Russellova antinomija in osnove matematike

IZIDOR HAFNER

1. Konec prejšnjega in v začetku tega stoletja je matematika v delih Cantorja, Dedekinda, Fregeja in Peana dobila svoj osnovni logični temelj, za katerega pa se je pokazalo, da le ni povsem neoporečen. Od vseh predlaganih del je po svoji preciznosti izstopalo delo Fregeja, ki je tudi logično osnovo izvedel aksiomatično. Ko je bil drugi del njegovega najvažnejšega dela leta 1902 že v tiskarni, je prišlo pismo do tedaj neznanega Russella, v katerem govori o množici vseh tistih množic, ki ne pripadajo same sebi [2].

Preden pa se lotimo obravnave tega protislovja, se dogovorimo o nekaterih oznakah. Za izjavne povezave bomo uporabljali simbole $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, in $\Leftrightarrow$. Oznaki za eksistenčni in univerzalni kvantifikator pa sta $\exists$ in $\forall$. Oznaka pripadnosti je $\in$, oznaka $\dot{x}\Phi(x)$ pa pomeni množico tistih reči, ki sodijo v pojemΦ. Seveda velja $x \in \dot{y}\Phi(y) \Leftrightarrow \Phi(x)$. V teh oznakah se Russellova antinomija glasi:

(1)	$M = \dot{x}(x \notin x)$	[definicija]
(2)	$M \in M$	[predpostavka]
(3)	$M \notin M$	[sledi iz (1) in (2)]
(4)	$M \notin M$	[predpostavka]
(5)	$M \in M$	[sledi iz (1) in (4)]
(6)	$M \in M \Leftrightarrow M \notin M$	[sledi iz (2), (3), (4) in (5)]

Druga verzija, ki jo v istem pismu navaja Russell, pa omenja predikat (oziroma lastnost), ki velja za vse tiste predikate, ki ne veljajo za same sebe. Frege mu odgovarja, da je predikat funkcija, ki zahteva individuum za argument, torej da so izrazi $\Phi(\Phi)$ nesmiselni, da pa se lahko predikat nanaša na svoj obseg, se pravi $\Phi(\dot{x}\Phi(x))$. Frege še dodaja: »Če je funkcija $\Phi(\Sigma)$ pojem, potem označujem ustrezen obseg (pripadajočo množico) z $\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$« (čeprav sedaj dvomim v upravičenost tega).« [2, str. 133]

Prehod od pojma k njegovemu obsegu, ki pa ni več pojem, temveč individuum, je korak, ki ima za posledico protislovje. Brez tega koraka ni mogoče izpeljati aritmetike na osnovi logičnih principov. Število, ki pripada pojmu F, je namreč obseg pojma »biti enak pojmu F«, kjer enakost pomeni obstoj bijektivne preslikave med obsegoma pojmov [1, str. 85]. Število nič pripada pojmu »$x \neq x$«. Število 1 pripada pojmu »$x = 0$«. Eksistenca števil je zagotovljena s principom prehoda od pojma k obsegu.

2. V aksiomatični teoriji množic je prehod od lastnosti k množici podan z naslednjo shemo:
$x \in \hat{y}(\Phi y \wedge y \in Y) \Leftrightarrow \Phi x \wedge x \in Y$, s katero pa dobimo le podmnožice množice Y.

3. Teorija tipov, ki ima svoje korenine v Fregejevem delu, prepoveduje možnost uporabe izrazov »$\Phi(\Phi)$«, kar odpravlja eno obliko Russellove antinomije. Pokazalo se je, da vse antinomije vključujejo t. i. impredikativne definicije oziroma začarani krog, ko sta množica M in neki njen element definirana tako, da je definicija elementa m odvisna od množice M.

Impredikativna je n. pr. naslednja definicija konjunkcije:

$$p \wedge q \Leftrightarrow (\forall f)(f(pq) \Leftrightarrow f(11)),$$

kjer je »1« oznaka za resnico. Konjunkcija je namreč v zalogi spremenljivke f.

Russell je v Principia Mathematica izključil impredikativne definicije s t. i. nivelirano teorijo tipov (ramified type theory). Formalno je ta konstrukcija izpeljana tako, da je pravilo substitucije za predikativne spremenljivke takšno, da formula, s katero smemo zamenjati spremenljivko, lahko vsebuje le vezane spremenljivke nižjih nivojev, nivo prostih spremenljivk pa je kvečjemu enak nivoju spremenljivke, za katero zamenjujemo. Ker pa s to omejitvijo ni bilo mogoče izpeljati vse klasične analize, je Russell uvedel aksiom reducibilnosti. Ta pravi, da za vsako funkcijo obstaja formalno ekvivalentna funkcija osnovnega nivoja. Aksiom so precej kritizirali. Dela Ramseya in Chwisteka so argumentirala stališče, da za odpravo protislovij zadošča že enostavna teorija tipov. Ta formalni sistem se običajno imenuje predikatni račun višjega reda.

4. Russellov paradoks je pokazal, da ne moremo vedno govoriti o obsegu pojma kot individuumu, torej, da vsaki funkciji $\Phi(x)$ ne moremo vedno prirediti množice reči, ki izpolnjujejo to funkcijo. Russell takole piše Fregeju: »Vsak dan manj razumem, kaj pravzaprav pomeni izraz »obseg pojma«.« [2, str. 139] Kot neposredna reakcija na probleme v zvezi z množicami se je pojavil neke vrste nominalizem, katerega prvi in najvidnejši predstavnik je poljski logik S. Leśniewski, ki piše, da mu nikoli ni bilo jasno, kakšne objekte imajo v mislih logiki in matematiki, ko govorijo o množicah. V svojem prvem poskusu analize Russellovega protislovja je razvil teorijo relacije dela in celote, pri čemer izhaja iz naslednjih aksiomov:

A 1. Če je x del y, potem y ni del x.
A 2. Če je x del y in y del z, je x del z.
D 1. x je element y, če je x del y ali pa je x isto kot y.

Že iz definicije D 1 je jasno, da je vsaka reč element same sebe, da torej ni nobene reči, ki ne bi bila element same sebe in torej tudi množice takšnih reči ne more biti.

5. Pravila predikatnega računa, to je logike, ki jo je aksiomatiziral Frege in naprej razvijal Russell, zahtevajo od imenskih izrazov, da označujejo natančno en objekt, Leśniewski [4] pa je razvil logiko imen, v kateri so lahko imena, ki nimajo designata, ter imena, ki označujejo več reči, in lastna imena. Osnovni simbol je grška črka ε. Izraz »$A \varepsilon b$« beremo »A je b«, resničen pa je takrat, ko »A« označuje natanko eno reč, izraz »b« pa to isto reč, lahko pa še tudi kakšne druge. Vse trditve lahko izpeljemo iz naslednjega aksioma

$$A \varepsilon a \Leftrightarrow (\exists B) B \varepsilon A \wedge (\forall BC)(B \varepsilon A \wedge C \varepsilon A \Rightarrow B \varepsilon C) \wedge (\forall B)(B \varepsilon A \Rightarrow B \varepsilon a)$$

Na razpolago je tudi uvedba definicije stavkotvornih funktorjev ter pravilo definicije imenskih funktorjev. V definiensu imenskih definicij mora vedno nastopati pogoj »$a\varepsilon a$«. Vzemimo primera za obe vrsti definicij:

(1) $a\varepsilon trm<\tau> \Leftrightarrow a\varepsilon a \wedge \tau(a)$ [a je term, ki izpolnjuje τ]
(2) $N(a) \Leftrightarrow \neg(a\varepsilon a)$

Vzemimo, da lahko izpustimo pogoj »$a\varepsilon a$« v (1).
Potem bi imeli

(3) $a\varepsilon trm<\tau> \Leftrightarrow \tau(a)$
(4) $a\varepsilon trm<N> \Leftrightarrow \neg(a\varepsilon a)$ [sledi iz (2) in (3)]
(5) $(\exists b)(\forall a)(a\varepsilon b \Leftrightarrow \neg(a\varepsilon a))$ [sledi iz (4)]
(6) $(\exists b)(b\varepsilon b \Leftrightarrow \neg(b\varepsilon b))$ [sledi iz (5)]

To pa ni nič drugega kot neke vrste Russellova antinomija.

6. Teorija deskripcij. V poglavju 14 Principia Mathematica je uvedena oznaka »$(1x)(\Phi x)$« za »tisti x, ki izpolnjuje Φ«. Temu zapisu rečemo deskripcija oziroma opis. Zapis »$(1x)(\Phi x)$« določa objekt samo v primeru, ko izjavno funkcijo Φ izpolnjuje natančno en objekt. Po slovnični naravi gre tu za imenski funktor, katerega argument je stavkotvorni funktor imenskega argumenta. Če bi želeli imeti takšno oznako v predikatnem računu, bi moral izraz »$(1x)(\Phi x)$« označevati natančno določen objekt tudi v primeru, če noben x ne izpolnjuje Φ ali pa če več reči izpolnjuje Φ. V Principia Mathematica pa definicije ne predstavljajo uvedbe novega simbola temveč zgolj okrajšavo. Vsak izraz, v katerem nastopa novi simbol, je treba razumeti kot neki izraz, v katerem ta simbol ne nastopa. Tako je treba v zapisu »$\Psi(1x)(\Phi x)$« eliminirati novi simbol preko definicije

(1) $\psi(1x)(\Phi x) \Leftrightarrow (\exists b)((\forall x)(\Phi x \Leftrightarrow x = b) \wedge \psi b)$

Primer: $(1x)(\Phi x) = (1x)(\psi x)$ pomeni

$(\exists b)((\forall x)(\Phi x \Leftrightarrow x = b) \wedge b = (1x)(\psi x))$ oziroma
$(\exists b)((\forall x)(\Phi x \Leftrightarrow x = b) \wedge (\exists c)((\forall x)(\psi x \Leftrightarrow x = c) \wedge b = c))$

V logiki Leśniewskega pa lahko definiramo funktor »1« tako, da bo v primeru, če x, ki izpolnjuje Φ, ni enolično določen, izraz »$1<\Phi>$« brez designata:
(2) $a\varepsilon 1<\Phi> \Leftrightarrow a\varepsilon a \wedge \Phi(a) \wedge (\forall bc)(\Phi(b) \wedge \Phi(c) \Rightarrow b = c)$
Definicija (1) predstavlja stavkotvorno funkcijo argumentov ψ in Φ. V logiki Leśniewskega bi jo lahko zapisali

(3) $\Phi\varepsilon\psi \Leftrightarrow (\exists b)((\forall x)(\Phi x \Leftrightarrow x = b) \wedge \psi b)$
ali pa logično ekvivalentno [3]
(4) $\Phi\varepsilon\psi \Leftrightarrow (\exists b)\Phi b \wedge (\forall bc)(\Phi b \wedge \Phi c \Rightarrow b = c)(\forall b)(\Phi b \Rightarrow \psi b)$

Funktor »ε« v izrazu »$\Phi\varepsilon\psi$« je seveda druge kategorije kot »ε« v »$a\varepsilon b$«. Izraz »$\Phi\varepsilon\Psi$« oziroma »$\Psi(1x)(\Phi x)$« beremo »tisti x, ki izpolnjuje Φ, izpolnjuje tudi Ψ«.

Teh nekaj ilustracij naj bi pokazalo, da se da Russellovo teorijo deskripcij na zelo naraven način obravnavati v logiki Leśniewskega.

LITERATURA

[1] G. Frege, The Foundation of Arithmetic, Basil Blackwell, 1974 (prevod Die Grundlagen der Arithmetik, 1884)
[2] G. Frege, Philosophical and Mathematical Correspondance, Basil Blackwell, Oxford, 1980
[3] H. Hiz, Descriptions in Russell's Theory and in Ontology, Studia Logica 36 (1977) 4, 271—283
[4] V. F. Rickey, A Survey of Leśniewski's Logic, Studia Logica 36 (1977) 4, 407—426
[5] A. N. Whitehead, B. Russell, Principia Mathematica, Volume I, second edition, Cambridge U. pr. 1950