), le da vzamemo prostorsko geometrijo.

c) Pogovorno področje je množica ljudi: Vsakdo ima natanko enega očeta.

Kako bi zapisali izjavo, da imata lastnost H natanko dve reči? Izjavo razbijemo na dva dela, da imata lastnost H vsaj dve reči in da imata lastnost H kvečjemu (največ) dve reči. Simbolično ju zapišemo takole:

$\exists x \exists y (x \neq y \wedge H(x) \wedge H(y)))$

$\forall x \forall y \forall z (H(x) \wedge H(y) \wedge H(z) \Rightarrow x = y \vee x = z \vee y = z)$

Važnejše zveze med kvantifikatorji in izjavnimi povezavami. V prejšnjih razdelkih smo spoznali povezavo med negacijo in kvantifikatorji, zdaj pa posvetimo nekaj pozornosti zvezam med kvantifikatorji in drugimi povezavami.

1. Konjunkcija. Veljata naslednji zvezi

(1) $\forall x (F(x) \wedge G(x)) \Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall x G(x))$

(2) $\exists x (F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow \exists x F(x) \wedge \exists x G(x))$

Namesto pretirane rabe oklepajev smo se domenili, da kvantifikatorja veže ta močneje od izjavnih povezav.

Prva izjava nam pove, da ima vsak x lastnosti F in G natanko tedaj, kadar ima vsak x lastnost F in vsak x lastnost G.

Zakaj pa v (2) ne velja implikacija v obratni smeri? Vzemimo, da F pomeni "biti sodo število" in G pomeni "biti liho število". Vemo, da je vsaj

eno število liho in da je vsaj eno število sodo, toda nobeno število ni hkrati sodo in liho.

2. Disjunkcija. Tu veljata naslednji zvezi:

(3) $\exists x(F(x) \vee G(x)) \Leftrightarrow \exists x F(x) \vee \exists x G(x)$

(4) $\forall x F(x) \vee \forall x G(x) \Rightarrow \forall x(F(x) \vee \forall x G(x))$

Zakaj ne velja implikacija (4) tudi v obratni smeri? Vemo, da je vsako število ali sodo ali liho, ni pa res, da je vsako število sodo ali pa vsako število liho.

Če označimo

$\mathscr{F} = \{x; F(x)\}$

$\mathscr{G} = \{x; G(x)\}$

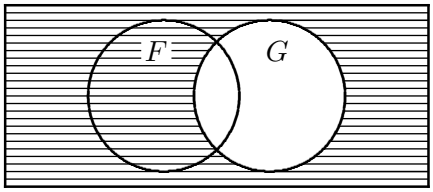
potem levo in desno stran izjave (3) lahko izrazimo v jeziku množic takole $\mathscr{F} \cup \mathscr{G} \neq \emptyset$ oziroma $\mathscr{F} \neq \emptyset \vee \mathscr{G} \neq \emptyset$. Obakrat povemo isto.

3. Implikacija. Za implikacijo sta značilni naslednji zvezi:

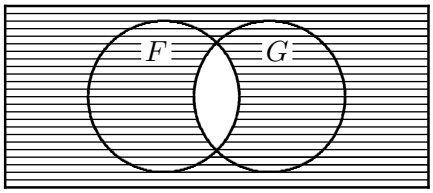
(5) $\forall x(G(x) \Rightarrow F(x)) \Rightarrow (\forall x G(x) \Rightarrow \forall x F(x))$

(6) $\forall x(G(x) \Rightarrow F(x)) \Rightarrow (\exists x G(x) \Rightarrow \exists x F(x))$

Prepričajmo se o veljavnosti izjave (5). Recimo, da sta izjavi (a) $\forall x G(x)$ in (b) $\forall x(G(x) \Rightarrow F(x))$ resnični. Zaradi (a) je diagram takle



Zaradi (b) osenčimo še del področja G, ki je izven F.



Področje F vsebuje vse elemente, torej res velja $\forall x F(x)$.

Vaja: Preveri resničnost izjave (6).

Kadar želimo pokazati, da neka izjava ni nujno veljavna, pri tem mislimo na to, da pri primerni izbiri pogovornega področja ter pomenov za imena, relacijske in funkcijske znake dosežemo, da dana izjava ni resnična. Taki interpretaciji izjave rečemo *protiprimer* za dano izjavo.

Primer: Poiščimo protiprimer za izjavi

(a) $(\forall x G(x) \Rightarrow \forall x F(x)) \Rightarrow \forall x(G(x) \Rightarrow F(x))$

(b) $(\exists x G(x) \Rightarrow \exists x F(x)) \Rightarrow \forall x(G(x) \Rightarrow F(x))$

Za pogovorno področje vzemimo množico z dvema elementoma $\{a_1, a_2\}$. Lastnost G naj ima samo a_1, lastnosti F pa nobeden izmed elementov. Izjava $\forall x G(x)$ ne velja, toda izjava $\forall x G(x) \Rightarrow \forall x F(x)$ je resnična. Izjava $\forall x(G(x) \Rightarrow F(x))$ pa ni resnična, saj $G(a_1)$ velja, $F(a_1)$ pa ne. Torej izjava (a) ni resnična.

Za drugo interpretacijo vzamemo, da velja $G(a_1)$ in $F(a_2)$, ne pa $G(a_2)$ in $F(a_1)$. Potem veljajo $\exists x G(x), \exists x F(x), \exists x G(x) \Rightarrow \exists x F(x)$. Toda (b) ne velja, ker $\forall x(G(x) \Rightarrow F(x))$ ne velja.

Naloge:

1. V ravninski geometriji spremenljivke $A, B, C, \ldots$ zaznamujejo točke; $p, q, r, \ldots$ pa premice. Preberi naslednje izjave in ugotovi njihovo resničnost!

a) $p \perp q \wedge r \perp q \Rightarrow p \parallel r$

b) $\exists q(p \perp q \wedge r \perp q) \Rightarrow p \parallel r$

c) $p \parallel q \wedge \exists! A(A \in s \wedge A \in p) \Rightarrow \exists! B(B \in s \wedge B \in q)$

č) $p \parallel q \Rightarrow \forall r(r \parallel p \Rightarrow r \parallel q)$

d) $p \parallel q \Rightarrow (r \parallel p \Rightarrow r \parallel q)$

e) $p \parallel q \wedge r \parallel p \Rightarrow r \parallel q$

f) $\exists p(p \parallel q \wedge r \parallel p) \Rightarrow r \parallel q$

Primerjaj prejšnje zglede in ugotovi, pod katere izmed veljavnih izjav sodijo:

$\forall x(H(x) \Rightarrow P) \Leftrightarrow \exists x H(x) \Rightarrow P$ $\qquad$ $\exists x(H(x) \Rightarrow P) \Leftrightarrow \forall x H(x) \Rightarrow P$

$\exists x(P \Rightarrow H(x)) \Leftrightarrow P \Rightarrow \exists x H(x)$ $\qquad$ $\forall x(P \Rightarrow H(x)) \Leftrightarrow P \Rightarrow \forall x H(x)$

2. Pogovorno področje je množica točk neke dane ravnine. Oznaka $Bxyz$ naj pomeni, da je točka y med točkama x in z, vštevši možnost, da je y ena izmed x oziroma z ali da vse tri sovpadajo. Oznaka $Dxyzw$ naj pomeni, da je razdalja točk x in y enaka razdalji točk z in w. Preberi naslednje izjave in se prepričaj o njihovi resničnosti:

a) $\forall x \forall y(Bxyx \Rightarrow x = y)$

b) $\forall x \forall y \forall z \forall u(Bxyu \wedge Byzu \Rightarrow Bxyz)$

c) $\forall x \forall y \forall z \forall u(Bxyz \wedge Bxyu \wedge x \neq y \Rightarrow Bxzu \vee Bxuz)$

č) $\forall x \forall y Dxyyx$

d) $\forall x \forall y \forall z(Dxyzz \Rightarrow x = y)$

e) $\forall t \forall x \forall y \forall z \forall u \exists v (Bxtu \wedge Byuz \Rightarrow Bxvy \wedge Bztv)$
f) $\forall x \forall y \forall u \forall v \exists z (Bxyz \wedge Dyzuv)$
g) $\exists x \exists y \exists z (\neg Bxyz \wedge \neg Byzx \wedge \neg Bzxy)$

Zapiši definicije naslednjih relacij:

h) Točke x, y in z ležijo na isti premici ($Lxyz$),
i) Točke x, y, z in t tvorijo kvadrat ($Kxyzt$).
j) Razdalja točk x in y je manjša od razdalje točk u in v.
k) Točke x in y ter z in t ležijo na vzporednih daljicah.

⋆ 3. Dani sta relaciji R in T na množici realnih števil. Relaciji U in V sta definirani takole:

$Uxy \Leftrightarrow \exists z (Rxz \wedge Tzy)$
$Vxy \Leftrightarrow \exists z (Txz \wedge Rzy)$

Predstavi v koordinatnem sistemu relacije R, T, U in V tako, da osenčiš množico točk (x, y), za katere velja dana relacija. Vsako relacijo predstavi posebej.

a) $Rxy \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1, \quad Txy \Leftrightarrow 0 \leq y \leq x \wedge 0 \leq x \leq 1$
b) $Rxy \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1, \quad Txy \Leftrightarrow y = 2x$
c) $Rxy \Leftrightarrow 0 \leq y \leq x \wedge 0 \leq x \leq 1, \quad Txy \Leftrightarrow Rxy$

⋆ 4. Poišči protiprimere za naslednje izjave

a) $(\forall x F(x) \Leftrightarrow \forall x G(x)) \Rightarrow \forall x (F(x) \Leftrightarrow G(x))$
b) $(\exists x F(x) \Leftrightarrow \exists x G(x)) \Rightarrow \forall x (F(x) \Leftrightarrow G(x))$

5. Katere izjave so resnične? Pogovorno področje je množica realnih števil.

a) $\forall a \forall b ((a+b)^2 = a^2 + b^2 \vee (a+b)^2 \neq a^2 + b^2)$
b) $\forall a \forall b ((a+b)^2 = a^2 + b^2) \vee \forall a \forall b ((a+b)^2 \neq a^2 + b^2)$
c) $\forall a \forall b ((a+b)^2 = a^2 + b^2) \vee \exists a \exists b ((a+b)^2 \neq a^2 + b^2)$
č) $\forall a (a \geq 17 \vee a < 17)$
d) $\forall a (a \geq 17) \vee \forall a (a < 17)$
e) $\forall a (a \geq 17) \vee \exists a (a < 17)$
f) $\forall a \forall b (a < b \Rightarrow a = b)$
g) $\forall a \forall b (a < b => a \neq b)$
h) $\exists a \exists b (a < b \wedge a \neq b)$
i) $\exists a \exists b (a < b \wedge a = b)$

6. Zapiši simbolično naslednje definicije:

a) Funkcija f je soda, če velja za vsak x iz njenega definicijskega območja $f(-x) = f(x)$. Kdaj funkcija f ni soda?

b) Funkcija f narašča na intervalu I, če iz $x_1 < x_2$ sledi $f(x_1) < f(x_2)$ za poljubna x_1 in x_2 z danega intervala. Kdaj f ne narašča na intervalu I?

c) Funkcija f povsod narašča, če iz $x_1 < x_2$ sledi $f(x_1) < f(x_2)$ za poljubni števili x_1 in x_2.

č) Premica p seka premico q, če imata natanko eno skupno točko. Kdaj se torej ne sekata?

d) Množica realnih števil M je navzgor omejena, če obstaja število, ki ni manjše od nobenega števila iz M. Kdaj množica M ni omejena?

e) Množica točk M v ravnini je krožnica s središčem v točki S in radijem r, če so v njej vse točke, ki so vse oddaljene od S za r.

f) Množica točk M je krožnica, če obstaja takšna točka S in število r, da je množica M krožnica s središčem v S in radijem r.

g) Simetrala daljice je množica vseh točk, ki so enako oddaljene od obeh krajišč daljice.

Rešitve:

1. a) Če sta premici pravokotni na tretjo, sta vzporedni.

b) $\Leftrightarrow$ a)

c) Če neka premica seka eno od dveh vzporednic, seka tudi drugo.

č) Če je tretja premica vzporedna eni izmed dveh vzporednih premic, je vzporedna tudi drugi.

d) $\Leftrightarrow$ č)

e) Če sta premici vzporedni tretji premici, sta vzporedni tudi med seboj.

f) $\Leftrightarrow$ e) $\Leftrightarrow$ d)

2. a) Če je točka y med točko x in točko x, je y ista točka kot x.

b) Če je točka y med točkama x in u in je točka z med točkama y in u, je točka y med točkama x in z.

c) Če je točka y med x in z in hkrati med x in u in je y različna od x, potem je točka z med x in u ali pa je točka u med x in z.

č) Razdalja točk x in y je enaka razdalji točk y in x.

d) Če je razdalja točk x in y enaka razdalji točke z od nje same, potem je x isto kot y.

e) Če je točka t med x in u in je točka u med y in z, potem obstaja taka točka v, da je v med x in y in je točka t med z in v.

f) Za dane točke x, y, u in v lahko vedno najdemo točko z, tako da je točka y med x in z in da je razdalja točk y in z enaka razdalji točk u in v.

g) Obstajajo tri točke, ki niso na isti premici.

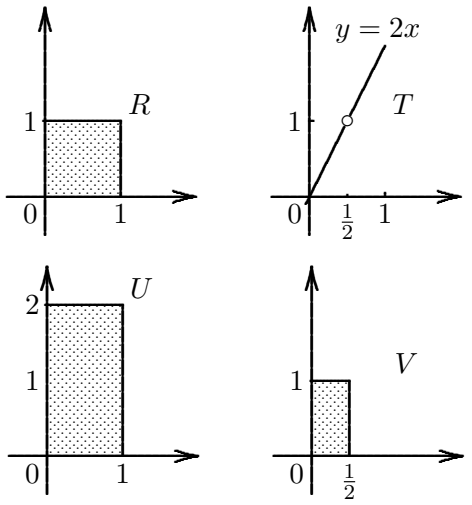
h) $Lxyz \Leftrightarrow Bxyz \vee Byxz \vee Bxzy$

i) $Kxyzt \Leftrightarrow Dxyyz \wedge Dyzzt \wedge Dzttx \wedge Dxzty$

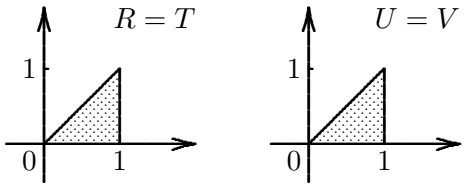
j) $Rxyuv \Leftrightarrow \exists t(Bxyt \wedge y \neq t \wedge Dxtuv)$

k) $Vxyzt \Leftrightarrow \exists u \exists v \exists w \exists s(Bxuy \wedge Bxvy \wedge Bzwt \wedge Bzst \wedge Duvws \wedge Duwvs \wedge u \neq v)$

3. b)



c)



4. a) PP $= \{a_l, a_2\}$, resnična naj bo samo enostavna izjava Fa_1. Potem sta $\forall xFx$ in $\forall xGx$ obe neresnični, $\forall xFx \Leftrightarrow \forall xGx$ pa resnična. $Fa_1 \Leftrightarrow Ga_1$ ni resnična, zato $\forall x(Fx \Leftrightarrow Gx)$ ni resnična.

b) PP $= \{a_l, a_2\}$, resnični naj bosta samo Fa_1 in Ga_2. Potem sta resnični $\exists xFx$ in $\exists xGx$, ne pa $\exists x(Fx \Leftrightarrow Gx)$.

2. Še o sklepanju

Spoznavamo vlogo kvantifikatorjev pri sklepanju.

Tokrat bomo pogledali, kako ravnamo s kvantifikatorji pri sklepanju.

Dokažimo, da obstaja takšen človek, da, če on pije, pijejo vsi ljudje.

Dokaz. Bodisi vsi ljudje pijejo ali pa to ni res. Recimo, da vsi pijejo. Vzemimo poljubno osebo, recimo Janeza. Ker vsi pijejo, je torej res tudi,

da, če Janez pije, pijejo vsi. Torej obstaja takšen človek, da vsi pijejo, če on pije. Recimo, da ni res, da vsi pijejo. Potem vsaj en človek ne pije. Recimo, da je to Peter. Potem velja: če Peter pije, pijejo vsi. Torej obstaja tak človek, da pijejo vsi, če on pije. V obeh primerih trditev velja. Zapišimo dokaz v simbolični obliki:

$Px \equiv x$ pije
$j =$ Janez
$p =$ Peter

Dokaz:

1. $\forall yPy \vee \neg\forall yPy$	tavtologija $p \vee \neg p$
2.1 $\forall yPy$	predpostavka pogojnega sklepa
2.2 $Pj \to \forall yPy$	2.1, če je p resnica, potem je tudi $q \Rightarrow p$
2.3 $\exists x(Px \to \forall yPy)$	2.2
2. $\forall yPy \Rightarrow \exists x(Px \Rightarrow \forall yPy)$	2.1, 2.3, pogojni sklep
3.1 $\neg\forall yPy$	predpostavka pogojnega sklepa
3.2 $\exists y\neg Py$	3.1 $(\neg\forall yPy \Leftrightarrow \exists y\neg Py)$
3.3 $\neg Pp$	3.2
3.4 $Pp \Rightarrow \forall yPy$	3.3, če je q neresnica, potem velja $q \Rightarrow r$
3.5 $\exists x(Px \Rightarrow \forall yPy)$	3.4
3. $\neg\forall yPy \Rightarrow \exists x(Px \Rightarrow \forall yPy)$	3.1, 3.5, pogojni sklep
$\exists x(Px \Rightarrow \forall yPy)$	1, 2, 3, analiza primerov

Pravilo, po katerem smo iz vrstice 2.2 dobili vrstico 2.3, imenujemo **pravilo uvedbe** (ali **priključitve**) **eksistencialnostnega kvantifikatorja**. Le-to pravi, da, če nekaj velja za danega posameznika ali dano reč iz pogovornega področja, potem obstaja nekdo (ali nekaj), za katerega to velja. Isto pravilo smo uporabili, ko smo iz 3.4 dobili 3.5.

Pravilo, po katerem smo dobili $\neg Pp$ iz $\exists y\neg Py$, je **pravilo opustitve eksistencialnega kvantifikatorja**, ki pravi, da, če obstaja nekdo, ki ima dano lastnost (ali nekaj, kar ima dano lastnost), potem ima to lastnost neka oseba (ali reč) n. Pri tem pa mora biti ime n novo ime – to je, da ne nastopa ne v predpostavkah, ne v sklepu in ne v dokazu pred uporabo tega pravila.

Vaja: Dopolni analizo dokaza.

Zakaj je v pravilu opustitve eksistencialnega kvantifikatorja potrebna ta omejitev? Če bi jo opustili, bi lahko dokazali pravilnost takega sklepanja:

Nekateri košarkarji so visoki.		$\exists x(Kx \wedge Vx)$
Janez je košarkar.	ali simbolično	Kj
Janez je visok.		Vj

"Dokaz:"

1. $\exists x(Kx \wedge Vx)$	predpostavka
2. $Kj \wedge Vj$	sledi iz 1, opustitev eksistencialnostnega kvantifikatorja (napaka!)
3. Vj	2, poenostavitev

Ime j je nastopalo v simboličnem zapisu predpostavk.

Če ne bi upoštevali omejitve, bi lahko dokazali tudi pravilnost sklepanja:

$$\frac{\text{Vsaj en košarkar ni visok.}}{\text{Noben košarkar ni visok.}} \qquad \frac{\exists x(Kx \wedge \neg Vx)}{\neg\exists x(Kx \wedge Vx)}$$

"Dokaz:"

1. $\exists x(Kx \wedge \neg Vx)$	predpostavka
2.1 $\exists x(Kx \wedge Vx)$	predpostavka
2.2 $Ke \wedge \neg Ve$	1, opustitev eksistencialnostnega kvantifikatorja
2.3 $Ke \wedge Ve$	2.1, opustitev eksistencialnostnega kvantifikatorja (napaka!)
2.4 Ve	2.3, poenostavitev
2.5 $\neg Ve$	2.2, poenostavitev
2.6 $Ve \wedge \neg Ve$	2.4, 2.5, združitev
2. $\neg\exists x(Kx \wedge Vx)$	2.1, 2.6, reductio ad absurdum

Primer: Dokažimo, da iz izjave $\exists x\forall y Lxy$ sledi izjava $\forall y\exists x Lxy$. To pomeni, da predpostavki $\exists x\forall y Lxy$ in $\neg\forall y\exists x Lxy (\Leftrightarrow \exists y\forall x\neg Lxy)$ pripeljeta do protislovja:

1. $\exists x\forall y Lxy$	predpostavka
2. $\exists y\forall x\neg Lxy$	predpostavka
3. $\forall y Lay$	opustitev eksistencialnostnega kvantifikatorja
4. $\forall x\neg Lxb$	opustitev eksistencialnostnega kvantifikatorja
5. Lab	3
6. $\neg Lab$	4

Pravilo, po katerem smo dobili iz vrstice 3 vrstico 5 ter iz vrstice 4 vrstico 6, imenujemo **pravilo opustitve univerzalnostnega kvantiftkatorja**. Le-to pravi, če nekaj velja za vse, velja tudi za dano reč.

Vaja: Dopolni analizo dokaza.

Primer: Dokažimo $\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0\ \forall x(|x-1| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x}-1| < \varepsilon)$ tako, da pokažemo, da je negacija te izjave v protislovju z matematičnimi zakoni.

1. $\exists\varepsilon > 0\,\forall\delta > 0\,\exists x > 0\ (|x-1| < \delta \wedge |\sqrt{x}-1| \geq \varepsilon)$
   negacija dane izjave
2. $\forall\delta > 0\,\exists x > 0\ (|x-1| < \delta \wedge |\sqrt{x}-1| \geq \varepsilon_0)$
   1, opustitev eksistencialnostnega kvantifikatorja
3. $\exists x > 0(|x-1| < \varepsilon_0 \wedge |\sqrt{x}-1| \geq \varepsilon_0)$
   2, opustitev univerzalnostnega kvantifikatorja
4. $|x_0-1| < \varepsilon_0 \wedge |\sqrt{x_0}-1| \geq \varepsilon_0$
   3, opustitev eksistencialnostnega kvantifikatorja
5. $|x_0-1| < \varepsilon_0$ — 4, poenostavitev
6. $|\sqrt{x_0}-1| \geq \varepsilon_0$ — 4, poenostavitev
7. $|\sqrt{x_0}-1| \cdot |\sqrt{x_0}+1| < \varepsilon_0$ — 5, $(|a^2-b^2| = |a-b| \cdot |a+b|)$
8. $|\sqrt{x_0}-1| < \varepsilon_0$ — 7, $(\sqrt{x_0}+1 > 1)$

Naloge:

1. Simbolično zapiši argumentiranje in zaznamuj pravilnost ali nepravilnost.

a) Vsak cepec bi znal narediti tole. Jaz tega ne znam, torej nisem cepec.

b) Če tole nalogo sploh lahko kdo reši, potem jo lahko reši vsak matematik. Kovač je matematik, toda tega ne zna rešiti. Torej ta problem zaenkrat ni rešljiv.

c) Vsak, ki zmore rešiti to nalogo, je matematik. Kovač tega ne zna. To pomeni, da Kovač ni matematik.

č) Vsak, ki zmore rešiti to nalogo, je matematik. Noben matematik ne zmore te naloge. Naloga je torej zaenkrat nerešljiva.

d) Če kakršnokoli število strogo med 1 in 101 deli 101, potem vsako praštevilo, manjše od 11, deli 101. Nobeno praštevilo, manjše od 11, ne deli 101, torej nobeno število med 1 in 101 ne deli 101.

e) Kdorkoli je razširjal to laž, je nenačelen in koristoljuben. Kovač ni koristoljuben. Kranjc ni nenačelen. Torej ne prvi ne drugi nista razširjala te laži.

f) Vsakdo ljubi sam sebe. Torej vsakdo nekoga ljubi.

g) Mrtveci ne krvavijo. Janez krvavi, torej ni mrtev.

h) Krvavim. Mrtev sem. Torej ni res, da mrtvi ne krvavijo.

2. Naslednje dokaze zapiši v simbolični obliki in vsak korak skušaj utemeljiti.

a) Bodisi vsaj en človek pije ali pa nihče ne pije. Če nihče ne pije, tudi Janez ne pije. Ker nihče ne pije, je res, da, če vsaj en pije, Janez pije. Se pravi, da obstaja tak človek, ki pije, če pije vsaj en človek. Po drugi strani, naj obstaja človek, ki pije. Recimo mu Peter. Potem je res, da Peter pije, če vsaj nekdo pije. Spet drži, da obstaja tak človek, za katerega velja: če vsaj en človek pije, potem pije tudi ta človek.

Zadnji stavek je torej dokazan, saj velja v obeh primerih.

b) Vsi se bojijo Petra. Peter se boji le mene. Torej sem jaz Peter.

Dokaz: Ker se vsi bojijo Petra, se Peter boji tudi samega sebe. Toda Peter se boji le mene. Torej sem jaz Peter.

c) Če k deli t, t deli m, potem k deli m.

Dokaz. Po definiciji obstajata takšni števili n in p, da je $t = nk$ in $m = pt$. Potem je $m = pnk$. Torej obstaja takšno število r (namreč pn), da je $m = rk$. Po definiciji k deli m.

3. Dokaži:

a) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x > 0 \; (|x-4| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x}-2| < \varepsilon)$
b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x > 0 \; (|x-1| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x}-1| < \varepsilon)$
c) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x > 0 \; (|x-2| < \delta \Rightarrow |2x-4| < \varepsilon)$

4. Dokaži s protislovjem, da iz

a) $\forall x L(x, f(x))$ sledi $\forall x \exists y Lxy$
b) $\forall x(Px \Rightarrow Qx)$ in $\exists x Px$ sledi $\exists x Qx$
c) $\forall x(Px \Rightarrow Qx)$ in $\forall x Px$ sledi $\forall x Qx$

$\star$ 5. Z Vennovimi diagrami se prepričaj v pravilnost oziroma nepravilnost sklepov:

a) $\forall x(Mx \Rightarrow Px)$, $\forall x(\neg Sx \Rightarrow Mx)$ / $\forall x(\neg Sx \Rightarrow Px)$

b) $\forall x(Px \Rightarrow Mx)$, $\exists x(Sx \wedge Mx)$ / $\exists x(Sx \wedge Px)$

c) $\forall x(\neg Px \Rightarrow Mx)$, $\forall x(Sx \Rightarrow Mx)$ / $\exists x(Sx \wedge \neg Px)$

č) $\forall x(Px \Rightarrow Mx)$, $\exists x(Mx \wedge Sx)$ / $\exists x(Sx \wedge Px)$

d) $\forall x(Px \Rightarrow Mx)$, $\forall x(Sx \Rightarrow Mx)$ / $\forall x(Sx \Rightarrow Px)$

e) $\forall x(Px \Rightarrow Mx)$, $\exists x(Sx \wedge \neg Mx)$ / $\exists x(Sx \wedge \neg Px)$

⋆ 6. Zapiši v simbolični obliki sklepanje in ugotovi njegovo pravilnost oziroma nepravilnost:

a) Vsak volčjak je sesalec. / Vsak volčjak je pes. / Vsak pes je sesalec.

b) Vsak pes je sesalec. / Nobena riba ni pes. / Nobena riba ni sesalec.

c) Vsak pes je sesalec. / Nobena riba ni sesalec. / Nobena riba ni pes.

č) Nobena komedija ni tragedija. / Nekatera Shakespearova dela so komedije. / Nekatera Shakespearova dela niso tragedije.

Rešitve:

1. a) $\forall x(Cx \Rightarrow Nx), \neg Nj \models \neg Cj$ — Sklep je pravilen.
   b) $\exists x Rx \Rightarrow \forall x(Mx \rightarrow Rx), Mk \wedge \neg Rk \models \neg \exists x Rx$ — Sklep je pravilen.
   c) $\forall x(Rx \Rightarrow Mx), \neg Rk \models Mk$ — Sklep ni pravilen.
   č) $\forall x(Rx \Rightarrow Mx), \neg \exists x(Mx \wedge Rx) \models \neg \exists x Rx$ — Sklep je pravilen.
   d) $\exists x(1 < x < 101 \wedge x \mid 101) \Rightarrow \forall y(Py \wedge y < 11 \Rightarrow y \mid 101)$, $\neg \exists z(Pz \wedge z < 11 \wedge z \mid 101) \models \neg \exists x(1 < x < 101 \wedge x \mid 101)$ — Sklep ni pravilen.
   e) $\forall x(Lx \Rightarrow Nx \wedge Kx), \neg Kk, \neg Nr \models \neg Lk \wedge Lr$ — Sklep je pravilen.
   f) $\forall x Lxx \models \forall x \exists y Lxy$ — Sklep je pravilen.
   g) $\forall x(Mx \Rightarrow \neg Kx), Kj \models \neg Mj$ — Sklep je pravilen.
   h) $Kj, Mj \models \neg \forall x(Mx \Rightarrow \neg Kx)$ — Sklep je pravilen.

2. a)

1.	$\exists x Px \vee \neg \exists x Px$	tavtologija $p \vee \neg p$
2.	$\forall x \neg Px$	predpostavka za analizo primerov ($\Leftrightarrow \neg \exists Px$)
3.	$\neg Pj$	2, opustitev $\forall$
4.	$\exists x Px \Rightarrow Pj$	2, $(0 \Rightarrow q)$
5.	$\exists y(\exists x Px \Rightarrow Py)$	4, uvedba $\exists$
6.	$\exists x Px$	predpostavka pogojnega sklepa
7.	Pp	6, opustitev 3
8.	$\exists x Px \Rightarrow Pp$	7, $(q \Rightarrow 1)$
9.	$\exists y(\exists x Px \Rightarrow Py)$	8, uvedba 3
10.	$\exists y(\exists x Px \Rightarrow Py)$	1, 2, 9, analiza primerov

b) $\forall x Bxp, \forall x(Bpx \Rightarrow x = j) \models p = j$

Dokaz. $\forall x(Bpx \Rightarrow x = j), \forall x Bxp, Bpp, Bpp \Rightarrow p = j, p = j$

c) $k \mid t, t\ m \models k \mid m$

Dokaz: $k \mid t, t \mid m, \exists n(t = nk), \exists p(m = pt), t = n_0 k, m = p_0 t, m = (p_0 n_0)k, \exists r(m = rk), k \mid m.$

3. a)

1.	$\exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x > 0(\lvert x-4\rvert < \delta \wedge \lvert\sqrt{x}-2\rvert \geq \varepsilon)$	negacija dane izjave
2.	$\forall \delta > 0\, \exists x > 0(\lvert x-4\rvert < \delta \wedge \lvert\sqrt{x}-2\rvert \geq \varepsilon_0)$	1, opustitev $\exists$
3.	$\exists x > 0(\lvert x-4\rvert < 2\varepsilon_0) \wedge \lvert\sqrt{x}-2\rvert \geq \varepsilon_0)$	2, opustitev $\forall$
4.	$\lvert x_0 - 4\rvert < 2\varepsilon_0$	3, opustitev $\exists$ in poenost.
5.	$\lvert\sqrt{x_0}-2\rvert \geq \varepsilon_0$	3, opustitev $\exists$ in poenost.
6.	$\lvert\sqrt{x_0}-2\rvert(\sqrt{x}+2) < 2\varepsilon_0$	4
7.	$\lvert\sqrt{x_0}-2\rvert < \dfrac{2\varepsilon_0}{\sqrt{x_0}+2} < \varepsilon_0$	6
8.	$\varepsilon_0 < \varepsilon_0$	5, 7, protislovje

4. a)

1.	$\forall x L(x, f(x))$	predpostavka
2.	$\exists x \forall y \neg Lxy$	negacija sklepa
3.	$\forall y \neg Lx_0 y$	2, opustitev $\exists$
4.	$L(x_0, f(x_0))$	1, opustitev $\forall$
5.	$\neg L(x_0, f(x_0))$	3, opustitev $\forall$

b) Dokaz. $\forall x(Px \Rightarrow Qx), \exists x Px, \forall x \neg Qx, Px_0, Px_0 \Rightarrow Qx_0, Qx_0, \neg Qx_0$

c) Dokaz. $\forall x(Px \Rightarrow Qx), \forall x Px, \exists x \neg Qx, \neg Qx_0, Px_0, Px_0 \Rightarrow Qx_0, Qx_0$

III. Naloge

1. Izjave

1. Razmislimo o pravilnosti naslednjih pravil:

$$
\begin{array}{llll}
 & & \neg\neg & \dfrac{\neg\neg A}{A} \\[2ex]
\wedge & \dfrac{A\wedge B}{\begin{array}{c}A\\B\end{array}} & \neg\wedge & \dfrac{\neg(A\wedge B)}{\neg A \,\big|\, \neg B} \\[2ex]
\vee & \dfrac{A\vee B}{A \,\big|\, B} & \neg\vee & \dfrac{\neg(A\vee B)}{\begin{array}{c}\neg A\\ \neg B\end{array}} \\[2ex]
\Rightarrow & \dfrac{A\Rightarrow B}{\neg A \,\big|\, B} & \neg\Rightarrow & \dfrac{\neg(A\Rightarrow B)}{\begin{array}{c}A\\ \neg B\end{array}}
\end{array}
$$

a) Za pravila $\wedge, \neg\vee, \neg\Rightarrow$ dokaži: Izjava nad črto je resnična natanko takrat, ko sta resnični obe izjavi pod črto. To so pravila *podaljševanja*.

b) Za pravila $\neg\wedge, \vee, \Rightarrow$ dokaži: Izjava nad črto je resnična natanko takrat, ko je resnična vsaj ena izjava pod črto. To so *razvejitvena* pravila.

c) Kako preberemo pravilo $\neg\neg$?

č) Zapiši ustrezni pravili za ekvivalenco.

d) Zapiši analogna pravila za izjavne povezave $\veebar, \uparrow, \downarrow$.

e) Pravila v drugem stolpcu so pravila zanikanja. Zapiši pravili zanikanja za izjavi 0 in 1.

2. Vpelji oznake za enostavne izjave:

$p \equiv$ Janez je dober učenec.
$q \equiv$ Janez je dober športnik.
$r \equiv$ Peter je dober učenec.
$s \equiv$ Peter je dober športnik.

in zapiši naslednje sestavljene izjave:

a) Janez je dober učenec in dober športnik.

b) Janez je dober učenec, morda pa tudi dober športnik.

c) Janez je dober učenec, ne pa tudi športnik.

č) Janez je slab učenec, a je dober športnik.

d) Janez ni ne dober učenec ne dober športnik.

e) Oba, Janez in Peter, sta dobra učenca.

f) Ni res, da sta Janez in Peter dobra učenca.

g) Oba nista dobra učenca.

h) Noben ni dober učenec.

i) Ni res, da oba nista dobra učenca.
j) Če je Peter dober učenec, potem je slab športnik.
k) Oba sta dobra učenca, a slaba športnika.
l) Janez in Peter nista dobra učenca.
m) Janez je dober učenec ali dober športnik.
n) Janez je ali dober učenec ali dober športnik.
o) Ni res, da Janez in Peter nista dobra učenca.
p) Ni res, da je Janez dober učenec ali dober športnik.
r) Ni res, da je Janez ali dober učenec ali dober športnik.
s) Janez in Peter sta dobra učenca ali dobra športnika.
š) Ni res, da sta Janez in Peter dobra učenca ali dobra športnika.
t) Janez in Peter sta dobra učenca ali pa nista dobra športnika.
u) Ni res, da sta Janez in Peter dobra učenca ali pa slaba športnika.

3. Funkcije f, g in h so definirane takole:
$y = f(x) \iff (x \geq 0 \Rightarrow y = x) \wedge (x < 0 \Rightarrow y = -x)$
$y = g(x) \iff (x \leq 1 \Rightarrow y = -2x) \wedge (x > 1 \Rightarrow y = -(x-1)^2 - 2)$
$y = h(x) \iff (x \leq 0 \Rightarrow y = x^2 + 1) \wedge (x > 0 \Rightarrow y = -x^2 + 1)$
a) Izračunaj: $f(-1), f(1), f(0), g(-2), g(0), g(1), g(2)$,
$h(-1), h(0), h(1), f(f(1)), g(g(-1)), g(g(1)), g(g(2))$,
$h(h(-1)), h(h(0)), h(h(1)), g(h(-1)), h(g(2))$.
b) Reši enačbe: $h(x) = 2, h(x) = -1, g(x) = 2, g(x) = 0$.
c) Zapiši definicije funkcij: $h(h(x)), g(g(x)), g(h(x))$ na način, na kakršen so definirane funkcije f, g in h.

4. a) Zapiši resničnostno tabelo za izjavno povezavo:

ČE A, POTEM B, SICER C

b) Zapiši za to povezavo definicijo preko osnovnih povezav.
c) Zapiši za to povezavo analogno pravilo kot v nalogi 1.
č) Zapiši s to povezavo definicije funkcij $f(x), g(x), h(x), g(g(x)), h(h(x))$ iz prejšnje naloge.

5. Iščemo vse možnosti za vrednosti enostavnih izjav, za katere so resnične vse izjave $A_1, A_2, \ldots, A_n, n \geq 1$. En postopek za rešitev te naloge je metoda resničnostnih tabel. Drugi postopek je izgradnja semantičnega drevesa za dano množico izjav:
1. Izjave dane množice zapišemo drugo pod drugo.
2.1. Označimo za mrtve tiste veje, ki vsebujejo protislovje, to je, v njih se pojavlja kakšna izjava skupaj s svojo negacijo.
2.2. Odkljukamo tiste točke, v katerih nastopajo enostavne izjave ali njihove negacije.

2.3. Končamo, če so vse veje mrtve.

3.1. Poiščemo vejo, ki ni označena za mrtvo in vsebuje neodkljukano točko.

3.2. Izberemo izjavo v neodkljukani točki.

3.3. Razširimo vse žive veje, ki vsebujejo to točko in to točko odkljukamo. Pri tem uporabljamo pravila iz naloge 1.

3.3.1. Pri pravilih $\neg\neg, \wedge, \neg\vee, \neg \Rightarrow$ vejo podaljšamo za eno ali dve izjavi.

3.3.2. Pri pravilih $\neg\wedge, \vee, \Rightarrow$ vsako živo vejo razcepimo v dve novi veji.

3.4. Končamo, če ni nobene žive veje z neodkljukano točko.

3.5. Vrnemo se na točko 2.1.

a) Kakšna je dana množica izjav, če končamo v 2.3?

b) Kakšna je množica izjav, če končamo v 3.4?

c) Dano je semantično drevo:

$$\begin{array}{c} \neg(p \vee q \Rightarrow p \wedge q) \\ p \vee q \\ \neg(p \wedge q) \\ \begin{array}{cc|cc} p & & & q \\ \neg p & \neg q & & \neg p \mid \neg q \end{array} \end{array}$$

Katera pravila smo uporabili? Katere veje so mrtve?

č) Za katere nabore vrednosti enostavnih izjav so resnične naslednje množice izjav:

1. $p \Rightarrow \neg q, p \Rightarrow \neg r, q \vee r, \neg r \Rightarrow p$
2. $p \Rightarrow q, q \Rightarrow (r \vee s), \neg r, \neg s, p$
3. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

d) Dokaži, da so naslednje izjave tavtologije, tako da pokažeš, da drevo, ki ga začnemo z negacijo dane izjave, vsebuje le mrtve veje. Algoritem se torej konča v točki 2.3.

$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

$\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p \wedge \neg q$

e) Iste naloge reši z metodo resničnostnih tabel.

6. V poljskem zapisu pišemo "CAB" namesto "$A \Rightarrow B$" in "NA" namesto "$\neg A$".

Zanimivost tega zapisa je, da ne potrebuje oklepajev.

a) Zapiši prve štiri izjave prejšnje naloge d) v poljskem zapisu.

b) Zapiši na običajen način izjavo: $CNNpp, CpNNp, CCNpNqCqp$,

$CCCpqpp, CpCNpq$.

c) Ali so naslednji izrazi zapisane izjave: $CCCppp, NCpqr, Cpqp$?

7.[1] Vse naloge se dogajajo na otoku resničnikov in neresničnikov. Resničniki vedno govorijo resnico, neresničniki pa jo vedno zanikajo. Drugih prebivalcev na otoku ni.

a) Recimo, da oseba A reče: "Če sem jaz resničnik, potem je tudi B." Ali lahko ugotovimo, kaj sta A in B?

b) Recimo, da A reče: "Če sem jaz resničnik, potem je $2 + 2 = 4$." Ali je A resničnik ali ni?

c) Kaj pa, če A reče: "Če sem jaz resničnik, potem je $2 + 2 = 5$."?

č) In še:

A: "Če je B resničnik, potem sem jaz neresničnik."

d) Tokrat nastopajo trije otočani A, B in C.

A: "B je resničnik."

B: "Če je A resničnik, potem je tudi C."

Ali lahko določimo, kaj so A, S in C?

e) Otočan A izjavi: "Na otoku je zlato, če in samo če sem jaz resničnik." Kaj lahko sklepamo?

f) Pogovarjata se otočana A in B.

A izjavi: "Vsaj eden od naju je neresničnik."

Kaj sta A in B?

g) Kaj pa, če A izjavi: "Jaz sem neresničnik ali pa je B resničnik."

h) Recimo, da A izjavi: "Ali sem jaz neresničnik ali pa je $2 + 2 = 5$." Kaj lahko sklepamo?

8. Andrej, Boris in Cene vsak dan kosijo v restavraciji, naročijo pa ali pečenko ali šunko.

1. Če je Andrej šunko, potem je Boris pečenko.
2. Šunko naroči Andrej ali Cene, vendar pa ne oba.
3. Oba, Boris in Cene, ne jesta hkrati pečenke.

Kdo je lahko včeraj jedel šunko, danes pa pečenko?

9. Janez, Peter in Tomaž so osumljeni prestopka. Na sodišču so dali naslednje izjave:

Janez: Peter je kriv, Tomaž ni kriv.

Peter: Če je Janez kriv, potem je kriv tudi Tomaž.

Tomaž: Jaz nisem kriv, toda vsaj eden od drugih dveh je kriv.

---

[1] Veliko število takšnih nalog kot je 7 in tudi precej težjih najdemo v knjigi R. Smullyana *What is the name of this book?*

Iz te knjige sta vzeti tudi nalogi 15 v 3. pogl. in 5 v 5. pogl.

a) Ali so vse tri izjave lahko hkrati resnične?
b) Izjava enega sledi iz izjave drugega. O katerih govorimo?
c) Če so vsi trije nedolžni, kdo je lagal?
č) Če so vse izjave resnične, kdo je kriv, kdo ne?
d) Kdo je kriv, če krivi lažejo, nedolžni pa govorijo resnico?

2. Enakovredne izjave

1. Kakšna je razlika v rabi znakov $\Leftrightarrow, \equiv, \sim$?
Janez in Peter, oba poštenjaka, sta v torek izrekla dve trditvi:

Janez: Danes je četrtek, če in samo če je jutri petek.
Danes je četrtek, če in samo če je jutri sobota.

Peter: Danes je četrtek, če in samo če je jutri petek.
Ni res, da je danes četrtek, če in samo če je jutri sobota.

Kako je to mogoče?

2. Pravila iz naloge 1.1. imajo razen pravila $\neg\neg$ eno od oblik

$$\frac{A}{\begin{array}{l}A_1\\A_2\end{array}} \qquad \frac{B}{B_1 \mid B_2}$$

Ti dve pravili lahko zapišemo $A \sim A_1 \wedge A_2$ in $B \sim B_1 \vee B_2$.
a) Zapiši kot ekvivalence pravila za povezave $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ in $\Leftrightarrow$ iz naloge 1. 1.
b) Zapiši kot ekvivalence pravila za $\veebar$, $\uparrow$, $\downarrow$.

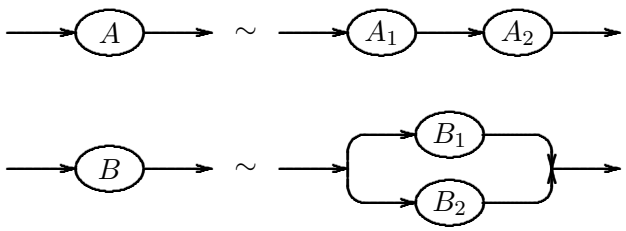
3. Dokaži, da velja:
$(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow C) \sim (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$
Torej lahko prvo definicijo iz naloge 3.1. zapišemo tudi:
$y = f(x) \Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge y = x) \vee (x < 0 \wedge y = -x)$
a) Katera funkcija je definirana z zgornjo definicijo?
b) Zaznamujmo z $F(\ldots|g(x)|\ldots)$ neenačbo ali enačbo, v kateri nastopa izraz $g(x)$ pod absolutno vrednostjo. Reševanje pogoja F začnemo takole:
$F(\ldots|g(x)|\ldots) \sim (g(x) \geq 0 \wedge F(\ldots g(x)\ldots)) \vee (g(x) < 0 \wedge F(\ldots -(g(x))\ldots))$
Razreši pogoje: $|2x+7| = 5, |x+2| + |x+7| = 7$,
$|2|x| + 4| = 5, ||2x-6| - 5| > 1$.
c) Iste naloge reši tako, da zgradiš drevo, ki se začenja takole:

$$F(\ldots|g(x)|\ldots)$$

$g(x) \geq 0$	$g(x) < 0$
$F(\ldots g(x)\ldots)$	$F(\ldots -g(x)\ldots)$

4. Dokaži z resničnostnimi tablicami ali semantičnimi drevesi:
   a) $\neg(A \Leftrightarrow B) \sim \neg A \Leftrightarrow B \sim A \Leftrightarrow \neg B$
   b) $A \Leftrightarrow B \sim B \Leftrightarrow A$
   c) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C \sim A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$
   č) $A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow B) \sim A$
   d) $\neg A \Leftrightarrow \neg B \sim A \Leftrightarrow B$

5. Pravila iz naloge 2 lahko uporabimo za konstrukcijo omrežja, ki pripada dani izjavi:



   a) Poišči omrežja za izjave:

   $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r, (p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r), (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$

   b) Poišči omrežje za izjavo:

   $(\neg j \Leftrightarrow (p \wedge \neg t)) \wedge (\neg p \Leftrightarrow (j \Rightarrow t)) \wedge (\neg t \Leftrightarrow (\neg t \wedge (j \vee p)))$

   Kdaj to omrežje prevaja tok?

6. Pokaži, da so izjave iz naloge 5.d v 1. poglavju tavtologije, tako da načrtaš omrežje za njihove negacije in pokažeš, da takšno vezje ne prevaja toka. Kako bi to dokazal, če bi načrtal vezje za prvotno izjavo?

7. Konstruiraj semantično drevo za dano izjavo. Če drevo vsebuje vsaj eno živo vejo (to je takrat, ko izjava ni protislovje), potem je začetna izjava logično ekvivalentna izjavi, ki jo dobimo takole:

   1. V vsaki živi veji zberemo enostavne izjave ali njihove negacije, ki pripadajo veji, in jih povežemo s konjunkcijami.

   2. Tako dobljene izjave povežemo z disjunkcijami.

a) Uporabi zgornji postopek na izjavah:

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r, (p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$,

$(p \Rightarrow \neg q) \wedge (p \Rightarrow \neg r) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg r \Rightarrow p)$

b) Pogoje, ki si jih dobil pri reševanju posameznih delnih nalog v nalogi 7 v 1. poglavju, pretvori v ekvivalentne pogoje po zgornjem postopku.

Kaj opaziš?

8. Konstruiraj omrežje za kontrolo dvigala. Imejmo le pritličje in eno nadstropje. Omejimo se samo na gibanje navzdol. Pogoja sta:

1. Zunanja vrata dvigala v pritličju in prvem nadstropju morajo biti zaprta (d_1, d_2). Dvigalo je v prvem nadstropju (s).

2.1. Oseba je v dvigalu (f), notranja vrata so zaprta (d) in oseba vključi dvigalo (b_2)·

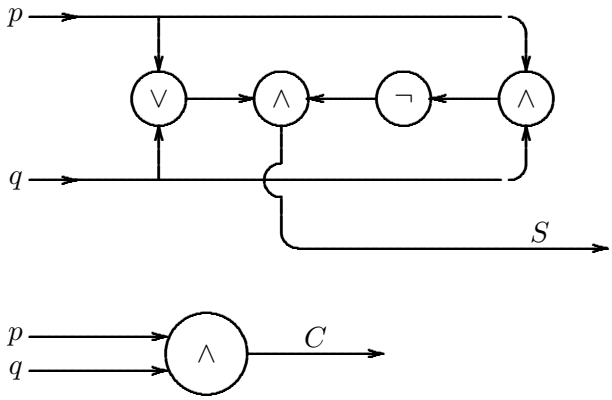
Ali:

2.2. Osebe ni v dvigalu $(\neg f)$, dvigalo je poklicano iz pritličja (b_1).

9. Tiste izjave iz naloge 2 v 1. poglavju, v katerih nastopa negacija, zapiši tako, da znak za negacijo nastopa le ob enostavnih izjavah.

10. Pri konstruiranju računalnika imajo poseben pomen logična vezja. Vrednost sestavljene izjave je funkcija vrednosti enostavnih izjav, ki vstopajo v sestavljeno izjavo.

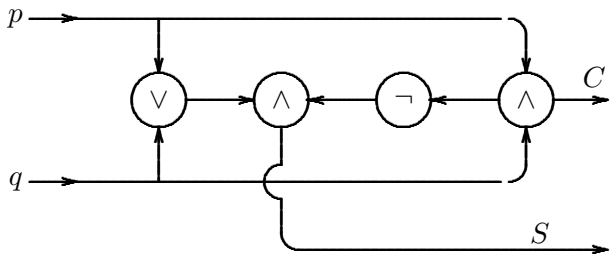
a) Zapiši funkciji, ki ju realizirata vezji na slikah.



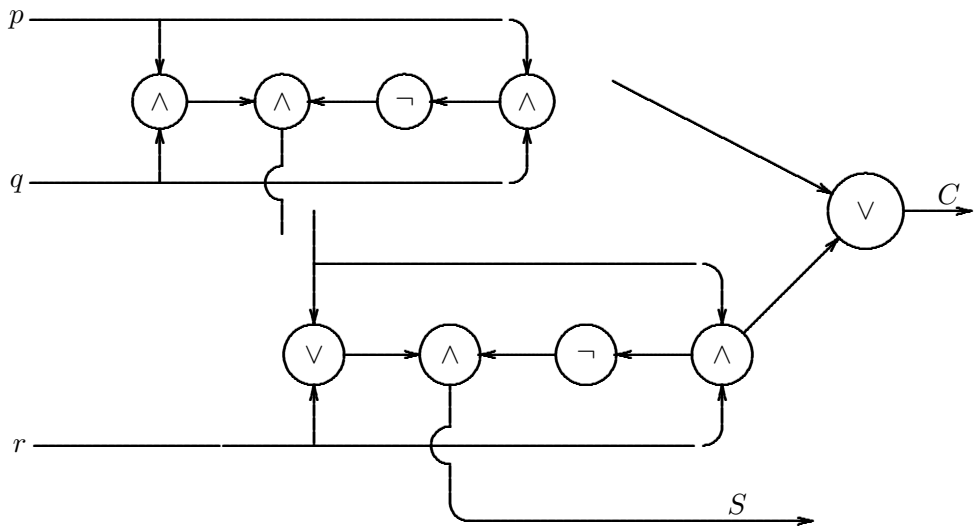
Zapiši še tabelo funkcij v obliki:

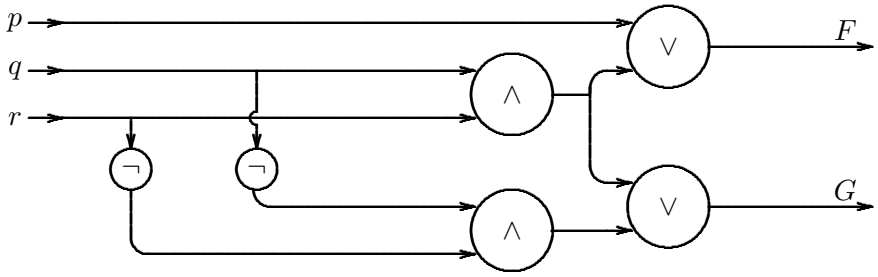
p	q	S	C

b) Kako bi obe logični vezji združili v eno samo (z dvema izhodoma)? (Glej sliko.)



c) Zapiši funkcije in tabele, ki jih predstavljata logični vezji na slikah.





č) Poišči sestavljeno izjavo, ki ji ustreza naslednja resničnostna tabela:

p	q	r	$f(p,q,r)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

3. Sklepanje

1.

a) V čem je razlika med izjavo $A \Rightarrow B$ in izjavo $A \models B$?

b) Vsi trije, Janez, Peter in Tomaž, so poštenjaki. V torek je vsak izrekel dve trditvi:

Janez: Če je danes sreda, potem je jutri četrtek.
Če je danes sreda, potem je jutri petek.

Peter: Če je danes sreda, potem je jutri četrtek.
Ni res, da je jutri petek, če je danes sreda.

Tomaž: Ni res, da je jutri četrtek, če je danes sreda.
Ni res, da je jutri petek, če je danes sreda.

Ali je to mogoče?

2. Če moramo dokazati, da velja $\mathscr{A} \models B$, to storimo tako, da pokažemo, da semantično drevo za množico $\mathscr{A} \cup \{\neg B\}$ vsebuje le zaprte (tj. mrtve) veje.

a) Dokaži veljavnost sklepov:

$A, A \Leftrightarrow B \models B$
$A, \neg A \Leftrightarrow B \models \neg B$
$A, B \models A \Leftrightarrow B$
$\neg A, \neg B \models A \Leftrightarrow B$
$A \vee B, \neg B \models A$
$A, B \models A \vee B$
$A, B \models A \wedge B$
$\neg A, B \models \neg(A \wedge B)$
$A \Rightarrow B, \neg B \models \neg A$
$A \models B \Rightarrow A$
$\neg A \models A \Rightarrow B$
$A, \neg B \models \neg(A \Rightarrow B)$

b) Kateri sklepi so pravilni:

$A \Rightarrow B, B \Rightarrow (C \vee D), \neg C, A \models D$
$A \Rightarrow B, A \vee C \models B \vee C$
$A \Rightarrow B, A \vee C \models A \Rightarrow C$
$\neg D \Rightarrow P, D \models P$
$A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \wedge B \models C$

$Q \vee P, Q \Rightarrow \neg R \models Q \vee (\neg R \Leftrightarrow P)$
$S \Leftrightarrow T, T \Rightarrow (S \Rightarrow Q), \neg R \Rightarrow \neg P \models P \vee S \Rightarrow R \vee Q$
$A \wedge B \Rightarrow C, \neg D \Rightarrow \neg(E \Rightarrow F), C \Rightarrow (E \Rightarrow F) \models A \Rightarrow (B \Rightarrow D)$
$A \Rightarrow B, C \Rightarrow \neg B, (D \Rightarrow \neg A) \Rightarrow C \models \neg E \vee A \Rightarrow (E \Rightarrow D)$

3. Dokaži:
a) $A \Rightarrow \neg B, A \Leftrightarrow \neg C, B \vee C \not\models B$
$A \Rightarrow \neg B, A \Leftrightarrow \neg C, B \vee C \not\models \neg B$
b) $A \Leftrightarrow A \wedge B, A \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B) \not\models A$
$A \Leftrightarrow A \wedge B, A \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B) \not\models \neg A$
$A \Leftrightarrow A \wedge B, A \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B) \models B$
c) $A \Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \models A$
$A \Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \models \neg B$
č) $A \Leftrightarrow A \wedge B, A \Leftrightarrow \neg(A \Leftrightarrow B) \models \neg A$
$A \Leftrightarrow A \wedge B, A \Leftrightarrow \neg(A \Leftrightarrow B) \models \neg B$

d) Janez in Peter sta brata dvojčka. Janez je zagrešil kaznivo dejanje. Vemo še, da vsaj eden od dvojčkov vedno laže. Sodnik vpraša enega od bratov, ali je Janez. Ta pritrdi in sodnik vpraša isto še drugega. Ta odgovori "DA" ali "NE" in sodnik ve, kateri je Janez. Kateri je torej Janez?

e) Neki logik je obiskal otok resničnikov in neresničnikov. Srečal je dve osebi: A-ja in B-ja. Vprašal je osebo A, ali sta oba resničnika. A je odgovoril na vprašanje, toda to še ni bilo dovolj, da bi logik ugotovil, kaj sta otočana. Nato je še enkrat vprašal osebo A, tokrat, ali sta oba istega tipa (to je oba resničnika ali oba neresničnika). Spet je odgovoril A ("DA" ali "NE") in logik je vedel, kaj sta. Kaj sta A in B?

4.[1] V naslednjih nalogah prevedi tekst v logično simboliko in analiziraj veljavnost sklepov:

a) Če ji on ne bi povedal, tega ne bi nikoli zvedela. Če ga ni vprašala, ji on ni povedal.

Toda ona je zvedela. Torej ga je vprašala.

b) Če ga bodo profesorji podprli, bo guverner podpisal dani odlok. Če ga bodo podprli kmetje, bo dal veto. Očitno je, da lahko ne podpiše ali pa ne da veta. Torej bo izgubil glasove profesorjev ali kmetov.

c) Rekel je, da bo prišel, če ne bo deževalo (njegovim besedam se da verjeti). Toda dežuje. Torej ne bo prišel.

č) Kdor pripada naši družbi, je hraber in resnicoljuben. On ni član naše družbe.

[1] Naloge 4, 5 in 6 so sposojene iz knjige enega vodilnih svetovnih logikov S. C. Kleeneja *Mathematical Logic*.

Torej on ni hraber ali pa ni resnicoljuben.

d) Če je on avtor tega, potem je neumen ali nedosleden. Toda on ni neumen niti nedosleden. Torej on ni avtor tega.

e) Če je osumljeni izvršil to krajo, potem je bila dobro pripravljena ali pa je imel soudeleženca. Toda če je bila kraja dobro pripravljena, potem bi bilo, če bi imel soudeleženca, veliko več ukradenega. Torej je osumljeni nedolžen.

f) Če bo prišlo do splošnega miru, potem bo nastala depresija (nezaposlenost itd.), razen če bo prišlo do preoboroževanja ali pa do ogromnih planov v kulturi, varstvu okolja itd. Ne da se dogovoriti o ciljih takih planov. Torej, če bo mir in ne bo depresije, potem bo gotovo prišlo do preoboroževanja.

g) Če ne bomo nadaljevali politike ohranitve cen, bomo izgubili glasove kmetov. Če bomo nadaljevali s to politiko, bo prišlo do hiperprodukcije, razen če preidemo na kontrolo proizvodnje. Brez glasov kmetov ne bomo ponovno izbrani. Torej, če bomo izvoljeni in ne bomo kontrolirali proizvodnje, bo hiperprodukcija.

h) Če je:

$$x + 3 = \sqrt{3 - x} \tag{1}$$

potem je $x^2 + 6x + 9 = 3 - x$. Toda $x^2 + 6x + 9 = 3 - x$ velja natanko tedaj, kadar je $(x + 6)(x + 1) = 0$, oziroma $x = -6$ ali $x = -1$. Torej, samo -6 in -1 sta lahko korena enačbe (1), oziroma če velja (1), potem je $x = -1$ ali $x = -6$.

i) Kaj če v h) zamenjamo sklep s "torej, -6 in -1 sta korena enačbe (1)", to je $x = -6$ implicira (1) in $x = -1$ implicira (1).

5. Neki klub je imel naslednja pravila:

1) Člani finančnega odbora morajo biti izbrani med člani splošne direkcije.

2) Nihče ne more biti hkrati član splošne direkcije in knjižničnega sveta, a da ni član finančnega odbora.

3) Noben član knjižničnega sveta ne more biti član finančnega odbora. Poenostavi pravila!

6. V spodnjih izvajanjih lahko manjkajo predpostavke ali zaključki. Dodaj jih tako, da dobiš pravilne sklepe.

a) Osumljeni ne more biti kriv, če ni bil v New Yorku prvega januarja ob 18^{h}. Toda on je bil takrat v Madisonu. Torej on ni kriv.

b) Nimamo nobenih dokazov njegove krivde. Torej je on nedolžen.

c) Nimamo nobenih dokazov za njegovo krivdo. Torej mora biti oproščen.

č) Če sneži, je težko voziti motor. Če bo težko voziti motor, bom zamudil, če seveda ne bom prej odšel. Sneži. Torej moram iti prej.

7. Poišči vse sestavljene izjave X, za katere velja:

$$r \Rightarrow X, I \Rightarrow \neg X, r \Rightarrow \neg I \models \neg r \wedge \neg I$$

Koliko je različnih rešitev pri pogoju, da velja $r \Rightarrow \neg I$?

8. Poišči tako izjavo X, da bo množica

$$\{s \Leftrightarrow X, \neg(s \wedge p)\}$$

protislovna, množica $\{s \Leftrightarrow X\}$ pa ne.

9. Poišči tako izjavo X, v kateri nastopajo enostavne izjave p, q in r, da bo izjava

$$(p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow \neg(X \vee (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow X$$

tavtologija.

10. [1] Inšpektorja Craiga so poklicali, da bi pregledal nekaj umobolnic, za katere so sumili, da v njih ni vse v redu. V bolnišnicah so bili le pacienti in zdravniki. Nekateri od ljudi so bili popolnoma prisebni, tako da so vedno govorili resnico, ostali pa popolnoma neprisebni, tako da so vedno govorili neresnico.

a) V prvi bolnišnici je Craig govoril ločeno z Jonesom in Smithom. "Kaj veste o Smithu?" je vprašal Craig Jonesa.

"Zdravnik v bolnišnici je," je odgovoril Jones.

Nekaj minut kasneje je Craig vprašal Smitha o Jonesu. "Pacient je," je odgovoril Smith.

V tej bolnišnici je nekaj narobe. Kaj?

b) V drugi bolnišnici je Craig srečal človeka, ki je izjavil nekaj takšnega, da je Craig sklepal, da gre za prisebnega pacienta, da torej ne sodi v bolnišnico. Kaj je ta človek rekel?

c) V tretji bolnišnici je neki človek izjavil nekaj takšnega, da je Craig sklepal, da gre za neprisebnega zdravnika. Kaj je ta človek rekel?

č) V četrti bolnišnici je Craig srečal dva človeka, A-ja in B-ja. A je menil, da je B nepriseben, B pa, da je A zdravnik. Craig se je zavzel, da enega od njiju odstranijo iz bolnišnice. Katerega?

11. V neki deželi živijo ljudje dveh vrst: eni vedno govorijo resnico, drugi vedno neresnico. Oboji pa na vprašanja odgovarjajo le z "da" oziroma"ne".

Popotnik pride do križpotja: ena pot pelje v mesto, druga pa ne. Nobenega znaka ni, po katerem bi se popotnik ravnal, pač pa tam stoji eden

[1] Naloga 10 je vzeta iz knjige R. Smullyana *The lady or the figer?* Iz te knjige so še naloge 3.d, 3.e, 12, 6 v 5. pogl., 11. v 7. pogl.

od deželanov. Ali popotnik lahko z enim vprašanjem dobi dovolj podatkov o tem, po kateri poti naj gre?

12. V deželo resničnikov in neresničnikov je vstopil vohun. Zanj je značilno, da je lažnivec, to pomeni, da včasih laže, včasih pa govori resnico.

Policija je priprla sumljivo osebo. Na sodišču je priprti dal izjavo, na osnovi katere je sodnik logično sklepal, da gre za vohuna.

Kaj je lahko izjavila oseba, če je njena izjava resnična? ln kaj je lahko izjavila, če je njena izjava neresnična?

13. Imamo tri ljudi: eden govori vedno resnico, drugi vedno neresnico, tretji pa včasih eno, včasih drugo. Ali lahko s tremi vprašanji, na katera se odgovarja z "da" ali "ne", ugotovimo, kdo je kaj!

14.

a) Dokaz s protislovjem (Reductio ad absurdum) uporabljamo v treh oblikah:

i) Če $\mathscr{A}, \neg B \models 0$, potem $\mathscr{A} \models B$

ii) Če $\mathscr{A}, \neg B \models C$ in $\mathscr{A}, \neg B \models \neg C$, potem $\mathscr{A} \models B$

iii) Če. $\mathscr{A}, B \models C$ in $\mathscr{A}, B \models \neg C$, potem $\mathscr{A} \models \neg B$

Ali je med temi pravili kakšna razlika?

b) Dokaz z analizo primerov poteka na enega od načinov:

i) (kot sklep) $A \vee B, A \Rightarrow C, B \Rightarrow C \models C$

ii) Če $\mathscr{A} \models A \vee B$ in $\mathscr{A}, A \models C$ in $\mathscr{A}, B \models C$, potem $\mathscr{A} \models C$

iii) Če $\mathscr{A}, B \models C$ in $\mathscr{A}, \neg B \models C$, potem $\mathscr{A} \models C$

Ali je med temi pravili kakšna razlika? Kako vplivajo na dolžino dokaza?

c) Pogojni sklep se glasi

$\mathscr{A} \models B \Rightarrow C$ natanko takrat, ko $\mathscr{A}, B \models C$.

V katero smer pa ga v resnici uporabljamo?

č) Recimo, da se na veji semantičnega drevesa nahajata izjavi A in $A \Rightarrow B$. Ali lahko uporabimo modus ponens in k veji dodamo B? Kaj pa, če imamo na veji A in $A \Leftrightarrow B$ ali pa $A \Rightarrow B$ in $\neg B$?

15. Naslednje izpeljevanje zapiši v simbolični obliki.

Pri tem uporabi predlagane oznake. Zapiši uporabljene sklepe in preveri njihovo pravilnost.

O Petru se ve naslednje:

(1) da ima rad vsaj eno izmed treh deklet – Stašo, Mašo ali Danico ($S \vee M \vee D$);

(2) če ima rad Stašo, Danice pa ne, potem ima rad tudi Mašo ($S \wedge \neg D \Rightarrow M$);

(3) rad ima obe – Danico in Mašo, ali pa nobene od njiju ($D \Leftrightarrow M$);

(4) če ima rad Danico, potem ima rad tudi Stašo ($D \Rightarrow S$).

Pokažimo, da ima rad vse tri:

▪ Recimo, da Peter ne mara Danice.

▪ Potem ne mara Maše (ker ima rad Danico in Mašo ali pa nobene).

▪ Torej mora ljubiti Stašo (saj ljubi najmanj eno od treh).

▪ Toda če Stašo ljubi, Danice pa ne, potem ima rad Mašo (to pa je protislovje), zato mora ljubiti Danico. Potem pa ima rad tudi Mašo in še Stašo. Torej ima rad vse tri.

16. Preberi naslednji dve izpeljavi, ki se nanašata na nalogo 8.1.

(1) Dano je, da Boris je pečenko, če Andrej je šunko; da natanko eden – Andrej ali Cene – je šunko; da Boris in Cene ne jesta hkrati pečenke. Iz tretje predpostavke sledi, da vsaj eden (Boris ali Cene) je šunko. Recimo, da Andrej je šunko. Potem Boris je pečenko. Od tod izhaja, da Cene je šunko. Skratka, Andrej in Cene oba jesta šunko, to pa je v nasprotju z drugim pogojem. Torej Andrej je pečenko. Iz druge predpostavke sledi, da Cene je šunko. Andrej je pečenko, Cene pa šunko.

(2) 1. Če Andrej je šunko, potem Boris je pečenko. (Predpostavka naloge.)

2. Natanko eden (Andrej ali Cene) je šunko. (Predpostavka.)

3. Boris in Cene ne jesta hkrati pečenke. (Predpostavka.)

4. Vsaj eden (Boris ali Cene) je šunko. (Sledi iz 3.)

5. ▪ Recimo, da Andrej je šunko. (Dodatna predpostavka.)

6. ▪ Potem Boris je pečenko. (Sledi iz 1 in 5.)

7. ▪ To pomeni, da Cene je šunko. (Sledi iz 4 in 6.)

8. ▪ Torej, Andrej in Cene oba jesta šunko. (Iz 5 in 7.)

9. (Pri predpostavki 5 veljata med seboj protislovni izjavi 8 in 2.) Torej Andrej je pečenko.

10. Potem Cene je šunko. (Sledi iz 9 in 2.)

11. Končno: Andrej je pečenko, Cene pa šunko. (Iz 9 in 10.)

a) Kako smo povečali preglednost izpeljave (2) v primerjavi z izpeljavo (1)?

b) Kako smo zaznamovali odvisnost od dodatne predpostavke (predpostavke RA)?

c) Katere izjave so resnične pri pogoju, da je resnična dodatna predpostavka?

č) Ali so izjave 9, 10 in 11 resnične pri pogoju, da je resnična izjava 5?

d) Kakšno obliko sklepa reductio ad absurdum smo uporabili?

e) Zapiši izpeljavo v simbolični obliki tako, da na desni strani zapišeš sklepe, ki smo jih uporabili.

f) Preveri pravilnost uporabljenih sklepov.

17. Zapiši naslednji dokaz izjave $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ tako, da zaključek vsakega sklepa zapišeš v novo vrstico in ga utemeljiš. Privzemimo, da velja $\neg A \Rightarrow \neg B$. Predpostavimo dodatno še B, nato pa še $\neg A$. Iz tretje in prve predpostavke sledi $\neg B$. Pri pogoju, da velja A, velja tako B kot $\neg B$. To je protislovje. Zato velja A. Pri pogoju B smo izpeljali A. Zato velja $B \Rightarrow A$. Pri pogoju $\neg A \Rightarrow \neg B$ smo dobili $B \Rightarrow A$, zato velja $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.

18. Dopolni izpeljave:

a)

1	$A \Rightarrow B$	?
2	$C \Rightarrow D$	?
3	▪ $A \wedge C$	?
4	▪ A	?
5	▪ C	?
6	▪ B	?
7	▪ D	?
8	▪ $B \wedge D$	?
9	$A \wedge C \Rightarrow B \wedge D$	?

b)

1	$A \Rightarrow B$	?
2	$C \Rightarrow D$	?
3	▪ $A \vee C$	?
4	▪ A	?
5	▪ B	?
6	▪ $B \vee D$	?
7	▪ C	?
8	▪ D	?
9	▪ $B \vee D$	?
10	$B \vee D$	?

c)

1	$A \Rightarrow B$	?
2	$A \Rightarrow C$	?
3	$\neg B \vee \neg C$	?
4	▪ $\neg B$	?
5	▪▪ A	?
6	▪▪ B	?
7	▪ $\neg A$	?
8	▪ $\neg C$	?
9	▪▪ A	?
10	▪▪ C	?
11	▪ $\neg A$	?
12	$\neg A$	?

č)

1	$A \Rightarrow B$	?
2	$B \Rightarrow C$	?
3	?	DP
4	?	3, 1 MP
5	?	4, 2 MP
6	$A \Rightarrow C$	3, 5 PS

d)

1	$A \wedge \neg B$	?
2	$C \Rightarrow B$	?
3	$\neg B \wedge (C \vee A)$	?
4	A	?
5	$\neg B$	?
6	$C \vee A$	?
7	$\blacksquare C$	?
8	?	7, 2 MP
9	?	7, 8, 5 RA
10	?	4, 5 Zd
11	$(A \wedge \neg B) \wedge \neg C$	?

e)

1	$\neg A$	?
2	$A \vee B$	?
3	?	DP
4	?	DP
5	?	4, 3, 1 RA
6	?	DP
7	B	2, 3, 5, 6, 6 AP

19. Velja: $A \Rightarrow \neg B, A \Rightarrow \neg C, \neg C \Rightarrow A, B \vee C \models \neg A \wedge C$.

Dokaz.

1	$A \Rightarrow \neg B$	PR
2	$A \Rightarrow \neg C$	PR
3	$\neg C \Rightarrow A$	PR
4	$B \vee C$	PR
5	$\blacksquare B$	DP
6	$\blacksquare\blacksquare A$	DP
7	$\blacksquare\blacksquare \neg B$	6, 1 MP
8	$\blacksquare \neg A$	6, 5, 7 RA
9	$\blacksquare C$	DP
10	$\blacksquare\blacksquare A$	DP
11	$\blacksquare\blacksquare \neg C$	10, 2 MP
12	$\blacksquare \neg A$	10, 9, 11 RA
13	$\neg A$	4, 5, 8, 9, 12 AP
14	$\blacksquare \neg C$	DP
15	$\blacksquare A$	14, 3 MP
16	C	14, 14, 13 RA
17	$\neg A \wedge C$	13, 16 Zd

20.[2] **Kdo je ukradel tortice?**

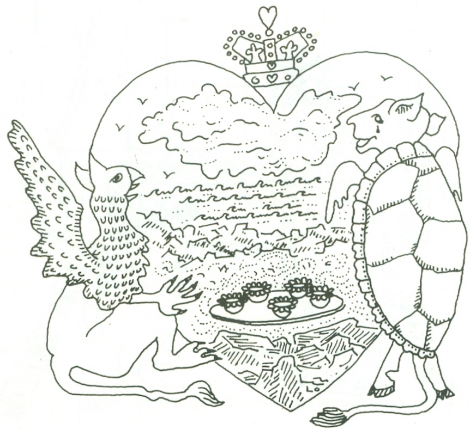
"Tortice smo našli na obali," je pojasnil beli zajec. "Lev in želva sta jih ravno mislila pojesti, ko so slučajno prišli mimo vojaki in ju aretirali."

"To je povsem nedvomen dokaz za to, da sta kriva," je zavpila kraljica, "Torej jima pri priči odsekajte glavo!"

"No, no," je rekel kralj, "pošteno jima moramo soditi, kaj pa drugega!"

[2]Ta naloga je vzeta iz knjige R. Smullyana *Alica v deželi ugank*. Isto velja za nalogo 3 iz 5. poglavja.

Toda nadaljnje dogajanje je pokazalo, da lev in želva nista oba kriva – še vprašanje je bilo, ali je sploh kateri od njiju kriv, in če že, kateri; ali če je kriv kdo drug: je golo naključje, da sta tortice našla krilati lev in ponarejena želva? Ne; kmalu so prišli na dan dokazi, ki so dokončno potrdili, da je storilec ali lev ali želva (oba pa ne), vendar sodnik nikakor ni mogel razsoditi, kateri od njiju je kriv.



Kazalo je že, da ne bodo prišli nikamor naprej, ko je iznenada nastopila cela gruča prič, ki so dale različne izjave.

"Tortic sploh ni ukradel lev," je rekla vojvodinja.

"Prej pa je že marsikaj ukradel," je rekla kuharica.

"Želva je prej že marsikaj ukradla," je rekla mačka.

"Mačka je prej že marsikaj ukradla," je rekla gosenica.

"Kuharica in mačka imata obe prav," je rekel polh.

"Prav ima ali mačka ali gosenica, če ne celo obe," je rekel klobučar.

"Prav ima ali zmešani zajec ali polh, če ne celo oba," je rekel kuščar Bill.

"Kuharica in klobučar imata oba prav," je rekel srčni fant.

"Kuščar Bill ima prav, srčni fant se pa moti," je rekel beli zajec.

Nastala je globoka tišina.

"Vse to ne dokazuje ničesar!" je zavpil kralj. "Same besede, besede, besede – same besede brez haska!"

"Niso tako brez haska, vaše veličanstvo," je sredi porote rekla Alica in vstala.

"Stvar je namreč taka, da sta beli zajec in vojvodinja dala izjavi, ki sta ali obe resnični ali obe lažni."

Vse oči so se radovedno obrnile k Alici. Vsi so vedeli, da Alica daje samo resnične izjave, in nadaljnja preiskava je pokazala, da tudi ta njena izjava ni bila izjema. Še več, ta izjava je celo razrešila vso skrivnost.

Kdo je ukradel tortice?

21. V tej nalogi bomo obravnavali sestavljene izjave, v katerih nastopata od izjavnih povezav le implikacija in negacija. Zato bomo uporabljali poljsko notacijo. Pri razlagi nastopa le pet možnosti:

DP *Dodatna predpostavka* (DP) nastopa, kadar rečemo: predpostavimo, da velja tudi A. Pred A je zapisanih nekaj pik, kar pomeni, da smo že privzeli tiste izjave, ki uvajajo manjše število pik. Razlaga je DP.

. . . . . .

PR *Predpostavke* ali *premise* (PR) so tiste izjave, ki jih na začetku privzamemo za resnične. Pred njimi ni nobene pike. Izjave, ki logično sledijo iz premis, so zato tudi resnične. Razlaga je PR.

. . . . . .

MP Pravilo *modus ponens* (MP) dovoljuje, da k izpeljavi dodamo izjavo B, če smo že izpeljali izjavi A (vrstica N1) in CAB (vrstica N2). Razlaga je N1, N2 MP.

. . . . . .

PS *Pogojni sklep* (PS) dovoljuje, da k izpeljavi dodamo izjavo CAB, če smo pri dodatni predpostavki (OP), da velja A (vrstica N1), izpeljali B (vrstica N2). Pred izjavo CAB zapišemo eno piko manj, kot jih je pred izjavo A. Razlaga je N1, N2 PS.

. . . . . .

RA Pravilo *reductio ad absurdum* (RA) nam dovoljuje, da dodamo k izpeljavi izjavo A, če smo pri dodatni predpostavki NA (vrstica N1) izpeljali neko izjavo B (vstica N2) in njeno negacijo NB (vrstica N3). Pred izjavo A zapišemo eno piko manj, kot je pik pred izjavo NA. Razlaga je N1, N2, N3 RA.

. . . . . .

Dopolni dokaze:

a)

1	▪ p		?
2	▪▪ Cpq		?
3	▪▪ q		?
4	▪ $CCpqq$		?
5	$CpCCpqq$		?

b)

1	▪ NNp		?
2	▪▪ Np		?
3	▪ p		?
4	▪ $CNNpp$		?

c)

1	▪ p	?
2	▪▪ q	?
3	▪ Cqp	?
4	$CpCqp$	?

č)

1	▪ p	?
2	▪▪ Np	?
3	▪▪▪ Nq	?
4	▪▪ q	?
5	▪ $CNpq$	?
6	$CpCNpq$	

d)

1	?	DP
2	?	DP
3	?	DP
4	?	3, 3, 2 RA
5	?	2, 1, 4 RA
6	$CpNNp$	1, 5 PS

e)

1	▪ Cpq	DP
2	?	DP
3	?	DP
4	?	3, 1 MP
5	?	2, 4 MP
6	?	3, 5 PS
7	?	2, 6 PS
8	$CCpqCCqrCpr$	1, 7 PS

f)

1	▪ $CNpNCrNNr$	DP
2	▪▪ Np	DP
3	?	DP
4	?	DP
5	?	DP
6	?	DP
7	?	5, 5, 5 RA
8	?	5, 7, 6 RA
9	?	4, 8 PS
10	▪ p	2, 9, 3 PS
11	$CCNpNCrNNrp$	1, 10 PS

g)

1	?	DP
2	?	DP
3	?	2, 1 MP
4	?	2, 3, 2 RA
5	$CCNppp$	1, 4 PS

h) Sestavi računalniški program, ki bo preverjal pravilnost razlage k izpeljavi, ki jo moraš vpisati v računalnik. Če se pri vpisovanju tekoče vrstice zmotiš, ti da računalnik novo možnost. Pri drugi napaki naj izpiše tekst, ki obravnava pravilo (DP, PR, MP, PS ali RA) in je podan na začetku naloge. Če se pri vpisovanju iste vrstice zmotiš še tretjič, naj računalnik vpiše razlago sam. Na koncu naj računalnik poda tudi oceno.

22. Imamo tri ljudi. Vemo, da je kvečjemu eden od njih lažnivec, to je, da se včasih tudi zlaže. Pokažimo, da lahko z vprašanjem "Ali je prvi resničnik?", ki ga postavimo drugi osebi, najdemo človeka, ki vedno govori resnico. Pogoje naloge formuliraj samo z negacijo in implikacijo, uporabi poljsko notacijo in pravila sklepanja iz predhodne naloge.

23. Evklidovi *Elementi* so bili prvi aksiomatski sestav in več kot 2000 let vzor matematične strogosti. Prva knjiga Elementov obsega ravninsko geometrijo.

Začenja se z definicijami in postulati, to je – aksiomi. Posebej je zanimiva definicija vzporednosti: Daljici sta vzporedni, če ležita v isti ravnini in se ne sečeta, ne gleda na to, kako ju podaljšamo.

Peti postulat pa pravi:

Naj daljica seče drugi dve daljici tako, da je vsota notranjih kotov na eni strani prečnice manjša od dveh pravih kotov. Potem se drugi dve daljici sečeta, in to na tisti strani prečnice, kjer je ta vsota manjša od dveh pravih kotov, če ju le dovolj podaljšamo.

Iz Elementov bomo navedli dokaz izreka 19 in del izreka 29. V zadnjem Evklid prvič uporabi peti postulat. V dokazih se sklicuje na naslednje izreke:

I.5 *V enakokrakem trikotniku sta kota na osnovnici enaka. Prav tako sta enaka zunanja kota.*

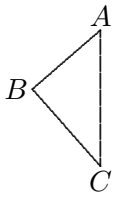
I.13 *Sokota sta oba enaka pravemu kotu ali pa je njuna vsota enaka dvema pravima kotoma.*

I.18 *Nasproti večje stranice v trikotniku leži večji kot.*

I.19 *Nasproti večjega kota v trikotniku leži večja stranica.*

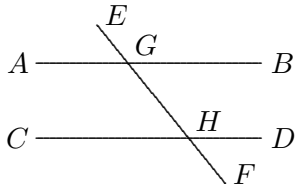
Bodi ABC trikotnik, ki ima kot ABC večji od kota BCA. Trdim, da je stranica AC večja od stranice AB. Če to ni res, potem je AC enaka AB ali manjša. Toda AC ni enaka AB, ker bi bil v primeru, da je AC enaka AB, kot ABC enak kotu BCA, toda ni (I.5).

Torej AC ni enaka AB. Niti ni AC manjša od AB, ker bi bil kot ABC tudi manjši od kota BCA, pa ni (I.18). Torej AC ni manjša od AB. A dokazali smo še, da tudi enaka ni. Torej je AC večja od AB.



I.29 *Naj daljica seka dve vzporednici. Potem sta izmenična notranja kota enaka.*

Vzemimo, da daljica EF seče vzporednici AB in CD. Trdim, da sta izmenična kota AGH in GHD enaka. Recimo, da nista enaka. Potem je eden od obeh večji. Naj bo to AGH. Dodajmo obema kotama kot BGH. Potem sta kota AGH in BGH skupaj večja od BGH in GHD.



Toda kota AGH in BGH dasta skupaj dva prava kota (I.13), zato sta kota BGH in GHD skupaj manj kot dva prava kota. Toda daljici, če ju podaljšamo zadosti, se na strani, kjer sta notranja kota skupaj manjša

od dveh pravih kotov, sečeta. (post. 5.) Torej se bosta daljici AB in CD sekali, če ju bomo dovolj podaljšali. Toda to ni možno, saj sta vzporedni. Torej ni res, da kota AGH in GHD nista enaka. Torej sta enaka.

a) Zapiši izreke I.18, I.19 in I.29 tako, da vpelješ enostavne izjave: $s \equiv$ stranica AC je večja od stranice AB, ipd.

b) V simbolizmu zapiši dokaza izrekov 19 in 29, navedi pravila sklepanja in eksplicitne in implicitne predpostavke.

c) Kdaj se bo iztekel program?

Dokler AB ne seče CD.
Podaljšuj AB in CD.

24. Pri dokazovanju izrekov z računalnikom je pomembno, da čim bolj omejimo število pravil izpeljevanja, saj s tem zmanjšamo število možnih dokazov. Če se omejimo na izjave, ki so disjunkcije enostavnih izjav ali njihovih negacij, zadošča že eno smo pravilo:

$$A_1 \vee \ldots \vee A_i \vee \ldots A_k, B_1 \vee \ldots \vee B_i \vee \ldots B_k \models A_1 \vee \ldots \vee A_{i-1} \vee A_{i+1} \ldots A_k \vee$$

$$\vee B_1 \vee \ldots \vee B_{j-1} \vee B_{j+1} \ldots B_k, \text{ kjer je } B_j \equiv \neg A_i$$

Poseben primer pravila za $k = n = 1$ je $A, \neg A \models 0$.

a) Dokaži pravilnost tega sklepa.

b) Vsako izjavo iz množice $\{A \Rightarrow \neg B, A \Leftrightarrow \neg C, B \vee C\}$ zamenjaj z ekvivalentno izjavo (ali z ekvivalentnimi izjavami) omenjene oblike. Zaznamuj dobljeno množico izjav z $\mathscr{N}$.

c) Dokaži $\mathscr{N} \models \neg A$, tako da izpelješ protislovje iz množice izjav $\mathscr{N} \cup \{A\}$, in to samo z uporabo zgoraj omenjenega pravila.

d) Dokaži $\mathscr{N} \models C$.

4. Zgradba izjav in predikati

1. Zapiši simbolično naslednje izjave:
   a) Ana je Zoranova mati.
   b) Zoranova mati je Ana.
   c) Število 5 je večje od števila 2.
   č) Od števila 2 je večje število 5.
   d) Število 7 deli število 21.
   e) Število 21 deli število 7.

2. Oče sprašuje za Janeza in Petra: "Ali že oba spita?"

Mati (skozi vrata vidi le eno posteljo, pa še ta je prazna): "Ne, oba še ne spita."

Simbolično zapiši materino izjavo.

3. Zaloga vrednosti spremenljivk T_i je množica točk neke ravnine, zaloga vrednosti spremenljivk x in y pa množica realnih števil. Uvedimo relacijo K:

$KTxy \equiv$ Točka T ima absciso x in ordinato y.

a) Preberi naslednje izjave:

i) $KO\ 00$

ii) $KT_1xy \wedge KT_2xy \Rightarrow T_1 = T_2$

iii) $KTxy \wedge KTx'y' \Rightarrow x = x' \wedge y = y'$

b) Zapiši v novih oznakah:

$A(-1,1), B(0,1), C(-1,0)$

4. Zaloga vrednosti spremenljivk x in y so ljudje.

Uvedimo relacijo M:

$Mxy \equiv$ Oseba x je mati osebe y.

Zapiši v teh oznakah izjave:

a) Francka je Janezova mati.

b) Petrova mati je Jožica.

Preberi:

c) $Mxy \wedge Mx'y \Rightarrow x = x'$.

5. Zaloga vrednosti spremenljivk $i, j, k, \ldots$ so naravna števila ter število 0. Definirajmo $D(i,j,k) \equiv$ Število i da pri deljenju z j ostanek k.

Preberi:

a) $D(7,3,1) \wedge D(7,2,1)$

b) $D(i,j,k) \Rightarrow k < j$

c) $D(i,j,k) \wedge i < j \Rightarrow i = k$

$D(i,j,k,l) \equiv$ Števio i da pri deljenju s številom j rezultat k in ostanek l.

č) $D(i,j,k,l) \Rightarrow D(i,j,l)$

d) $D(i,j,k,l) \Rightarrow j \neq 0$

e) $D(i,j,k,l) \Leftrightarrow i = kj + l \wedge l < j$

f) $D(17,3,5,2)$

g) $D(i,j,k,l) \wedge D(i,j,k',l') \Rightarrow k = k' \wedge l = l'$

h) $D(i,j,k,l) \wedge D(i',j,k,l) \Rightarrow i = i'$

6. Če Px pomeni, da je x praštevilo, zapiši simbolično izjave:

a) Števili 2 in 3 sta praštevili.

b) Števili 4 in 6 nista praštevili.

c) Ni res, da sta števili 2 in 4 praštevili.

č) Ni res, da števili 2 in 4 nista praštevili.

d) Števili a in b sta praštevili.

e) Števili a in b nista praštevili.

f) Števili a in b nista obe praštevili.

g) Ni res, da sta števili a in b obe praštevili.

h) Nobeno od števil a in b ni praštevilo.

i) Vsaj eno od števil a in b ni praštevilo.

j) Ni res, da števili a in b nista obe praštevili.

7. Zapiši simbolično naslednje izjave. Posebej pazi na besedo "je".

a) Sonce je zvezda.

b) Sonce je nam najbližja zvezda.

c) Dve je ena in ena.

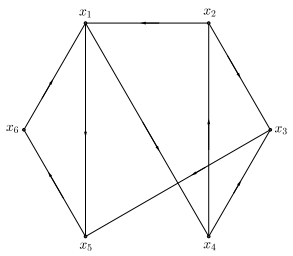
č) 3 je naravno število.

d) 3 je praštevilo.

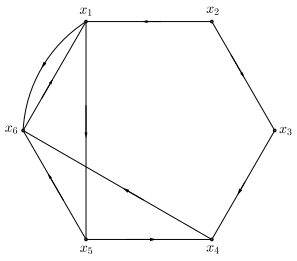
e) Človek je živo bitje.

f) $x = 2$ je rešitev enačbe $x^2 - 3x + 2 = 0$.

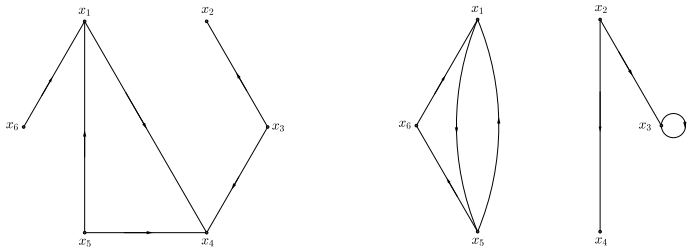
8. Imejmo končno pogovorno področje in dvomestno relacijo, ki velja med njegovimi elementi. To lahko ponazorimo z grafom tako, da elemente pogovornega področja ponazorimo s točkami. Če med elementoma velja relacija, potem ju povežemo s črto, ki izhaja iz prve točke in gre v drugo točko. Pogovorno področje naj sestoji iz šestih elementov. Zapiši dejstva o relaciji R, ki je ponazorjena z grafom:



a)



b)



c) č)

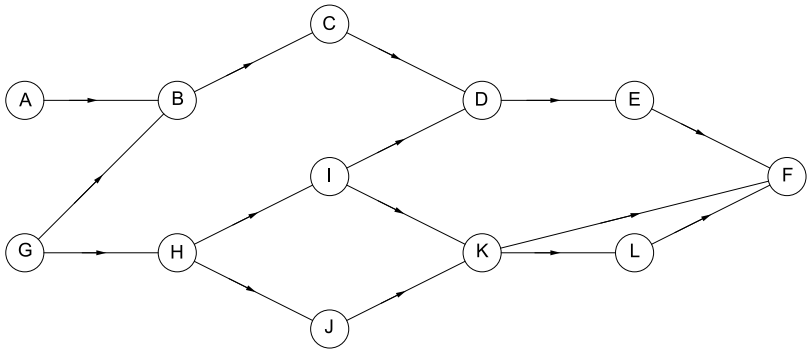
9. Relacija je lahko podana tudi s tabelo ali matriko, tako da v preseku vrstice x_i in stolpca x_j napišemo 1, če je x_i v relaciji z x_j, in 0 sicer.

a) Sestavi tabele za relacije iz prejšnje naloge.

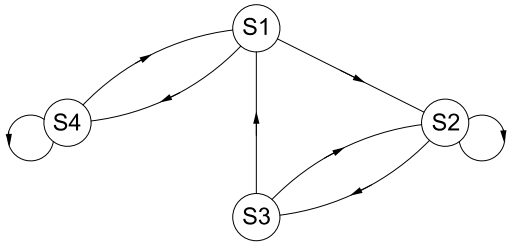
b) Nariši graf relacije, ki jo podaja tabela A:

$$\mathrm{A} = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

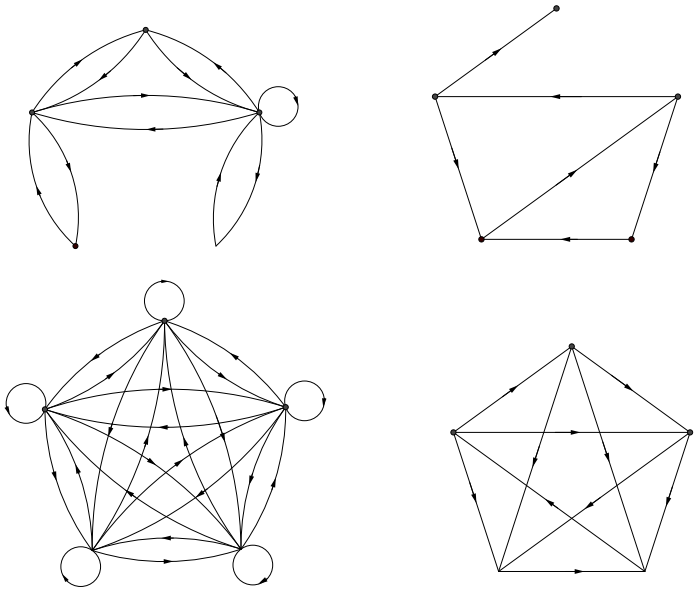
10. Zapiši dejstva o relaciji $Nxy \equiv$ delovna naloga x mora biti opravljena neposredno pred nalogo y, ki jo podaja graf:



11. Zapiši dejstva o relaciji *Prehaja* $(x, y) \equiv$ stroj lahko prehaja iz stanja x v stanje y.



12. Zaznamuj elemente pogovornega področja, izberi oznake relacije in zapiši dejstva, ki jih podajajo grafi:



13. Zapiši v simbolizmu (Etbin Bojc, *Pregovori in reki na Slovenskem*):
    a) Ljubim tebe, toda ne kot sebe.
    b) Kdor laže, ta krade.
    c) Kogar ljubim, tega bijem.
    č) Ti sebi med, meni pa pelin.
    d) Kdor sam sebe pozna, tudi druge pozna.
    e) Kdor čaka, dočaka.
    f) Kdor seje, ta žanje: kdor ne seje, ne žanje.
    g) Bolje vrabec v roki, kakor golob na strehi.
    h) I mene i tebe je mati rodila.
    i) Kdor dela, dela tudi napake.
    j) Noben človek ni ob vsakem času pameten.

k) Vsak človek je sebi najboljši zdravnik.
l) Vsakdo ni za vse.
m) Kdor se rad tepe, je tepen.
n) Vsakdo je sebi najbližji.
o) Kdor ni za sebe, tudi ni za drugega.
p) Kdor sam sebi ne privošči, tudi drugim ne.
r) Kdor mnogo prinaša, vsakemu prinese nekaj.
s) Vsega nobeden ne ve.
š) Kogar se bojiš, tega ne ljubiš.
t) Kdor je tiho, vsem odgovori.
u) Če se pravdata dva, tretji dobiček ima.
v) Ni človeka, da bi ustregel vsem ljudem.
z) Vsem ljudem ni (mogoče) ustreči.
ž) Noben kvas ne vzhaja rajši od dolga.

14. O Janezu sta krožili dve vesti:
i) Nobenega ni premagal.
ii) Nobeden ga ni premagal.
($Pxy \equiv$ oseba x je premagala osebo y) ($j =$ Janez.)

15. O Petru so govorili:
i) Vse, kar izjavi, je neresnica.
ii) Vse, kar izjavi, ni resnica.
($Ix \equiv$ Peter izjavi, da velja x)

16. PP je množica naravnih števil. Preberi izjave – katere so resnične?
a) $\neg\forall x\forall y(x = y)$
b) $\forall x\neg\forall y(x = y)$
c) $\forall x\forall y\neg(x = y)$

17. Zapiši v simbolizmu:
a) Vsak vektor se da zapisati kot linearna kombinacija treh linearno neodvisnih vektorjev.
b) Vsako število iz $\mathbb{N}_0$ se da zapisati kot vsota štirih kvadratov.
Zapiši simbolično naslednje pare izjav:
c) Vsak Jugoslovan je šel vsaj enkrat v Trst.
Vsaj enkrat je šel vsak Jugoslovan v Trst.
č) Vsak odrasel človek ima vsaj enega otroka.
Vsaj enega otroka ima vsak odrasel človek.
d) Vsakdo ljubi kakšno osebo.
Kakšno osebo vsakdo ljubi.
e) Za vsak x obstaja tak y, da je $x < y$.

Obstaja tak y, da za vsak x velja $x < y$.

18. Oceni resničnost izjav:
a) $\forall n, m \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : n + k = m$
b) $\forall n, m \in \mathbb{Z}\ \exists k \in \mathbb{Z} : n + k = m$
c) $\forall n, m \in \mathbb{Z}\ \exists k \in \mathbb{Z} : n \neq 0 \Rightarrow n \cdot k = m$
č) $\forall n, m \in \mathbb{Q}\ \exists k \in \mathbb{Q} : n \neq 0 \Rightarrow n \cdot k = m$
d) $\exists r \in \mathbb{Q} : q^2 = 2$
e) $\exists r \in \mathbb{R} : r^2 = 2$
f) $\exists r \in \mathbb{R} : r^2 + 1 = 0$
g) $\exists z \in \mathbb{C} : z^2 + 1 = 0$

19. Prevedi v simbolizem naslednje trditve:
a) Vsako praštevilo je liho, razen če to ni število 2.
b) Vsako praštevilo je liho, razen če je to število 2.
c) Vsako praštevilo, razen števila 2, je liho.

20. Vzemimo, da v neki skupini ljudje med seboj stalno izmenjujejo stvari in si oglejmo relacijo

$R(x, y, z) \equiv$ Oseba x da osebi y reč z.

Prevedi v pogovorno slovenščino naslednje simbolične stavke, kjer je zaloga vrednosti spremenljivk x in y množica ljudi te skupine, spremenljivke z pa množica reči, ki jih izmenjujejo.
a) $\forall x \forall y \forall z R(x, y, z)$
b) $\forall x \exists z \forall y R(x, y, z)$
c) $\exists z \forall x \forall y R(x, y, z)$
č) $\forall y \exists z \forall x R(x, y, z)$
d) $\exists x \exists y \exists z R(x, y, z)$
e) $\exists x \exists y \forall z R(x, y, z)$
f) $\exists x \forall z \forall y R(x, y, z)$
g) $\forall x \exists y \exists z R(x, y, z)$
h) $\forall x \exists z R(x, y, z)$

Prevedi v simbolizem naslednje izjave:
i) Vsak da vsakemu nekaj.
j) Vsak da vsakemu kaj.
k) Vsak da nekaj vsakemu.
l) Nekaj da vsak vsakemu.
m) Vsi dajo kaj vsakemu.
n) Nekaj dajo vsi vsem.
o) Isto stvar dajo vsi vsem.
p) Vsaj eno stvar da vsak vsakemu.

r) Vsak da isto stvar vsem.

21. Naj bo skupina ljudi iz prejšnje naloge množica $\{J(\text{anez}), P(\text{eter}), B(\text{oris})\}$, reči, ki jih zamenjujejo, pa so iz množice $\{m(\text{oka}), k(\text{ruh}), s(\text{ol})\}$.

Kateri stavki iz prejšnje naloge so resnični, če je relacija R podana s tabelo:

a)

	J	P	B
J		m, k	
P			k
B			

b)

	J	P	B
J	k	m	s
P		k	
B			m

c)

	J	P	B
J	k	m	
P		k	
B		m, s	k

č)

	J	P	B
J	m, s	k	k
P	s	s	m
B	k	k, m	m

d)

	J	P	B
J	m, s	m, k	m
P	k, m	k, s	k, s
B	m	m	m

e)

	J	P	B
J	k, m	s, k	k
P	k, m	s, k	k
B	k, m	s	k

f)

	J	P	B
J	k, s	k, s	k, m
P	k, s	k, s	k
B	k, m	k, s	k

g)

	J	P	B
J	s, k, m	s, k, m	s, k, m
P	k	k, s, m	m
B	s	s, k, m	m

22. Zapiši simbolično naslednje pare izjav – katere izjave so resnične?

a) Enačbi $x^2 - 3x + 2 = 0$ in $x^2 - 6x + 6 = 0$ imata skupno rešitev.

Enačbi $x^2 - 3x + 2 = 4$ in $x^2 - 6x + 6 = 0$ sta rešljivi.

b) Enačbi $x^2 - 3x + 2 = 0$ in $x^2 - 5x - 6 = 0$ imata skupno rešitev.

Enačbi $x^2 - 3x + 2 = 0$ in $x^2 - 5x + 6 = 0$ imata iste rešitve.

c) $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{N} \wedge 1 \in \mathscr{M} \wedge (n \in \mathscr{M} \Rightarrow n + 1 \in \mathscr{M}) \Rightarrow \mathscr{M} = \mathbb{N}$

$\mathscr{M} \subseteq \mathbb{N} \wedge 1 \in \mathscr{M} \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(n \in \mathscr{M} \Rightarrow n + 1 \in \mathscr{M}) \Rightarrow \mathscr{M} = \mathbb{N}$

23. Zapiši v simbolizmu naslednje definicije:

a) Dve množici sta enaki natanko tedaj, kadar je vsak element ene množice tudi element druge množice.

b) Trikotnik je enakostraničen, če so vse njegove stranice enake.

c) Ali gre v primerih "Množica $\mathscr{A}$ je enaka množici $\mathscr{B}$" in "Stranica a je enaka stranici b" za isto relacijo?

č) Zapiši v simbolizmu naslednjo definicijo (*Slovar slovenskega knjižnega jezika II*, str. 810):

diskretna množica: množica točk, katerih medsebojne razdalje so večje od 0.

24. Naj bo R relacija iz nalog 8 in 12. Katere od izjav so resnične:

a) $\forall x \exists y Rxy$

b) $\forall x \exists y Ryx$

c) $\forall x \exists y (Rxy \vee Ryx)$

č) $\forall x \exists y (Rxy \wedge Ryx)$

d) $\forall x \forall y (\neg Rxy \vee \neg Ryx)$

e) $\exists x \forall y Rxy$

f) $\exists x \forall y (x \neq y \Rightarrow Rxy \vee Ryx)$

g) $\forall x \forall y Rxy$

Relacija T je podana z definicijo:

$Txy \Leftrightarrow x = y$

$Txy \Leftrightarrow Rxy$

$Txy \Leftrightarrow \exists z (Rxz \wedge Tzy)$

Katere izjave so resnične:

h) $\forall x \forall y Txy$

i) $\forall x \exists y Txy$

j) $\exists y \forall x Txy$

k) $\forall x \exists y Tyx$

l) $\exists y \forall x Tyx$

Relacija S je definirana takole:

$Sxy \Leftrightarrow \exists z (Rxz \wedge Rzy)$

Katere izjave so resnične:

m) $\forall x \forall y Sxy$

n) $\forall x \exists y Sxy$

o) $\exists y \forall x Sxy$

25. Preberi relacijo Txy iz prejšnje naloge takole: iz točke x se da priti v točko y.

Zapiši simbolično naslednje izjave in oceni njihovo resničnost:

a) Iz neke točke se da priti v vsako točko.

b) Iz vsake točke se da priti v vsako točko.

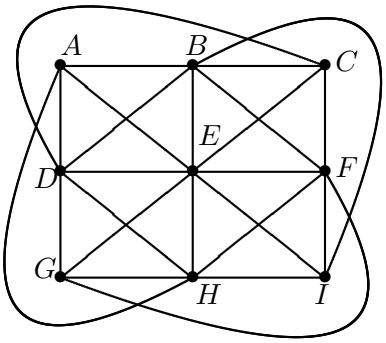
c) V neko točko se da priti iz vsake točke.

č) V vsako točko se da priti iz neke točke.

d) V vsako točko se da priti iz kakšne točke.

e) Iz kakšne točke se da priti v vsako točko.

26. Naslednja slika prikazuje "ravnino", ki sestoji iz devetih točk in dvanajstih premic. Na vsaki premici so natanko tri točke. Premice bomo zaznamovali s seznamom črk, ki zaznamujejo točke na premici, in to po abecednem vrstnem redu.



a) Zapiši dejstva o lastnosti:

(XYZ) premica $\equiv (XYZ)$ je premica.

b) Definiraj lastnosti in relacije:

X točka $\equiv X$ je točka.

X *NA* $x \equiv X$ je na (seznamu) x.

(XYZ) vzporedna $(X_1Y_1Z_1) \equiv$ premica (XYZ) je vzporedna premici $(X_1Y_1Z_1)$.

X kolinearna $(YZ) \equiv$ točke X, Y in Z ležijo na skupni premici.

(XY) vzporedna$_1$ $(X_1Y_1) \equiv$ daljica (XY) je vzporedna daljici (X_1Y_1).

c) Zapiši simbolično naslednje trditve:

i) Skozi različni točki P in Q gre ena in samo ena premica p.

ii) Skozi dano točko P gre ena in samo ena premica p, ki je vzporedna dani premici q.

iii) Obstajajo vsaj tri točke, ki ne ležijo na skupni premici.

iv) Naj bodo l, m in n tri različne vzporedne premice; $A, A' \in l; B, B' \in m$ in $C, C' \in n$ pa same različne točke. Če velja še $AB \parallel A'B'$ in $AC \parallel A'C'$, potem velja tudi $BC \parallel B'C'$.

Ali so te trditve resnične?

5. Še o sklepanju

1. Ugotovi, ali so naslednji sklepi pravilni:

a) Janez: Dober učbenik vsebuje veliko nalog.

Moj učbenik vsebuje veliko nalog.

Moj učbenik je torej dober učbenik.

Peter: Počakaj malo. Tvoje sklepanje je podobno temu:

Mačke so sesalci.

Tarzan je sesalec.

Torej je Tarzan maček.

Kdo je pravilno sklepal?

b) Vsako naravno število je enako ali večje od 1. Torej je število 1 enako ali večje od 1.

c) Vsako naravno število ima naslednika.

Torej obstaja število, ki sledi vsem naravnim številom.

č) Vsak dogodek je posledica kakšnega dogodka.

Torej obstaja dogodek, ki je vzrok vseh dogodkov.

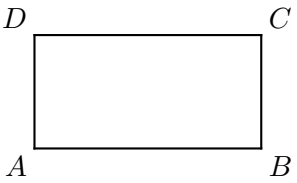
d) Micka nima otrok. Torej Janez nima otroka z Micko.

e) Vsak sovraži Bedanca. Torej on sovraži vse.

f) Če se vsak strinja s Tonetom, potem ima vsak prav.

Torej ima vsak, ki se strinja s Tonetom, prav.

h)



Pravokotnik $ABCD$ ni kvadrat.
Torej vsak pravokotnik ni kvadrat.

i) Enačbi $E_1(x)$ in $E_2(x)$ imata isto množico rešitev. Torej sta rešljivi.

2. Tovarišica: Ali imata še vse ploščice?

Janezek: Nimam nobene.

Tonček: Nimam vseh.

Kdo ima več ploščic? Na to vprašanje so trije učenci odgovorili:

Peter: Janezek in Tonček sta odgovorila enako, da nimata ploščic.

Torej imata enako mnogo ploščic.

Pavle: Janezek nima nobene. Tonček pa nima vseh, a nekaj jih vendarle ima. Torej ima Tonček več ploščic.

Tine: Janezek nima nobene. Tonček pa pravi, da ni res, da ima vse. Torej jih nekaj lahko ima ali pa nima nobene. Tone ima torej več ali enako mnogo ploščic kot Janez.

Kateri ima prav?

3. V nekem mestu se odrasli prebivalci zbirajo po različnih društvih.

Vemo še:

1) Za vsako žensko velja: če ni včlanjena v vsako društvo, potem je članica *društva src*.

2) Noben moški ni član društva src, če ne obstaja kakšno drugo društvo, katerega član ni.

3) Za vsako društvo velja: vsak moški izven društva ima rad vsako žensko iz društva src.

Dokaži, da ima v tem mestu vsak moški rad vsako žensko.

4. Oceni pravilnost sklepov:

a) Vsak delfin je sesalec.
<u>Nobena riba ni sesalec.</u>
Noben delfin ni riba.

b) Vsak delfin je sesalec.
<u>Nobena riba ni delfin.</u>
Nobena riba ni sesalec.

5. Na nekem otoku se prebivalci delijo na *viteze*, ki vedno govorijo resnico, in *oprode*, ki nikoli ne govorijo resnice. Razen tega so nekateri vitezi *preverjeni* vitezi in nekateri oprode *preverjeni* oprode. Otočani se zbirajo po različnih društvih. Posameznik je lahko član več društev. Za vsakega otočana X in društvo C velja, da bo otočan X trdil, da je član društva C, ali pa bo trdil, da ni. Dani so še štirje pogoji:

E1: Množica vseh preverjenih vitezov je društvo.

E2: Množica vseh preverjenih oprod je društvo.

C: Za vsako društvo C velja, da je množica otočanov, ki niso člani društva C, tudi društvo. (To je komplement od C in ga označimo $\bar{C}$.)

G: Za vsako društvo C velja, da vsaj en otočan trdi, da je član tega društva.

a) Dokaži, da obstaja vsaj en nepreverjen vitez.

b) Dokaži, da je na otoku vsaj en nepreverjen oproda.

c) Ali je množica vseh oprod društvo?

č) Ali je množica vseh vitezov društvo?

6. Pogovorno področje je množica vseh tistih naravnih števil, ki v svojem desetiškem zapisu nimajo cifre 0. Če sta x in y dve taki števili, potem naj xy pomeni število, katerega zapis dobimo tako, da zapišemo število y neposredno za x. (xy ne pomeni x krat y) Relacijo, da x *producira* y, bomo zapisovali $P(x, y)$; relacija je podana z dvema praviloma:

A1. $P(2x, x)$

A2. $P(x, y) \Rightarrow P(3x, y2y)$

Dokaži:

a) $\exists x P(x, x)$
b) $\exists x P(x, x2x)$
c) $\exists x P(x, 7x)$
d) $\forall a \exists y P(y, ay)$

7. Dopolni naslednje izpeljave:

a)
1	$\exists x(Bx \wedge Mx)$	?
2	$\forall x(Mx \rightarrow \neg Vx)$	?
3 ▪	$\forall x(Bx \Rightarrow Vx)$	?
4 ▪	$Ba \wedge Ma$	?
5 ▪	$Ma \Rightarrow \neg Va$	?
6 ▪	$Ba \Rightarrow Va$	?
7 ▪	Ma	?
8 ▪	$\neg Va$	?
9 ▪	Ba	?
10 ▪	Va	?
11 ▪	$Va \wedge \neg Va$	?
12	$\neg\forall x(Bx \Rightarrow Vx)$	?

b)
1	Ab	?
2	$\forall x(Ax \Rightarrow Cx)$	?
3	$Ab \Rightarrow Cb$	?
4	Cb	?

č)
1	$\exists x(Cx \wedge Nx)$	?
2 ▪	$\forall x(Cx \Rightarrow \neg Nx)$	?
3 ▪	$Ca \wedge Na$	?
4 ▪	$Ca \Rightarrow \neg Na$	?
5 ▪	Ca	?
6 ▪	$\neg Na$	?
7 ▪	Na	?
8 ▪	$Na \wedge \neg Na$	?
9	$\neg\forall x(Cx \Rightarrow \neg Nx)$	?

c)
1	$\neg De$	?
2	Fe	?
3 ▪	$\forall x(Fx \Rightarrow Dx)$	?
4 ▪	$Fe \Rightarrow De$	?
5 ▪	De	?
6 ▪	$De \wedge \neg De$	?
7	$\neg\forall x(Fx \Rightarrow Dx)$	?

d)
1	$\forall x(Dx \Rightarrow Ex)$	?
2	$\exists x(Fx \wedge \neg Ex)$	?
3 ▪	$\forall x(Fx \Rightarrow Dx)$	?
4 ▪	$Fg \wedge \neg Eg$	?
5 ▪	Fg	?
6 ▪	$\neg Eg$	?
7 ▪	$Fg \Rightarrow Dg$	?
8 ▪	Dg	?
9 ▪	$Dg \Rightarrow Eg$	?
10 ▪	Eg	?
11 ▪	$Eg \wedge \neg Eg$	?
12	$\neg\forall x(Fx \Rightarrow Dx)$	?

6. Iz zgodovine logike

1. Prvi aksiomatizirani sistem logike je izdelal nemški logik Gottlob Frege v znamenitem delu *Begriffschrift* (Pojmovna notacija) leta 1879. Za izjavni račun se njegovi aksiomi, ko jih zapišemo v poljski notaciji, glasijo:

I.	$CpCqp$	IV.	$CCpqCNqNp$
II.	$CCpCqrCCpqCpr$	V.	$CNNpp$
III.	$CCpCqrCqCpr$	VI.	$CpNNp$

a) Zapiši te izjave v običajnem simbolizmu.

b) Pokaži, da so te izjave tavtologije.

c) Pokaži, da ima ta sistem "lepotno napako" – tretji aksiom se da izpeljati iz prvih dveh. Pri tem smemo uporabljati le modus ponens in zamenjavo

enostavnih izjav s poljubnimi izjavami. To je prvi pokazal poljski logik Jan Łukasiewicz.

2. Frege je napisal zasnovo matematike na osnovi logičnih zakonov.

Toda leta 1902 je Bertrand Russell pokazal, da Fregejeva zasnova ni neoporečna. Če namreč definiramo množico vseh tistih množic, ki nimajo same sebe za elemente, sledi protislovje.

a) Izpelji protislovje iz te definicije.

b) V nekem mestu brivec brije tiste in samo tiste meščane, ki se ne brijejo sami. Dokaži, da je brivec star 20 let.

3. Kasneje je Russell napisal slovito delo *Principia Mathematica*, ki je imelo precejšen vpliv na razvoj matematične logike. Toda leta 1931 je takrat 25-letni Kurt Gödel dokazal, da se v okviru tega formalizma dá zapisati trditev, ki je resnična, ni pa dokazljiva. Še več, Gödel je pokazal, da je vsak sistem, ki vsebuje naravna števila in je neprotisloven, nepopoln v tem smislu. Oglejmo si nekaj popularnih prikazov tega rezultata, ki si jih je zamislil Raymond Smullyan.

a) Premisli o naslednjem paradoksu:

Tega stavka ni mogoče dokazati.

Paradoks je v temle: Če je stavek neresničen, potem ga je mogoče dokazati in mora zato biti resničen. Pri predpostavki, da je stavek napačen, smo prišli do protislovja. Torej je stavek resničen. In ker je resničen, mora to, kar pravi, veljati, to je, da ga ni mogoče dokazati. Toda mi smo dokazali, da je resničen. Torej smo ga dokazali.

Kje je napaka v zgornjem sklepanju?

b) Gödlov stroj. Gödlov stroj je računalnik, ki lahko izpisuje *izraze*, sestavljene iz znakov $I, N, D, *$. Izraz je *izpisljiv*, če ga stroj lahko izpiše. *Stavek* je izraz takšnih oblik: (1) $I*X$, (2) $NI*X$, (3) $ID*X$ ali $NID*X$, kjer je X poljuben izraz iz danih simbolov. Pomeni stavkov so tile: (1) $I*X$ je resničen, če in samo če je X izpisljiv; (2) $NI*X$ je resničen natanko takrat, kadar X ni izpisljiv; (3) $ID*X$ je resničen tedaj in le tedaj, kadar je izraz XX izpisljiv (izrazu XX rečemo *dvojni* X, odtod oznaka D); (4) izraz $NID*X$ je resničen, kadar izraz XX ni izpisljiv.

Dano je še, da je stroj popolnoma zanesljiv, to je, da izpisuje samo resnične stavke.

Poišči resničen stavek, ki ga stroj ne more izpisati.

4. Preberi naslednje odlomke iz knjige: L. Wittgenstein, *Logično filozofski traktat*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1976, str. 123.

5.53 Enakost predmetov izražamo z enakostjo znakov in ne z enačajem. Različnost predmetov pa z različnostjo znakov.

5.5303 Mimogrede: reči za dve stvari, da sta si istovetni, je nesmisel, in če rečemo za eno stvar, da je identična sama s seboj, ne povemo prav nič.

5.531 Zatorej ne pišem "$P(a,b) \wedge a = b$", ampak "$P(a,a)$" (ali "$P(b,b)$"), In ne "$P(a,b) \wedge \neg a = b$", temveč "$P(a,b)$".

5.532 In analogno: ne "$(\exists x, y)(P(x,y) \wedge x = y)$", ampak "$(\exists x)P(x,x)$", in ne "$(\exists x, y)(P(x,y) \wedge \neg x = y)$", temveč "$(\exists x, y)P(x,y)$".

a) V našem simbolizmu različnost spremenljivk ni izključevala nanašanja na isti objekt. Kako je s tem pri Wittgensteinu?

b) Kako bi v Wittgensteinovem smislu zapisal naslednje izjave:

Natanko en x ima lastnost R.

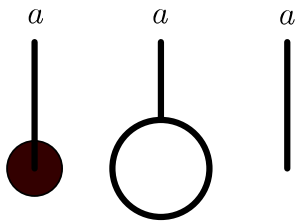
Natanko dve reči imata lastnost R.

Natanko tri reči imajo lastnost R.

Vsaj ena reč ima lastnost R.

Največ en x ima lastnost R.

5. V logičnem sistemu, ki ga je zasnoval Frege, imamo samo eno vrsto *imen* – to so *lastna imena*. V sistemu, ki ga je predlagal poljski logik Stanisław Leśniewski (1886–1939), je ime lahko tudi obče – to je, da zaznamuje več kot eno reč, lahko je navidezno ime in ne zaznamuje ničesar. Naslednji diagrami prikazujejo odnos lastnega, občega in navideznega imena do označenega objekta (objektov):



a) Razporedi na te tri skupine naslednje izraze:

$1, e, 10$, sodo število, $2, 0/0, 1/0$, kvadrat, okrogel kvadrat.

b) Izjava $a \,\varepsilon\, b$ (beremo: a je b) je resnična, če je a lastno ime, b pa lastno ali obče ime, ki zaznamuje tudi tisti objekt, ki ga označuje a. Kako izgleda diagram za resničnost izjave $a \,\varepsilon\, b$?

c) Zapiši v tem simbolizmu izjave:

2 je praštevilo. 2 je liho število. Ljubljana je mesto. 2 je 2. Sava je naša najdaljša reka.

6. Relacijo $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ med dvema množicama izjav je proučeval nemški logik Gerhard Gentzen (1909–1945). Izjava $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ je resnična, če in samo če je vsaj ena izjava iz množice $\mathscr{A}$ neresnična, ali pa vsaj ena izjava iz množice $\mathscr{B}$ resnična.

a) Pokaži, da je relacija $\models$ poseben primer relacije $\to$.

b) Dokaži, da velja naslednje pravilo sklepanja:

Če $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$, X in X, $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$, potem $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$.

7. Nekaj logičnih nalog

1. V sobi sedita dva zakonska para. Trije ljudje izmed njih vedno govore resnico, četrti pa se včasih tudi zlaže. Kako bi z dvema vprašanjema ugotovili, kdo je s kom poročen?

2. V neki ustanovi imajo tri računalnike, vse različnih znamk. Programirani so tako, da daje računalnik CDC vedno pravilne odgovore, računalnik IBM vedno napačne, računalnik DEC pa nepredvidljive. Ko je profesor Binarni obiskal ustanovo, je vprašal manjša dva računalnika: "Katere znamke je največji računalnik?" Prvi računalnik je odgovoril: "CDC," drugi pa: "IBM ni." Profesor je takoj ugotovil znamko največjega računalnika, čeprav ni videl oznak na njih. Katera je?

3. Znani logik De Morgan (1806–1871) je napisal naslednjo anekdoto:

Neko starejšo redovnico je pogosto obiskoval mlajši gospod in predstojnici samostana se je zdelo potrebno, da jo vpraša, kdo je to. "Neki bližnji sorodnik," je odgovorila redovnica. "Ampak kakšen sorodnik?" je hotela vedeti predstojnica. "O, gospa," je rekla redovnica, "res bližnji sorodnik, saj je njegova mati bila edini otrok moje matere." Predstojnica je bila s tem odgovorom zadovoljna. Veliko ljudi, ki so slišali o tem, pa se je trudilo, da bi ugotovilo, kakšno sorodstvo je to. Kako sta si torej v sorodu redovnica in njen obiskovalec?

4. V neki ustanovi imajo dva računalnika, in sicer znamk IBM in CDC. Programirana sta tako, da daje eden vedno pravilne, drugi pa vedno nepravilne odgovore. Ko je profesor Binarni obiskal ustanovo, je vprašal manjši računalnik: "Kaj bi odgovoril večji računalnik na vprašanje, ali je manjši računalnik CDC?"

Profesor je dobil "ne".

Katere znamke je manjši računalnik?

5. Trije bratje so nekega dne obiskali prijatelja v bolnišnici. Istega dne so to storile tudi njihove žene. Vsak izmed njih je bil pri prijatelju samo enkrat.

Vsak od treh bratov je tam srečal obe svoji svakinji in nobenega brata. Ali je kdo izmed njih srečal tudi svojo ženo?

6. Izmed treh fantov in treh deklet se vsak fant pozna natanko z dvema dekletoma, vsako dekle pa natanko z dvema fantoma. Ali jih lahko razvrstimo v pare tako, da se v vsakem paru dekle in fant poznata?

7. V nekem odboru v OZN velja naslednje: predstavnik Rusije zna od tujih jezikov samo francosko, Američan pa samo špansko. Poljubna trojica, v kateri sta tudi Rus in Američan, se lahko med seboj pomeni (to je, eden izmed trojice zna neki jezik, ki ga govori drugi, in enega, ki ga govori tretji). Ali se lahko pomeni tudi poljubna trojica?

8. Kovačevi se takole pogovarjajo:

Mati: Danes so mi povedali, da je Kranjčev sin Janez diplomiral, čeprav je star šele enaindvajset let.

Oče: Ljubica, ti si nekaj pomešala! Kranjčevemu sinu je ime Peter in je pred kratkim praznoval osemnajsti rojstni dan.

Hči: Poznam samo Kranjčevo ženo in spominjam se, da je rekla, da je sin star petindvajset let, vendar ga je imenovala drugače kot "Janez".

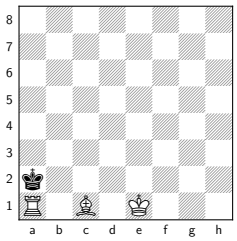
Kako je ime Kranjčevemu sinu in koliko je star, če je pri vsakem odgovoru točen samo podatek o letih ali pa samo podatek o imenu?

9. Profesor Binarni je imel eno črno in več belih kap. Poklical je dva najbolj nadarjena učenca, ju postavil drugega za drugim in jima položil kapi na glavo, tako da nobeden ni mogel videti barve kape, ki jo ima sam na glavi, kot tudi ne kap, ki so preostale. Najprej je vprašal tistega učenca, ki je imel drugega pred seboj, kakšno kapo ima sam na glavi. Ta je odgovoril, da ne ve. Kakšno kapo ima na glavi drugi učenec?

10. Tri osebe – A, B in C – so vsi odlični logiki. Vsak lahko izpelje vse posledice poljubnega števila premis. Vsak tudi ve, da sta druga dva odlična logika.

Vsem trem so pokazali sedem znamk: dve rdeči, dve rumeni in tri zelene. V temi so vsakemu prilepili eno znamko na čelo, druge pa so spravili v predal. Ko so spet prižgali luč, so vprašali osebo A, ali ve za eno od barv, katere znamke nima prilepljene. Oseba A je odgovorila, da ne ve. Po tem so isto vprašali osebo B in odgovor je bil "ne". Ali je možno iz teh informacij sklepati, kakšne barve je znamka A-ja, B-ja ali C-ja.

11. Ali je možna naslednja situacija?



Več takih nalog bo bralec našel v knjižici R. Smullyana *The Chess Mysteries of Sherlock Holmes*. Knjigo smo leta 1986 dobili v slovenskem prevodu.

12. Leta 1982 so trije pari skupaj proslavljali dan republike. Vsak mož je brat ene od žena in vsaka žena je sestra enega od mož. Helena je 26 tednov starejša od svojega moža, ki je bil rojen avgusta. Kovačeva sestra je poročena s svakom Heleninega brata. Poročila sta se na njen rojstni dan: to je januarja. Marta Kovač ni tako visoka kot Vili Kranjc. Arturjeva sestra je lepša od Beti. Janez je star 50 let.

Kako je ime gospe Kos?

Rešitve nalog

1. Izjave

1.

a) Dokažimo trditev za pravilo $\neg \Rightarrow$. Izjava $\neg(A \Rightarrow B)$ je resnična natanko tedaj, kadar je $A \Rightarrow B$ neresnična. To pa je natanko tedaj, kadar je A resnična, B pa neresnična, ali drugače povedano: A resnična in $\neg B$ resnična.

b) Dokažimo trditev za pravilo $\Rightarrow$. Izjava $A \Rightarrow B$ je resnična natanko takrat, ko je A neresnična ali B resnična, to je, ko je resnična vsaj ena od izjav $\neg A$ ali B.

č)

$A \Leftrightarrow B$	
A	$\neg A$
B	$\neg B$

$\neg(A \Leftrightarrow B)$	
$\neg A$	A
B	$\neg B$

d)

$A \veebar B$	
A	$\neg A$
$\neg B$	B

$\neg(A \veebar B)$	
A	$\neg A$
B	$\neg B$

$A \uparrow B$	
$\neg A$	$\neg B$

$\neg(A \uparrow B)$
A
B

$A \downarrow B$
$\neg A$
$\neg B$

$\neg(A \downarrow B)$	
A	B

e) $\dfrac{\neg 1}{0}$ $\qquad$ $\dfrac{\neg 0}{1}$

2.

a) $p \wedge q$
b) p
c) $p \wedge \neg q$
č) $\neg p \wedge q$
d) $\neg p \wedge \neg q$
e) $p \wedge r$
f) $\neg(p \wedge r)$
g) $\neg(p \wedge r)$
h) $\neg p \wedge \neg r$
i) $\neg(\neg(p \wedge r))$
j) $p \Rightarrow \neg q$
k) $p \wedge r \wedge \neg q \wedge \neg s$
l) $\neg p \wedge \neg r$ (morda $\neg(p \wedge r)$)
m) $p \vee q$ (večkrat tudi $p \veebar q$)
n) $p \veebar q$
o) $\neg(\neg p \wedge \neg r)$ (morda $\neg(\neg(p \wedge r))$)
p) $\neg(p \vee q)$ (včasih tudi $\neg(p \veebar q)$)
r) $\neg(p \veebar q)$
s) $(p \wedge r) \vee (q \wedge s)$
š) $\neg((p \wedge r) \vee (q \wedge s))$
t) $(p \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg s)$
u) $\neg((p \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg s))$

3.

a) $f(-1) = 1, f(1) = 1, f(0) = 0, g(-2) = 4, g(0) = 0, g(1) = -2,$
$g(2) = -3, h(-1) = 2, h(0) = 1, h(1) = 0, f(f(1)) = 1, g(g(-1)) = -3,$
$g(g(1)) = 4, g(g(2)) = 6, h(h(-1)) = -3, h(h(0)) = 0, h(h(1)) = 1,$
$g(h(-1)) = -3, h(g(2)) = 10$

b)

$h(x) = 2$	$h(x) = -1$
$2 = x^2 + 1 \wedge x \leq 0$	$-1 = -x^2 + 1 \wedge x > 0$
$x = -1$	$x^2 = 2, x = \sqrt{2}$
$g(x) = 2$	$g(x) = 0$
$2 = -2x \wedge x \leq 1$	$0 = -2x \wedge x \leq 1$
$x = -1$	$x = 0$

c) $$\begin{aligned} y = h(h(x)) &\Leftrightarrow (x \le 0 \Rightarrow y = -(x^2+1)^2+1) \wedge \\ &\quad (0 < x < 1 \Rightarrow y = -(-x^2+2)^2+1) \wedge \\ &\quad (x \ge 1 \Rightarrow y = (-x^2+1)^2+1) \\ y = g(g(x)) &\Leftrightarrow (x < -1/2 \Rightarrow y = -(-2x-1)^2-2) \wedge \\ &\quad (-1/2 \le x \le 1 \Rightarrow y = -2(-2x)) \wedge \\ &\quad (x > 1 \Rightarrow y = -2(-(x-1)^2-2)) \\ y = g(h(x)) &\Leftrightarrow (x :\le 0 \Rightarrow y = -(x^2+1-1)^2-2) \wedge \\ &\quad (x > 0 \Rightarrow y = -2(-x^2+1)) \end{aligned}$$

4.

a)

A	B	C	ČE A, POTEM B, SICER C
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

b) ČE A, POTEM B, SICER $C \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow C)$

c)

ČE A, POTEM B, SICER C	
A	$\neg A$
B	C

$\neg$ ČE A, POTEM B, SICER C	
A	$\neg A$
$\neg B$	$\neg C$

č) $y = f(x) \Leftrightarrow$ ČE $x \ge 0$, POTEM $y = x$, SICER $y = -x$
$y = g(x) \Leftrightarrow$ ČE $y \le 1$, POTEM $y = -2x$, SICER $y = -(x-1)^2 - 2$
$y = h(x) \Leftrightarrow$ ČE $x \le 0$, POTEM $y = x^2+1$, SICER $y = -x^2+1$
$y = h(h(x)) \Leftrightarrow$ ČE $x \le 0$, POTEM $y = -(x^2+1)^2+1$,
SICER ČE $0 < x < 1$, POTEM $y = -(-x^2+1)^2+1$,
SICER $y = (-x^2+1)^2+1$
$y = g(g(x)) \Leftrightarrow$ ČE $x < -1/2$, POTEM $y = -(-2x-1)^2-2$,
SICER ČE $-1/2 \le x \le 1$, POTEM $y = -2(-2x)$,
SICER $y = -2(-(x-1)^2-2)$

5.

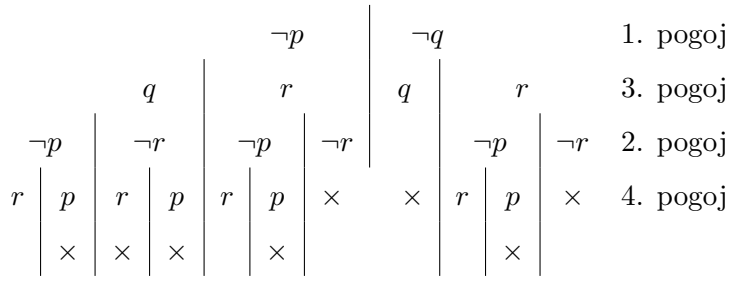
a) Začetna množica je protislovna. Pravimo tudi, da je drevo zaprto.

b) Če končamo v 3.4, začetna množica ni protislovna. Nabor vrednosti za enostavne izjave, ki naredi vse izjave začetne množice za resnične, dobimo tako, da izberemo vejo, ki ni mrtva, enostavnim izjavam, ki ji pripadajo,

priredimo vrednost 1. Če negacija enostavne izjave pripada veji, ji priredimo 0. Če ni ne eno, ne drugo, enostavni izjavi priredimo katerokoli vrednost.

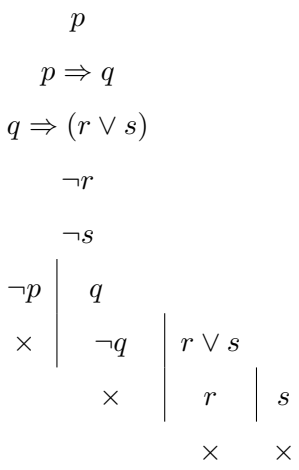
č) 1.

$$\left.\begin{array}{l} p \Rightarrow \neg q \\ p \Rightarrow \neg r \\ q \vee r \\ \neg r \Rightarrow p \end{array}\right\} \text{ izjave dane množice}$$



Mrtve veje smo zaznamovali z $\times$. Na vseh živih vejah se pojavljata $\neg p$ in r. Če priredimo izjavi p vrednost 0 in izjavi r vrednost 1, je začetna množica izjav resnična.

2.



To je drevo s samimi mrtvimi vejami (zaprto drevo). Začetna množica je protislovna.

d) Semantično drevo za negacijo izjave $\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p \wedge \neg q$ je zaprto; sama izjava je tavtologija.

$$\neg(\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p \wedge \neg q)$$
$$\neg(p \vee q)$$
$$\neg(\neg p \wedge \neg q)$$
$$\neg p$$
$$\neg q$$
$$\begin{array}{c|c} \neg\neg p & \neg\neg q \\ p & q \\ \times & \times \end{array}$$

7. Če na otoku resničnikov in neresničnikov oseba A izjavi p in če uvedemo enostavno izjavo

$$a \equiv \text{oseba } A \text{ je resničnik},$$

potem na osnovi izjave p vemo le

$$a \Leftrightarrow p$$

To je, če je A resničnik, potem je izjava p resnična, če pa je A neresničnik, je p neresnica.

a) Uvedimo še: $b \equiv$ oseba B je resničnik. Potem pogoje naloge strnemo v izjavo $a \Leftrightarrow (a \Rightarrow b)$. Semantično drevo zanjo je:

$$\begin{array}{c|c} a \Leftrightarrow (a \Rightarrow b) & \\ a & \neg a \\ a \Rightarrow b & \neg(a \Rightarrow b) \\ \neg a \mid b & a \\ & \neg b \\ \times & \times \end{array}$$

Imamo eno samo možnost za resničnost pogojev, to je, da sta resnični izjavi a in b.

c) Izjava $2 + 2 = 5$ ni resnica, zato jo lahko zamenjamo z izjavo 0. Pogoj naloge se glasi $a \Leftrightarrow (a \Rightarrow 0)$. Drevo za to izjavo je zaprto, kar pomeni, da so pogoji protislovni.

8. Vpeljimo naslednje oznake:
   $p \equiv$ Andrej je (danes) šunko.
   $q \equiv$ Boris je šunko.
   $r \equiv$ Cene je šunko.

Potem $\neg p$ pomeni, da Andrej je pečenko. Pogoje naloge lahko zapišemo: $p \Rightarrow \neg q$, $p = \neg r$, $q \vee r$. Drugi pogoj zamenjamo z dvema $p \Leftrightarrow \neg r$, $\neg r \Rightarrow p$. Semantično drevo za to množico smo opisali v nalogi 5.č. Iz njegovega opisa razberemo, da Andrej vedno je pečenko, Cene vedno šunko, Boris pa lahko naroči enkrat eno, drugič drugo.

9. Vpeljimo oznake $j \equiv$ Janez je kriv, $p \equiv$ Peter je kriv, $t \equiv$ Tomaž je kriv. Izjave osumljenih lahko zapišemo:

$$p \wedge \neg t, j \Rightarrow t, \neg t \wedge (p \vee j)$$

a) Konstruiraj semantično drevo za to množico izjav.

b) Pokaži, da je $p \wedge \neg t \Rightarrow (\neg t \wedge (p \vee j))$ tavtologija.

c) Če imajo p, t, j vse vrednost 0, kakšne so vrednosti izjav, ki so jih dali osumljeni?

č) Isto kot a).

d) Pogoji so tile:

$\neg j \Leftrightarrow (p \wedge \neg t), \neg p \Leftrightarrow (j \Rightarrow t), \neg t \Leftrightarrow (\neg t \wedge (j \vee p))$.

2. Enakovredne izjave

1. Z znakom $\equiv$ vpeljujemo nov znak ali okrajšavo.

Če velja $a \sim b$, potem seveda velja $a \Leftrightarrow b$. Obratno pa ni vedno res. Janez in Peter rabita veznik "če in samo če" v različnih pomenih.

Izjave $p \equiv$ danes je četrtek, $q \equiv$ jutri je petek in $r \equiv$ jutri je sobota so v torek vse neresnične. Zato sta $p \Leftrightarrow q$ in $p \Leftrightarrow r$ obe resnični. Torej je Janez lahko uporabil "če in samo če" v pomenu $\Leftrightarrow$. Izjavi $p \sim q$ in $p \sim r$ sta obe napačni. Petrova raba je torej različna od obeh, pa vendarle povsem običajna.

2.

a) $\neg(A \Rightarrow B) \sim A \wedge \neg B, A \Rightarrow B \sim \neg A \vee B, \neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$ itd.

3.

A	B	C	$(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow C)$			$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$		
0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0

4.

a) Absolutna vrednost $y = |x|$

b) $|2|x| + 4| = 5 \sim (x \geq 0 \wedge |2x + 4| = 5) \vee (x < 0 \wedge |-2x + 4| = 5) \sim$
$(x \geq 0 \wedge x \geq -2 \wedge 2x + 4 = 5) \vee (x \geq 0 \wedge x < -2 \wedge -(2x + 4) = 5) \vee$
$(x < 0 \wedge x \leq 2 \wedge -2x + 4 = 5) \vee (x < 0 \wedge x > 2 \wedge -(-2x + 4) = 5) \sim$
$(x \geq 0 \wedge x \geq -2 \wedge x = 1/2) \vee (x < 0 \wedge x \leq 2 \wedge x = -1/2) \sim$
$x = 1/2 \vee x = -1/2 \sim x \in \{1/2, -1/2\}$

c)

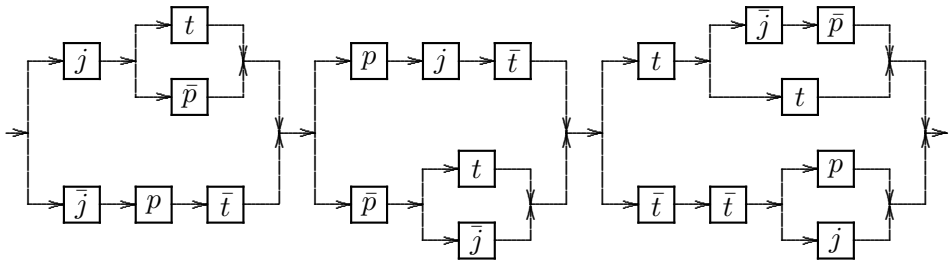
$$||2x - 6| - 5| > 1$$

$2x - 6 \geq 0$		$2x - 6 < 0$	
$x \geq 3$		$x < 3$	
$\|2x - 6 - 5\| > 1$		$\|-(2x - 6) - 5\| < 1$	
$\|2x - 11\| > 1$		$\|-2x + 1\| > 1$	
$2x - 11 \geq 0$	$2x - 11 < 0$	$-2x + 1 \geq 0$	$-2x + 1 < 0$
$x \geq 11/2$	$x < 11/2$	$x \leq 1/2$	
$2x - 11 > 1$	$-(2x - 11) > 1$	$-2x + 1 > 1$	$\times$
$x > 6$	$x < 5$	$x < 0$	
$x \in (6, \infty)$	$x \in [3, 5)$	$x \in (-\infty, 0)$	

R: $x \in (-\infty, 0) \cup [3, 5) \cup (6, \infty)$

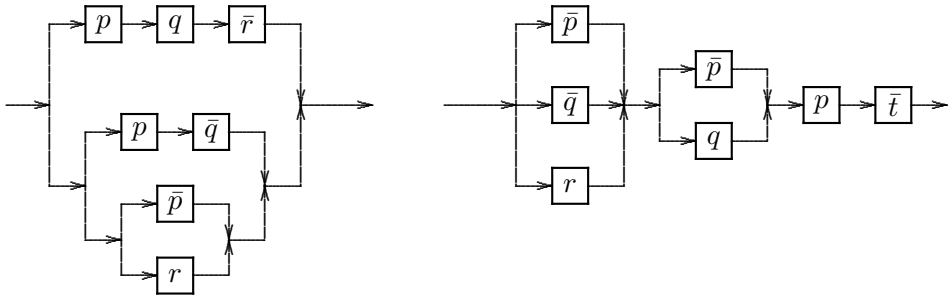
5.

b)



Omrežje prevaja tok, če veljajo: $t, \neg p, j$ (glej nalogo 9.d v 1. pogl.).

6. Omrežji, ki pripadata izjavi $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ in njeni negaciji, sta:



Katerokoli pot v omrežju za negacijo izjave vzamemo, npr. $\{r, q, p, \neg r\}$, ta vsebuje kakšno enostavno izjavo in njeno negacijo. Zato vezje ne prevaja toka. Na omrežju za prvotno izjavo poti ustreza "prečna" pot (npr. $\{\neg r, \neg q, \neg p, r\}$). Vsaka prečna pot v omrežju za tavtologijo vsebuje protislovje.

7.

a) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$

$p \Leftrightarrow q$		$\neg(p \Leftrightarrow q)$	
r		$\neg r$	
p	$\neg p$	p	$\neg p$
q	$\neg q$	$\neg q$	q

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r \sim (r \wedge p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge \neg p \wedge q)$$

$(p \Rightarrow \neg q) \wedge (p \Rightarrow \neg r) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg r \Rightarrow p) \sim$
$(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg q \wedge r \wedge \neg p) \sim \neg p \wedge r$

8. Pogoj za kontrolo je izjava: $d_1 \wedge d_2 \wedge s \wedge ((f \wedge d \wedge b_2) \vee (\neg f \wedge b_1))$.

9.

f)	$\neg p \vee \neg r$	p)	$\neg p \vee q$
i)	$p \wedge r$	š)	$(\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg s)$
o)	$p \vee r$	u)	$(\neg p \vee \neg r) \wedge (q \vee s)$

10.

a) $s \equiv \neg(p \wedge q) \wedge (p \vee q)$
$c \equiv p \wedge q$

p	q	S	C
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

č) $f(p, q, r) \equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

3. Sklepanje

1.
b) Vpeljimo oznake: $p \equiv$ danes je sreda, $q \equiv$ jutri je četrtek, $r \equiv$ jutri je petek.

Izjavi $p \Rightarrow q$ in $p \Rightarrow r$ sta resnični, izjavi $p \models q$ in $p \models r$ pa ne.

Janez, Peter in Tomaž uporabljajo veznika "če, potem" v različnih pomenih.

2.
a) Vzemimo npr. sklep $A, \neg B \models \neg(A \Rightarrow B)$. Pokazati moramo, da je množica $\{A, \neg B, \neg\neg(A \Rightarrow 8)\}$ protislovna.

Drevo zanjo je zaprto:

$$\begin{array}{c} A \\ \neg B \\ \neg\neg(A \Rightarrow B) \\ A \Rightarrow B \\ \hline \neg A \mid B \\ \times \mid \times \end{array}$$

3.
a) Glej nalogo 5.č.1.

b) Če želimo dokazati $\mathscr{A} \not\models B$, moramo najti tako prireditev vrednosti enostavnim izjavam, da bodo vse izjave iz $\mathscr{A}$ resnične, B pa neresnična izjava. Semantično drevo za množico $\mathscr{A}$ tedaj vsebuje odprto (živo) vejo, ki ji B ne pripada. Če mora biti še $\mathscr{A} \not\models B$, moramo imeti še živo vejo brez izjave $\neg B$.

Drevo za $\{A \Leftrightarrow A \wedge B, A \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)\}$ je:

$$\begin{array}{c} A \Leftrightarrow (A \wedge B) \\ A \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B) \\ \hline A \mid \neg A \\ A \wedge B \mid \neg(A \wedge B) \\ B \mid \neg A \qquad\qquad \mid \neg B \\ \hline A \mid \neg A \mid \neg A \mid \neg(A \Leftrightarrow B) \mid A \mid \neg A \\ A \Leftrightarrow B \mid \neg(A \Leftrightarrow B) \mid A \Leftrightarrow B \mid \neg(A \Leftrightarrow B) \mid A \Leftrightarrow B \mid \neg(A \Leftrightarrow B) \\ A \mid \neg A \mid \times \mid \times \mid \neg A \mid A \mid \times \mid \neg A \mid B \\ B \mid \neg B \qquad\qquad\qquad\qquad\quad B \mid \neg B \qquad\quad\; B \mid \neg B \\ \times \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \times \qquad\qquad\quad \times \mid \times \end{array}$$

Torej niti A niti $\neg A$ ni izpeljiva, zato pa je B, saj nastopa B na vseh živih vejah.

OPOMBA. Drevo za dano množico izjav se lahko zelo razbohoti. Da se to ne bi zgodilo, upoštevajmo nekaj pravil: Nobene izjave ne pišimo dvakrat na isti veji. Pravilo $\neg\neg A \sim A$ upoštevajmo, ne da bi to posebej zapisovali. Recimo, da na veji nastopata A in $A \Rightarrow B$. Ali lahko dodamo k veji izjavo B? Kaj pa, če imamo A in $A \Leftrightarrow B$ ali $\neg A$ in $A \Leftrightarrow B$ ali $A \Rightarrow B$ in $\neg B$. V teh primerih lahko drevesa oklestimo mrtvih vej:

A	$\neg B$	A	$\neg A$
$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
$\neg A \mid B$	$\neg A \mid B$	$A \mid \neg A$	$A \mid \neg A$
$\times$	$\times$	$B \mid \neg B$	$B \mid \neg B$
		$\times$	$\times$
A	$\neg B$	A	$\neg A$
$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
B	$\neg A$	B	$\neg B$

Za končno obravnavo so važne samo žive veje in enostavne izjave ali njihove negacije na njih. Zato bomo večkrat od vsega drevesa zapisali samo te.

d) Vpeljimo enostavne izjave: $l_1 \equiv$ prvi vedno laže; $l_2 \equiv$ drugi vedno laže; $j \equiv$ prvi je Janez; potem $\neg j \equiv$ drugi je Janez.

Odgovor drugega je "DA".

$$\begin{array}{c} l_1 \vee l_2 \\ l_1 \Rightarrow \neg j \\ l_2 \Rightarrow j \\ l_1 \mid l_2 \\ \neg j \mid j \end{array}$$

Odgovor drugega je "NE".

$$\begin{array}{c} l_1 \vee l_2 \\ l_1 \Rightarrow \neg j \\ l_2 \Rightarrow \neg j \\ l_1 \mid l_2 \\ \neg j \mid \neg j \end{array}$$

Odgovor je bil torej "NE". Druga oseba je Janez.

e) Vpeljimo oznake: $a \equiv A$ je resničnik; $b \equiv B$ je resničnik. Pokaži, da $a \Leftrightarrow \neg(a \wedge b) \models a$ in $a \Leftrightarrow \neg(a \wedge b) \models \neg b$ (glej c), torej odgovor osebe A ni bil "NE". Kaj bi bilo, če bi bil odgovor na drugo vprašanje "DA"? (glej b)

Torej je bil drugi odgovor "NE". Oba sta torej neresničnika (glej č).

4.

a) $\neg p \Rightarrow \neg z, \neg v \Rightarrow \neg p, z \models v$ Sklep je pravilen.

b) $p \Rightarrow o, k \Rightarrow v, \neg o \vee \neg v \models \neg p \vee \neg k$ Sklep je pravilen.
c) $\neg d \Rightarrow p, d \models p$ Sklep ni pravilen.
č) $d \Rightarrow h \wedge r, \neg d \models \neg h \vee \neg r$ Sklep ni pravilen.
d) $a \Rightarrow n \vee l, \neg n \wedge \neg l \models \neg a$ Sklep je pravilen.
e) $k \Rightarrow d \vee s, d \Rightarrow (s \Rightarrow u) \models \neg k$ Sklep ni pravilen.
f) $m \Rightarrow (\neg(p \vee o) \Rightarrow d), \neg o \models m \wedge \neg d \Rightarrow p$ Sklep je pravilen.
g) $\neg c \Rightarrow i, c \Rightarrow (\neg k \Rightarrow h), i \Rightarrow \neg p \models p \wedge \neg k \Rightarrow h$ Sklep je pravilen.
h) $x + 3 = \sqrt{3 - x} \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 3 - x$,
$x^2 + 6x + 9 = 3 - x \Leftrightarrow (x + 6)(x + 1) = 0$,
$(x + 6)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -6 \vee x = -1$
$\models x + 3 = \sqrt{3 - x} \Rightarrow x = -1 \vee x = -6$
Sklep je pravilen.
i) Sklep ni pravilen (če je zaključek $x = -1 \vee x = -6 \Rightarrow x + 3 = \sqrt{3 - x}$).

5. Naj bo x poljuben član kluba. Zaznamujmo: $p \equiv x$ je član finančnega odbora; $q \equiv x$ je član splošne direkcije; $r \equiv x$ je član knjižničnega sveta. Potem lahko pogoje zapišemo: $p \Rightarrow q, q \wedge r \Rightarrow p, r \Rightarrow \neg q$.

Dokaži: $p \Rightarrow q, r \Rightarrow \neg q \models q \wedge r \Rightarrow p$.

6.
a) Osumljeni ne more biti hkrati v New Yorku in Madisonu.
b) Če ni dokazov, ni kriv.
c) Če ni dokazov, mora biti oproščen.
č) Nočem zamuditi.

7. Drevo za množico $\{r \Rightarrow X, l \Rightarrow \neg X, r \Rightarrow \neg l, r \vee l\}$ mora biti zaprto:

r	l	Zato mora veljati: $X \models l \vee \neg r$, saj prvo vejo
$\neg l$	$\neg r$	lahko zapremo samo z l (zaradi $\neg l$) ali z $\neg r$ (za-
X	$\neg X$	radi r).

Podobno $\neg X \models \neg l \vee r$ ali, kar je isto, $l \wedge \neg r \models X$. Zato mora veljati $l \wedge \neg r \models X \models l \vee \neg r$. Rešitve so $X_1 \equiv l$, $X_2 \equiv l \wedge \neg r$, $X_3 \equiv l \vee \neg r$, $X_4 \equiv \neg r$.

Pokaži še $r \Rightarrow \neg l \models X_1 \Leftrightarrow X_2$, $r \Rightarrow \neg l \models X_3 \Leftrightarrow X_4$.

8.

s	$\neg s$	To drevo moramo zapreti: $X \models p \vee \neg s$, $\neg X \models s$,
X	$\neg X$	$\neg s \models X$. Pogoj je $\neg s \models X \models p \vee \neg s$.
$\neg p$		

Imamo dve rešitvi: $X_1 \equiv \neg s$, $X_2 \equiv p \vee \neg s$. Prva ne pride v poštev, ker je $s \Leftrightarrow \neg s$ protislovje.

9. $X \equiv (p \vee q) \wedge \neg r$

10.

b) Vpeljimo oznake: $s \equiv$ vprašani je popolnoma priseben, $p \equiv$ vprašani je pacient.

Izjavo vprašanega zaznamujmo z X. Inšpektor je sklepal $s \Leftrightarrow X \models s \wedge p$. Drevo za $\{s \Leftrightarrow X, \neg(s \wedge p)\}$ smo obravnavali v nalogi 8. Rešitev $X_2 \equiv p \vee \neg s$ ali $\neg(s \wedge \neg p)$ preberemo: Nisem priseben zdravnik.

11. Zaznamujmo z r izjavo, da je vprašani deželan resnicoljub, in z a izjavo, da v mesto vodi desna pot. Ali lahko postavimo vprašanje X tako, da bo popotnik na osnovi odgovora "da" sklepal, da desna pot pelje v mesto, če pa je odgovor "ne", pa da leva pot vodi v mesto? Množici $\{r \Leftrightarrow X, \neg a\}$ in $\{r \Leftrightarrow \neg X, a\}$ morata biti protislovni. Rešitev je $X \equiv r \Leftrightarrow a$. Kako bi izjavo X prevedel v pogovorni jezik?

12. Zaznamujmo: $r \equiv$ priprti je resnicoljub, $l \equiv$ priprti je neresničnik. Glej nalogo 7.

13. Najprej z enim vprašanjem poiščemo nekoga, ki ni lažnivec. Eno od takih vprašanj je (vprašamo prvega in pokažemo na drugega): Ali je res, da tale ni resničnik, eden od vaju pa je neresničnik?

14.

a) Izpeljevanje je pod i) za en korak daljše, in sicer za korak združitve $C, \neg C \models C \wedge \neg C (\sim 0)$.

b) Izpeljevanje pod i) je za dva pogojna sklepa daljše, kot če uporabljamo pravilo ii).

Pravilo iii) je poseben primer pravila ii), ker $B \vee \neg B$ lahko izpustimo.

c) Pravilo uporabljamo tako, da namesto $\mathscr{A} \models B \Rightarrow C$ dokažemo $\mathscr{A}, B \models C$.

č) Glej pripombo k rešitvi naloge 3.

15: Izpeljava, zapisana v simbolizmu, je takale:

1	$S \vee M \vee D$	PR (predpostavka oziroma premisa)
2	$S \wedge \neg D \Rightarrow M$	PR
3	$D \Leftrightarrow M$	PR
4	$D \Rightarrow S$	PR
5	$\blacksquare \neg D$	DP (dodatna predpostavka, predpostavka RA)
6	$\blacksquare \neg M$	3, 5 ($D \Leftrightarrow M, \neg D \models \neg M$)
7	$\blacksquare S$	1, 5, 6 ($S \vee M \vee D, \neg D, \neg M \models S$)
8	$\blacksquare M$	2, 5, 7 ($S \wedge D \Rightarrow M, \neg D, S \models M$)
9	D	5, 6, 8 RA
10	S	9, 4 MP
11	M	9, 3 ($D, D \Leftrightarrow M \models M$)
12	$S \wedge M \wedge D$	10, 11, 9 Zd (posplošeno na več izjav)

Pika pred izjavo pomeni, da ta izjava velja pri pogoju, da velja tudi dodatna predpostavka, ki to piko uvaja. Npr. izjava S (vrstica 7) je resnična, če so resnične premise 1-4 in izjava $\neg D$.

16.

a) Ločili smo zaključke od predpostavk; vsak sklep smo zapisali v novo vrstico, na katero smo se kasneje sklicevali.
b) in c) Glej prejšnjo nalogo.
č) Izjave v vrsticah 9, 10 in 11 so resnične, če so resnične premise 1-4, niso torej odvisne od dodatne predpostavke.
d) Če $\mathscr{A}, A \models D$ in $\mathscr{A} \models \neg D$, potem $\mathscr{A} \models \neg A$.

17.

1	$\blacksquare \neg A \Rightarrow \neg B$	DP
2	$\blacksquare\blacksquare B$	DP
3	$\blacksquare\blacksquare\blacksquare \neg A$	DP
4	$\blacksquare\blacksquare\blacksquare \neg B$	3, 1 MP
5	$\blacksquare\blacksquare A$	3, 2, 4 RA
6	$\blacksquare B \Rightarrow A$	2, 5 PS
7	$(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$	1, 6 PS

18.

a) PR; PR; DP; 3 Po; 3 Po; 4, 1 MP; 5, 2 MP; 6, 7 Zd; 3, 8 PS
b) PR; PR; PR; DP; 4, 1 MP; 5 Pr; DP; 7, 2 MP; 8 Pr; 3, 4, 6, 7, 9 AP
c) PR; PR; PR; DP; DP; 5, 1 MP; 5, 6, 4 RA; DP; DP; 9, 2 MP; 9, 10, 8 RA; 3, 4, 7, 8, 11 AP
č) PR, PR, A, B, C
d) PR; PR; PR; 1 Po; 1 Po; 3 Po; DP; $\blacksquare B$; $\neg C$; $A \wedge \neg B$; 10, 9 Zd

e) PR; PR; $\blacksquare A$; $\blacksquare\blacksquare \neg B$; $\blacksquare B$; $\blacksquare B$

20. Zaznamujmo $a \equiv$ krilati lev je ukradel tortice. Potem $\neg a$ pomeni, da jih je ukradla želva. Zaznamujmo izjave kuharice, mačke in gosenice z b, c in d. Zmešani zajec trdi $b \wedge c$; polh trdi $b \wedge d$; klobučar trdi $c \vee d$; kuščar Bill trdi $(b \wedge c) \vee (b \wedge d)$; srčni fant trdi $b \wedge (c \vee d)$; $((b \wedge c) \vee (b \wedge d)) \wedge \neg(b \wedge (c \vee d))$ je izjava belega zajca; Alica je izjavila $((b \wedge c) \vee (b \wedge d)) \wedge \neg(b \wedge (c \vee d)) \Leftrightarrow \neg a$.

Recimo, da je b resnica, potem je leva stran Aličine izjave ekvivalentna $(c \vee d) \wedge \neg(c \vee d) \sim 0$. Recimo, da je b neresnica – potem je $((0 \wedge c) \vee (0 \wedge d)) \wedge \neg(0 \wedge (c \vee d)) \sim 0$. Torej $\neg a \sim 0$ oziroma $a \sim 1$. Torej je krilati lev ukradel tortice. Tisti, ki imate Smullyanovo knjigo, pa prepišite njegovo rešitev v simbolni obliki.

21.

a) DP; DP; 1, 2 MP; 1, 3 PS; 1, 4 PS.

b) DP; DP; 2, 2, 1 RA; 1, 3 PS.

c) DP; DP; 2, 1 PS; 1, 3 PS.

č) DP; DP; DP; 3, 1, 2 RA; 2, 4 PS; 1, 5 PS.

d) $\blacksquare p$; $\blacksquare\blacksquare NNNp$; $\blacksquare\blacksquare\blacksquare NNp$; $\blacksquare\blacksquare Np$; $\blacksquare NNp$; $CpNNp$.

e) $\blacksquare\blacksquare Cqr$; $\blacksquare\blacksquare\blacksquare p$; $\blacksquare\blacksquare\blacksquare q$; $\blacksquare\blacksquare\blacksquare r$; $\blacksquare\blacksquare Cpr$; $\blacksquare CCqrCpr$.

f) $\blacksquare\blacksquare NCrNNr$; $\blacksquare\blacksquare\blacksquare r$; $\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare NNNr$; $\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare NNr$; $\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare Nr$; $\blacksquare\blacksquare\blacksquare NNr$; $\blacksquare\blacksquare CrNNr$.

g) $\blacksquare CNpp$; $\blacksquare\blacksquare Np$; $\blacksquare\blacksquare p$; $\blacksquare p$.

22. Najprej uvedimo okrajšave: $p \equiv$ prva oseba je resničnik, $q \equiv$ druga oseba je resničnik, $r \equiv$ tretja oseba je resničnik. Kako bi zapisali dejstvo, da je kvečjemu eden lažnivec? Sestavili bi ga iz šestih pogojev: Če je i lažnivec, potem $j (i \neq j)$ ni lažnivec: $CNpq, CNpr, CNqp, CNqr, CNrp, CNrq$. Če sedaj drugega človeka vprašamo, ali je prvi resničnik, imamo dve možnosti:

a) da reče "da", tedaj vemo še Cqp;

b) da zanika, tedaj vemo še $CqNp$.

1	Cqp	PR (odgovor "da")
2	$CNpq$	PR (eden od pogojev naloge)
3	$\blacksquare Np$	DP
4	$\blacksquare q$	3, 2 MP
5	$\blacksquare p$	4, 1 MP
6	p	3, 5, 3 RA

V tem primeru je prva oseba resničnik. Sklepanje v drugem primeru je takole:

1	$CqNp$	PR (odgovor "ne")
2	$CNrp$	PR } pogoja naloge
3	$CNrq$	PR } pogoja naloge
4	$\blacksquare Nr$	DP
5	$\blacksquare p$	4,2 MP
6	$\blacksquare q$	4, 3 MP
7	$\blacksquare Np$	7, 1 MP
8	r	4, 5, 7 Ra

V tem primeru je tretja oseba resničnik.

Vaja: Dokaza prevedi v pogovorni jezik.

23. a) in b)

Vpeljimo naslednje oznake:

$p \equiv$ kot ABC je večji od kota BCA.

$q \equiv$ kot ABC je enak kotu BCA.

$r \equiv$ kot ABC je manjši od kota BCA.

$s \equiv$ stranica AC je daljša od AB.

$t \equiv$ stranica AC je enaka stranici AB.

$u \equiv$ stranica AC je krajša od stranice AB.

Potem se implicitno predpostavlja:

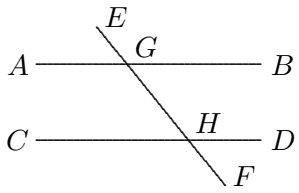
$p \vee q \vee r (\sim \neg q \wedge \neg r \Rightarrow p)$, $p \Rightarrow \neg q, p \Rightarrow \neg r$ itd. Izreki se glasijo: I.5 $\equiv t \Rightarrow q$; I.18 $\equiv (s \Rightarrow p) \wedge (u \Rightarrow r)$; I.19 $\equiv p \Rightarrow s$ (I.19 je torej obrat izreka I.18).

Dokaz izreka I.19:

1	p	PR
2	$\blacksquare \neg s$	DP
3	$\blacksquare t \vee u$	2, $(s \vee t \vee u \sim \neg s \Rightarrow t \vee u)$ MP
4	$\blacksquare\blacksquare t$	DP
5	$\blacksquare\blacksquare q$	4, I.5 MP
6	$\blacksquare \neg t$	4,1,(iz q sledi $\neg p$) RA
7	$\blacksquare\blacksquare u$	DP
8	$\blacksquare\blacksquare r$	7, I.18 (drugi argumenti) MP
9	$\blacksquare \neg u$	7, 1, ($\neg p$ sledi iz r) RA
10	$\blacksquare \neg t \wedge \neg u$	6, 9 Zd
11	s	2,3,19 $(\sim \neg(t \vee u))$ RA

Vpeljimo oznake:

$p \equiv$ vsota kotov BGH in GHD je manjša od dveh pravih kotov.
$q \equiv AB$ in CD se sekata, če ju dovolj podaljšamo preko B oziroma D.



$r \equiv$ vsota kotov AGH in GHC je manjša od dveh pravih kotov.
$s \equiv AB$ in CD se sekata, če ju dovolj podaljšamo preko A oziroma C.
Peti postulat zapišimo takole: $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$.
Vpeljimo še:
$š \equiv$ vsota kotov BGH in AGH je enaka dvema pravima kotoma,
$t \equiv$ vsota kotov GHC in GHD je enaka dvema pravima kotoma.
Izrek 13 zapišemo $š \wedge t$.
Če vpeljemo $a \equiv AB \parallel CD$, velja $a \Leftrightarrow \neg q \wedge \neg p$.
Označimo: $c \equiv$ kot AGH je enak kotu GHD.
Izrek 29 lahko zapišemo: $a \Rightarrow c$.
$č \equiv$ kot AGH je večji kot kot GHD.
$d \equiv$ kot GHD je večji od kota AGH.
$e \equiv$ kota AGH in BGH sta skupaj večja od BGH in GHD.
Zdaj dokaz izreka 29 poteka takole:

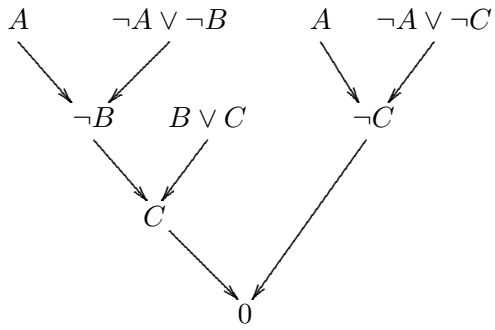
1	a	PR
2	▪ $\neg c$	DP
3	▪ $č \vee d$	2, $c \Rightarrow (č \vee d)$ MP
4	▪▪ $č$	DP
5	▪▪ e	4, $č \Rightarrow e$ MP
6	▪▪ p	5, $e \Rightarrow p$ (sledi iz I.13) MP
7	▪▪ q	6, peti postulat $(p \Rightarrow q)$ MP
8	▪▪ $\neg a$	7, $a \Leftrightarrow \neg q \wedge \neg s$ (zato $q \Rightarrow \neg a$) MP
9	▪ $\neg č$	

Isto velja, če predpostavimo d, torej:

10	▪ $\neg d$	
11	▪ $\neg č \wedge \neg d (\sim \neg (c \vee d))$	
12	c	2, 3, 11 RA

Evklidove dokaze smo analizirali v okviru izjavnega računa. Možna pa je popolna formalizacija Elementov v jezik simbolne logike.

24.
b) $\mathscr{N} = \{\neg A \vee \neg B, \neg A \vee \neg C, C \vee A, B \vee C\}$



4. Zgradba izjav in predikati

1. $Mxy \equiv x$ je mati y-na.
   a) Maz (isto tudi b).
   c) in č) $5 > 2$
   d) in e) Vrstni red besed v slovenskem jeziku je do neke mere poljuben. Izjavi sta dvoumni.

2. $Sx \equiv x$ spi
   $\neg(Sj \wedge Sp)(\sim \neg Sj \vee \neg Sp)$

3.
a) i) Izhodišče ima absciso in ordinato enako 0.
   ii) Če imata točki isti koordinati, gre za isto točko.
   iii) Koordinati točke sta enolični.

b) $K(A, -1, 1), K(B, 0, 1), K(C, -1, 0)$

4.
a) Mfj
b) Mjp
c) Mati je kvečjemu ena.

5.
b) Ostanek je manjši od delitelja.
c) Če je deljenec manjši od delitelja, je deljenec enak ostanku.
d) Delimo le s števili, različnimi od 0.
g) Pri deljenju sta količnik in ostanek enolično določena.
h) Če delimo števili in dobimo isti količnik in isti ostanek, gre obakrat za isto število.

6.

a) $P(2) \wedge P(3)$
b) $\neg P(4) \wedge \neg P(6)$
c) $\neg(P(2) \wedge P(4))$
č) $\neg(\neg P(4) \wedge \neg P(6))(\sim P(4) \vee P(6))$
d) $P(a) \wedge P(b)$
e) $\neg P(a) \wedge \neg P(b)$
f) $\neg(P(a) \wedge P(b))$
g) $\neg(P(a) \wedge P(b))$
h) $\neg P(a) \wedge \neg P(b)$
i) $\neg P(a) \vee \neg P(b)$
j) $\neg(\neg(P(a) \wedge P(b))(\sim P(a) \wedge P(b))$

7.

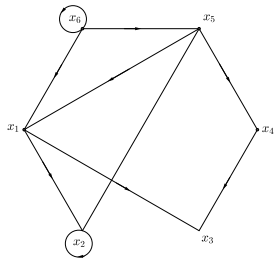
a) $Zx \equiv x$ je zvezda, $s =$ sonce: Zs.
b) $n =$ nam najbližja zvezda, $s = n$.
c) $2 = 1 + 1$
č) $N(3)$
d) $P(3)$
e) $\forall x(\check{C}x \Rightarrow \check{Z}x)$

8.

c) $Rx_6x_1, Rx_5x_1, Rx_1x_4, Rx_3x_2, Rx_3x_4, Rx_5x_4$

9.

b)



13.

a) $Lxy \equiv$ oseba x ljubi osebo y.
$Rxyz \equiv$ oseba x ima rajši osebo y kot osebo z.
$Ljt \wedge Rjjt$
b) $\forall x(Lx \Rightarrow Kx)$
c) $\forall x(Ljx \Rightarrow Tjx)$
č) $Dxyu \equiv$ oseba x da osebi y reč u; $Dttm \wedge Dtjp$
d) $\forall x(Pxx \Rightarrow \forall y(y \neq x \Rightarrow Pxy))$
e) $\forall x(\check{C}x \Rightarrow Dx)$
f) $\forall x(Sx \Rightarrow \check{Z}x) \wedge \forall x(\neg Sx \Rightarrow \neg\check{Z}x)$
g) Bvg
h) $Mx \equiv x$-a je rodila mati; $Mm \wedge Mt$
i) $\forall x(Dx \Rightarrow Nx)$
j) $Pxt \equiv x$ je pameten ob času t; $\neg\exists x\forall tPxt$
k) $Zxy \equiv$ oseba x je najboljši zdravnik osebe y; $\forall xZxx$

l) $Dxy \equiv$ oseba x je za stvari y; $\neg\forall x\forall y Dxy$

V tem in podobnih primerih spremenljivki x in y zajemata vrednosti iz različnih množic. Če bi se omejili le na eno področje, bi morali uvesti dve dodatni oznaki, npr.:

$\check{C}x \equiv x$ je človek, $Sy \equiv y$ je stvar, našo izjavo pa bi zapisali $\neg\forall x\forall y(\check{C}x \wedge Sy \Rightarrow Dxy)$

m) $\forall x(Rx \Rightarrow Tx)$

n) $Bxy \equiv$ oseba x je najbližja osebi y; $\forall x Bxx$

o) in p) $Pxy \equiv$ oseba x privošči to ali ono osebi y; $\forall x(\neg Pxx \Rightarrow \forall y(y \neq x \Rightarrow \neg Pxy))$

r) $\forall x(Mx \Rightarrow \forall y Pxy)$

s) $Sxy \equiv$ oseba x se spozna na y; $\neg\forall x\forall y Sxy$.

š) $\forall x\forall y(Bxy \Rightarrow \neg Lxy)$

t) $\forall x(Tx \Rightarrow \forall y Dxy)$

u) $\forall x\forall y(Pxy \Rightarrow \exists z(z \neq x \wedge z \neq y \wedge Dz))$

v) $\neg\exists x\forall y Uxy$

z) Isto kot v).

ž) $Kx \equiv x$ je stvar, ki vzhaja (narašča sama od sebe), $Dx \equiv x$ je dolg, $Vxy \equiv x$ vzhaja bolje od y, $\forall x(Kx \wedge \forall y(y \neq x \Rightarrow Vxy) \Rightarrow Dx)$

14.

i) $\forall x\neg Pjx$ ii) $\forall x\neg Pxj$

15. $Rx \equiv x$ je resnica, i) $\forall x(lx \Rightarrow \neg Rx)$ ii) $\neg\forall x(lx \Rightarrow Rx)$

16.

a) Vsako število ni enako vsakemu številu (resnica).

b) Nobeno število ni enako vsakemu številu (resnica).

c) Nobeni števili nista enaki (neresnica).

17. Definirajmo $N(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \Leftrightarrow \forall\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R} : \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

a) $N(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \Rightarrow \forall\vec{d}\,\exists\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R} : \vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$

b) $\forall x \in \mathbb{N}_0\,\exists a,b,c,d \in \mathbb{N}_0 : x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

c) $Txt \equiv$ oseba x je bila v Trstu ob času t.

$\forall x(Jx \Rightarrow \exists t Txt)$

č) $\forall x(0x \Rightarrow \exists y 0yx)$

19. Vse tri izjave pomenijo isto: $\forall x(Px \wedge x \neq 2 \Rightarrow Lx)$

20.

a) Vsakdo da vsem vsako stvar.

b) Za vsakogar lahko najdemo nekaj, kar da vsem.

c) Obstaja stvar, ki jo da vsak vsem.
č) Za vsakogar lahko najdemo nekaj, kar dobi od vseh. Razlike med "nekaj" in "kaj" ni možno izraziti v našem simbolizmu. Zaradi precej poljubnega vrstnega reda besed v slovenščini tudi ne moremo zanesljivo razlikovati med i), j), k), l), m), n) in p). En pomen teh stavkov je $\forall x \forall y \exists z R(x, y, z)$.
o) $\exists z \forall x \forall y R(x, y, z)$
r) Isto kot o) ali morda $\forall x \exists z \forall y R(x, y, z)$.

22.
a) $\exists x(x^2 - 3x + 2 = 0 \wedge x^2 - 6x + 6 = 0)$
$\exists x(x^2 - 3x + 2 = 0) \wedge \exists x(x^2 - 6x + 6 = 0)$
b) $\exists x(x^2 - 3x + 2 = 0 \wedge x^2 - 5x + 6 = 0)$
$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$
c) V zgornji izjavi manjka kvantifikator, zato se nanaša na celotno izjavo. Razlika je v bistvu ista kot med $\forall x(P(x) \Rightarrow Q)$ in $\exists x P(x) \Rightarrow Q$, kjer x ne nastopa v Q. Prva izjava ni resnična; če vzamemo $\mathscr{M} = \{1\}, n = 2$, potem so resnične izjave $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{N}, 1 \in \mathscr{M}$ in $2 \in \mathscr{M} \Rightarrow 2 + 1 \in \mathscr{M}$, toda $\mathscr{M} = \mathbb{N}$ ne velja.

23.
a) $\mathscr{A} = \mathscr{B} \Leftrightarrow \forall x(x \in \mathscr{A} \Leftrightarrow x \in \mathscr{B})$
$E(a, b, c) \Leftrightarrow a = b \wedge b = c$
V drugem primeru smo trikotnik zaznamovali s trojico števil. Enakost množic pomeni istovetnost, enakost daljic pa istovetnost njihovih dolžin.
c) Po tej definiciji je vsaka množica točk diskretna, saj je le razdalja točke do same sebe enaka 0, razdalja dveh točk pa je vedno več kot 0.
Tisto, kar je mišljeno, zapišemo z definicijo:
$\mathscr{M}$ je diskretna $\Leftrightarrow (\exists \delta > 0)(\forall x, y \in \mathscr{M})(x \neq y \Rightarrow D(x, y) > \delta)$.

24. Pri definiciji relacije T razlikujemo tri primere. Prvi primer pravi, da je objekt sam s seboj v relaciji T, drugi primer pravi, da sta x in y v relaciji T, če sta v relaciji R. V tretjem primeru imamo rekurzijski pogoj, ko na desni strani definicije nastopa relacija, ki jo moramo definirati. Takšni primeri so pogosti pri programiranju.

25.
a) $\exists x \forall y T x y$
b) $\forall x \forall y T x y$
c) $\exists x \forall y T y x$
č) $\exists x \forall y T x y$ (glej pripombo k nalogi 20)
d) $\forall x \exists y T y x$ (morda $\exists y \forall x T y x$)
e) $\exists x \forall y T x y$ (morda $\forall y \exists x T x y$)

26. Dejstva in definicije lahko zapišemo v mikro prologu, kot je razvidno iz programa.

Nato lahko računalnik vprašamo: Ali je (ABC) premica, kateri seznami so premice, katere premice so vzporedne premici (ABC)? Mikro prolog nima eksistencionalnostnega kvantifikatorja. Definicijo točke v simbolizmu zapišemo:

X točka $\Leftrightarrow \exists Y$ (Y premica $\wedge X$ NA Y)

Neko vrsto univerzalnostnega kvantifikatorja pa prolog pozna. Če bi hoteli izvedeti, ali je relacija vzporednosti tranzitivna, bi vprašali:

is (forall X premica and Y premica and Z premica and X vzporedna Y and Y vzporedna Z then X vzporedna Z)

Naše pogovorno področje je končna afina geometrija. Trditve pod c so aksiomi. Računalniški program izgleda takole:

(ABC) premica
(DEF) premica
(GHI) premica
(ADG) premica
(BEF) premica
(CFI) premica
(AEI) premica
(CEG) premica
(AFG) premica
(CDH) premica
(BFG) premica
(BDI) premica
X točka if
    Y premica and
    X ON Y
(XYZ) vzporedna (xyz) if
    (XYZ) premica and
    (xyz) premica and
    (either (XYZ) EQ (xyz) or not ($X1$ ON (XYZ) and $X1$ ON (xyz)))
X kolinearna (YZ) if
    x premica and
    X ON x and
    Y ON x and
    Z ON x
(XY) vzporedna$_1$ (Zx) if

y premica and
z premica and
X ON y and
Y ON y and
Z ON z and
x ON z and
y vzporedna z
&is((ABC) premica)
YES
&which(x: x premica)
(ABC)
(DEF)
(GHI)
(ADG)
(BEF)
(CFI)
(AEI)
(CEG)
(AFG)
(CDH)
(BFG)
(BDI)
No (more) answers
&which(x: x vzporedna (ABC))
(ABC)
(DEF)
(GHI)
No (more) answers

5. Še o sklepanju

1.
a) Peter je pravilno ovrgel Janezovo sklepanje. Če uvedemo $Dx \equiv x$ je dober učbenik, $Vx \equiv x$ vsebuje veliko nalog, $m =$ Janezov učbenik; potem se Janezov sklep glasi:
$\forall x(Dx \Rightarrow Vx), Vm \models Dm.$
b) $\forall x(x \geq 1) \models 1 \geq 1$
c) $\forall x \exists y Sxy \not\models \exists x \forall y(x \geq y)$
č) $\forall x \exists y Pxy \not\models \exists y \forall x Pxy$

d) $Sxyz \equiv x$ je mati; y pa oče osebe z:
$\neg\exists y\exists z Smyz \models \neg\exists z Smjz$
e) $\forall x Sxh \not\models \forall x Shx$
f) $\forall x Sx \Rightarrow \forall x Px \not\models \forall x(Sx \Rightarrow Px)$
h) $P(ABCD) \wedge \neg K(ABCD) \models \neg\forall x(Px \Rightarrow Kx)$
i) $\forall x(E_1(x) \Leftrightarrow E_2(x)) \not\models \exists x E_1(x) \wedge \exists x E_2(x)$

3. Najprej dokažimo, da so vse ženske članice društva src. Vzemimo poljubno žensko – ta je ali članica vseh društev ali pa ni. V prvem primeru je tudi članica društva src. V drugem primeru ni članica enega društva in po (1) mora biti članica društva src. V vsakem primeru je članica društva src.

Nato iz (2) sledi, da noben moški ni član vseh društev. Če bi bil kakšen moški član vseh društev, bi bil tudi član društva src. Toda tedaj ne more biti član društva src. Ker je vsak moški izven kakšnega društva, mora ljubiti vse ženske, ker so vse ženske članice društva src.

4. Kadar imamo pri sklepanju le enomestne predikate, si pomagamo z Vennovimi diagrami.

Vzemimo naslednji sklep:

Vsak delfin je sesalec.
Nobena riba ni sesalec.

Noben delfin ni riba.

Označimo: $Sx \equiv x$ je sesalec.

$Dx \equiv x$ je delfin.

$Rx \equiv x$ je riba.

Sklep lahko zapišemo simbolično:

$\forall x(Dx \Rightarrow Sx)$
$\forall x(Rx \Rightarrow \neg Sx)$

$\forall x(Dx \Rightarrow \neg Rx)$

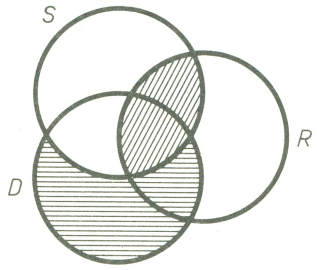


Diagram je takle:

Najprej osenčimo del kroga D, ki je izven kroga S. To namreč zahteva prva premisa. Druga zahteva je, da osenčimo tisti del kroga R, ki leži znotraj kroga S. Del kroga D, ki je znotraj kroga R, je osenčen. Izjava $\forall x(Dx \Rightarrow \neg Rx)$ je pravilna.

Oglejmo si naslednje sklepanje:

Vsak delfin je sesalec.
Nobena riba ni delfin.

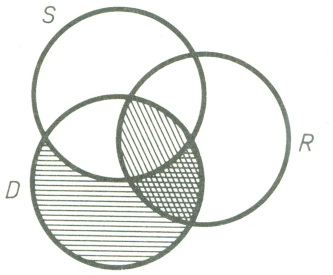
Nobena riba ni sesalec.

Sklepanje v simbolični obliki izgleda takole:

$\forall x(Dx \Rightarrow Sx)$.
$\forall x(Rx \Rightarrow \neg Dx)$

$\forall x(Rx \Rightarrow \neg Sx)$.

Premisi zahtevata naslednji diagram:



Za veljavo sklepa mora biti osenčen ves tisti del kroga R, ki je v krogu S. Tega pa premisi ne izpolnjujeta. Isto obliko ima tudi tole sklepanje:

Vsaka mušnica je goba.
Noben jurček ni mušnica.

Noben jurček ni goba.

To sklepanje pa je očitno nepravilno.

5.

a) Pogoj E_1 zagotavlja, da imamo društvo E vseh preverjenih vitezov. Pogoj C zagotavlja obstoj društva $\bar{E}$ vseh tistih, ki niso preverjeni vitezi. Zaradi pogoja G bo vsaj en otočan trdil, da je član društva $\bar{E}$, ali drugače – trdil bo, da ni preverjeni vitez. Oproda ne more trditi, da ni preverjeni vitez (saj bi bila to resnica). Torej mora biti vitez. Ker ta govori resnico, je torej nepreverjeni vitez.

b) Pogoj E_2 zagotavlja obstoj kluba preverjenih oprod. Potem vsaj en otočan trdi, da je preverjeni oproda. Vitez kaj takega ne bo trdil, preverjeni oproda tudi ne. To lahko trdi le nepreverjeni oproda.

c) Če bi imeli društvo vseh oprod, bi vsaj en otočan trdil, da je član tega društva, to je, da je oproda. Toda tega ne moreta ne vitez ne oproda.

č) Če bi imeli društvo vseh vitezov, bi imeli tudi društvo vseh oprod, kar je v nasprotju s c).

6.

a) Veljati mora $3x = y2y$ in $P(x, y)$.

Najbolj enostavno bi bilo $x = 2a, y = a$. Potem je $P(x, y)$, to je $P(2a, a)$ in $P(32a, a2a)$.

Kdaj je $32a = a2a$? Ena rešitev je $a = 3, x = 323$. Ali obstoja še kakšna rešitev?

b) Eno takšno število je 33233. Velja namreč $P(332x, x2x2x2x)$. Zakaj?

Od tod sledi (za $x = 33$) $P(33233, 33233233233)$.

c) Naj bo $x = 3273$. Velja $P(3273, 73273)$, ker je $P(273, 73)$ in $P(273, 73) \Rightarrow P(3273, 73273)$.

č) Za poljubno število a vzemimo $y = 32a3$, potem velja $P(y, ay)$. Velja namreč $P(32a3, a32a3)$ – glej c!

7.

a) PR; PR; DP; 1 OE; 2 OU; 3 OU; 4 po; 7, 5 MP; 4 Po; 9, 6 MP; 10, 8 Zd; 3, 11 RA

b) PR; PR; 2 OU; 1, 3 MP

c) PR; PR; DP; 3 OU; 2, 4 MP; 5, 1 Zd; 3, 6 RA

č) PR; DP; 1 OE; 2 OU; 3 Po; 5, 4 MP; 3 Po; 7, 6 Zd; 2, 8 RA

d) PR; PR; DP; 2 OE; 4 Po; 4 Po; 3 OU; 5, 7 MP; 1 OU; 8, 9 MP; 10, 6 Zd; 3, 11 RA

6. Iz zgodovine logike

1.

c) Łukasiewiczev dokaz poteka takole:

1. $CpCqp$ (aksiom I)
2. $CCpCqrCCpqCpr$ (aksiom II)
3. $CCqrCCpCqrCCpqCpr$ $(1\ p/CCpCqrCCpqCpr, q/Cqr, 2)$

Obrazložitev $(1\ p/CCpCqrCCpqCpr, q/Cqr, 2)$ pomeni, da smo v vrstici 1 zamenjali p s $CCpCqrCCpqCpr$ in q s Cqr ter uporabili modus ponens.

4. $CCCqrCpCqrCCqrCCpqCpr$ $(2\ p/Cqr, q/CpCqr, r/CCpqCpr, 1)$
5. $CCqrCCpqCpr$ $(4, 1\ p/Cqr, q/p)$
6. $CCCqrCpqCCqrCpr$ $(2\ p/Cqr, q/Cpq, r/Cpr, 5)$
7. $CrCpCqp$ $(1\ p/CpCqp, q/r, 1)$
8. $CCCpqrCqr$ $(6\ q/Cpq, p/q, 7\ r/CCpqr, p/q, q/p)$
9. $CCsCCpqrCsCqr$ $(5\ q/CCpqr, r/Cqr, p/s, 8)$
10. $CCpCqrCqCpr$ $(9\ s/CpCqr, r/Cpr, 2)$

2.

a) $\mathscr{H} \in \mathscr{M} \Leftrightarrow \neg\mathscr{H} \in \mathscr{M}$ (definicija množice $\mathscr{M}$)

$\mathscr{M} \in \mathscr{M} \Leftrightarrow \neg\mathscr{M} \in \mathscr{M}$ (vstavimo $\mathscr{M}$ namesto $\mathscr{H}$)

To je protislovje oblike $p \Leftrightarrow \neg p$.

b) Izjava $\forall x(B(b,x) \Leftrightarrow \neg B(x,x))$ ima za posledico $B(b,b) \Leftarrow \neg B(b,b)$, kar je protislovje. Iz nepravilne izjave pa sledi katerakoli izjava.

3.

a) Napaka tega sklepanja je v tem, da pojem dokazljivosti ni dobro definiran. Ena od nalog logike je precizirati pojem dokaza. Do danes še nihče ni opredelil pojma dokaza v absolutnem smislu, lahko pa precizno govorimo o dokazu v nekem sistemu (npr. izjavnem računu).

Predpostavimo, da imamo sistem S, v katerem je dokazljivost definirana. Vzemimo še, da je sistem korekten v tem smislu, da je vse, kar je dokazljivo, tudi resnično. Sedaj vzamemo stavek:

$$\boxed{\text{Ta stavek ni dokazljiv v sistemu } S.}$$

Tokrat nimamo paradoksa, temveč zanimivo resnico, da je ta stavek resničen, toda nedokazljiv v sistemu S. In to je v grobem Gödlov rezultat.

b) Stavek $NID * NID*$ trdi, da dvojni $NID*$ ni izpisljiv. Toda dvojni $NID*$ je ravno stavek $NID * NID*$. Torej je ta stavek resničen natanko tedaj, kadar ni izpisljiv. Če je ta stavek napačen, potem je izpisljiv (saj pravi, da ni izpisljiv). To pomeni, da stroj izpisuje tudi napačne stavke. To je v nasprotju s predpostavko, da stroj izpisuje le resnice. Torej je naš stavek resničen, kar pomeni, da tisto, kar pomeni, drži, trdi pa, da ni izpisljiv. Torej je stavek $NID * NID*$ resnica, ki je stroj ne more izpisati.

4.

a) Pri Wittgensteinu različnost spremenljivk pomeni tudi različnost objektov. To pomeni, da $(\forall x, y)Pxy$ ne vključuje primera Pxx.

b) $(\exists x)(Rx \wedge (\forall y)\neg Ry)$

$(\exists x, y)(Rx \wedge Ry \wedge (\forall z) \wedge Rz)$

$(\exists x, y, z)(Rx \wedge Ry \wedge Rz \wedge (\forall w)\neg Rw)$

$(\exists x)Rx$

$(\forall x, y)(Rz \Rightarrow \neg Ry)$

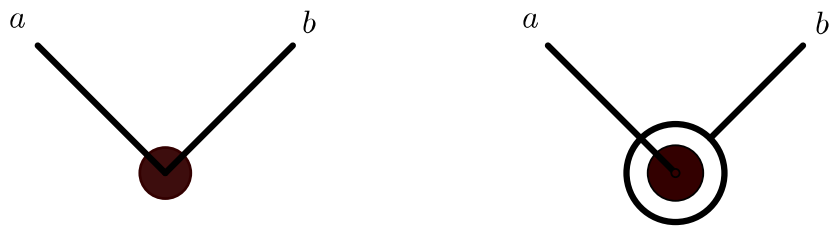
5.

a) Lastna imena so: $1, e, 10, 2$.

Obča imena so: $0/0$, *sodo število, kvadrat*.

Navidezni imeni sta: $1/0$, *okrogel kvadrat*.

b) Imamo dve možnosti:



c) 2 ε praštevilo itd.

6.
a) Izjavo $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ lahko preberemo drugače: če so vse izjave množice resnične, potem je resnična vsaj ena izjava iz množice $\mathscr{B}$. Če je v $\mathscr{B}$ samo ena izjava, to ni nič drugega kot relacija logičnega izhajanja $\models$.
b) Recimo, da veljata $\mathscr{A} \to \mathscr{B}, X$ in $X, \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, in recimo, da so vse izjave množice $\mathscr{A}$ resnične. Izjava X je lahko resnična ali pa ne. Če je, potem je zaradi resničnosti X, $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ resnična vsaj ena izjava iz $\mathscr{B}$ torej tudi $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$. Če X ni resnična, mora zaradi resničnosti izjave $\mathscr{A} \to \mathscr{B}, X$ biti resnična vsaj ena izjava iz $\mathscr{B}$. Spet velja $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$.

7. Nekaj logičnih nalog

1. Vprašajmo enega od dveh moških, ali je drugi resnicoljub. Recimo, da odgovori "da". Potem je drugi res resnicoljub. Namreč, če drugi ni resnicoljub, tudi prvi ni. Rečeno pa je, da laže samo eden.

Če je torej odgovor "da", lahko najdemo resnicoljuba. Kaj pa, če je odgovor "ne"? Recimo, da je to resnica. Potem drugi ni resnicoljub in sta obe ženski resnicoljubni. Recimo, da je odgovor "ne" napačen. Tudi potem sta obe ženski resnicoljubni.

Če je odgovor "ne", spet lahko najdemo resnicoljuba. V vsakem primeru torej lahko z enim vprašanjem najdemo resnicoljuba, ki ga nato z drugim vprašanjem vprašamo za zakonskega tovariša.

2. Recimo, da je odgovor "CDC" pravilen. Potem je tudi odgovor "IBM ni" pravilen.

To je mogoče le, če je največji računalnik IBM. To je protislovje. Torej je odgovor "CDC" napačen. CDC torej ni največji računalnik, ker pa daje samo pravilne odgovore, CDC ni bil vprašan prvi, temveč drugi. Odgovor računalnka CDC "IBM ni" je torej pravilen. Največji računalnik je torej DEC.

3. Obiskovalec je bil seveda redovničin sin.

4. Recimo, da je "ne" pravilen odgovor. Potem bi večji računalnik dajal napačne odgovore, a odgovoril bi "manjši računalnik ni CDC". Če je "ne" pravilno, potem je manjši računalnik CDC. Recimo, da je "ne" napačen odgovor. Potem bi večji računalnik dajal pravilne odgovore, a odgovoril bi "manjši računalnik je CDC". Če je "ne" napačno, potem je manjši računalnik CDC. V vsakem primeru je torej manjši računalnik CDC.

5. Drugi izmed bratov je gotovo srečal svojo ženo.

6. Pare, v katerih se dekle in fant poznata, dobimo takole: Označimo fante s črkami A, B in C, dekleta pa s P, Q in R. Ker se fant A pozna z eno od deklet, lahko predpostavimo, da je to dekle P. Potem se fant B pozna vsaj z eno od drugih dveh. Naj bo to Q. Če se fant C in dekle R poznata, smo ureditev že našli. Če pa se fant C pozna z dekletom P in Q, dekle R pa s fantom A in B, so pari naslednji: (A, R), (B, Q) in (C, P).

7. Prvi podatek nam pove, da vsak izmed drugih predstavnikov govori vsaj rusko ali francosko in angleško ali špansko. Če dva predstavnika govorita rusko in angleško, eden pa francosko in špansko, se ne morejo pogovoriti.

8. Kranjčev sin je Peter, star je enaindvajset let. Dokaz: Recimo, da mu je ime Janez.

Potem sta podatka o letih, ki sta ju dala oče in hči, točna. To pa ni mogoče, saj sta različna. Torej je Kranjčev sin Peter. Ker je po tem točen materin odgovor o letih, je star 21 let.

9. Če bi prvi videl na glavi drugega črno kapo, bi vedel, da ima sam belo kapo. Toda tega ni vedel. Torej ima drugi na glavi belo kapo.

10. Edino, kar se da ugotoviti, je, da je znamka osebe C zelena.

11. Situacija je možna, če se beli pomika navzdol. Zadnja poteza belega je s kmetom z b2 na a1 (pri čemer vzame črno figuro) in napreduje v trdnjavo.

12. Dokažimo, da se Beti piše Kos.

1. Recimo, da je Arturjeva sestra Helena. Potem je Arturjeva sestra poročena z Arturjevim svakom.

1.1. Recimo, da je Arturjeva žena Marta Kovač. Potem se Artur piše Kovač. Zato se Janez piše Kos. Helena ne more biti poročena z Janezom, ker bi kot njen mož moral biti rojen avgusta, ona pa januarja (ker je Kovačeva sestra). Edina možnost 31. januar in 1. avgust pa odpade na prestopno leto, ko je rojen Janez (1932). Torej je Helena poročena z Vilijem Kranjcem. Beti je torej poročena z Janezom in se piše Kos.

1.2. Recimo, da je Arturjeva žena Beti. Potem je Martin mož Janez (Kovač). Spet se Beti piše Kos, ravno tako tudi Artur.

2. Recimo, da je Arturjeva sestra Marta Kovač. Potem je Martin mož Janez Kovač.

2.1. Recimo, da je Kovačeva sestra Beti. Potem je Helena Vilijeva sestra in je Beti poročena z Vilijevim svakom. Po drugi strani pa je Vili Betin mož. To je protislovje.

2.2. Recimo, da je Helena Kovačeva sestra. Potem je Beti Vilijeva sestra, Helena pa Vilijeva žena. Potem je Beti Arturjeva žena in se piše Kos.