LOGIČNA SIMBOLIKA IN POUK MATEMATIKE

1. O koristnosti logične simbolike pri pouku matematike so mnenja različna. Tako nekateri menijo, da sodi ta simbolika že v nižje razrede osemletke, drugi pa, da niti na univerzo ne. Pri nas se je za slednje opredelil profesor Vadnal. Tako piše v Obzorniku **15** (1968) 3, str. 130—131 ter v Obzorniku **20** (1973) 6, str. 181:

> Tudi Skubic je skušal svoj učbenik modernizirati zlasti z uvajanjem logičnih simbolov. Toda tudi on je pri tem nedosleden in, če le more, zavije na pot bolj razumljive razlage v klasičnem jeziku. Zaradi tega je mnogo bolj razumljiv tam, kjer razpravlja po starem, kot pa tam, kjer razlaga v jeziku logičnih simbolov.
>
> Ko opredeli npr. na str. 274 zveznost funkcije, jo klasično definira takole: Funkcija $f(x)$ je v točki x_0 zvezna natanko tedaj, kadar moremo najti k vsakemu naprej predpisanemu pozitivnemu številu ε vsaj eno tako pozitivno število δ, da je izpolnjena neenačba $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, če je le $|x-x_0|<\delta$. To definicijo napiše nato še z logičnimi simboli. Nekaj strani za tem pa opredeli na str. 277 enakomerno zveznost funkcije kratkomalo takole: Funkcija $f(x)$ je na intervalu $[a, b]$ enakomerno zvezna natanko tedaj, kadar moremo najti k vsakemu naprej predpisanemu pozitivnemu številu ε vsaj eno tako pozitivno število $\delta(\varepsilon)$, da velja implikacija:
>
> $$|x-x'|<\delta(\varepsilon)\rightarrow|f(x)-f(x')|<\varepsilon$$
>
> Ni tu važno, kaj misli pri tem izšolani matematik, važno je, kaj in koliko razume pri tem študent, ki se šele uči in ki se šele vživlja v težaven pojem zveznosti. Vprašanje je, ali je smotrno uporabljati zgoščeno logično pisavo že pri prvem učenju kake snovi, ki je že v vajenem jeziku zadosti težka. Podobno vprašanje velja tudi za aksiomatično metodo: Ali tudi ta ne zahteva že določene stopnje poznavanja učne snovi, da jo zares koristno lahko uporabimo?
>
> Pri pedagoškem delu na nižjih stopnjah, kjer naj skušamo učencu kar najbolj pomagati do razumevanja učne tvarine, bi odsvetovali prekomerno rabo matematične simbolike, ki razumevanje lahko zelo oteži, ker misli učenec pojmovno, besedno in vsaj na začetku ne v simbolih. Simbole lahko s pridom rabimo šele, ko učenec tvarino vsebinsko že do neke mere obvlada. Pretirana raba simbolike, kjer se je lahko izognemo, namreč pri pedagoškem delu preveč utruja. Namesto simboličnega zapisa:
>
> $$\forall\,\varepsilon>o\;\exists\,\delta>o$$
>
> bi morda bil vsaj na začetku bolj razumljiv stavek:
>
> za vsako pozitivno število ε in za vsaj eno pozitivno število δ
>
> V obeh formulacijah povemo namreč vsebinsko natančno isto.

2. Navedimo sedaj nekaj izjav v klasičnem jeziku in uporabmo izraz »za vsak x in za vsaj en y« za branje kvantifikatorjev $(\forall x)(\exists y)$.

Beseda *število* se nanaša na naravna števila.

(1) Vsa števila, ki niso večja od 10, niso manjša od 7.

(2) Nobeno število, ki ni večje od 5, ni deljivo s 5.

(3) Vsaj eno število, ki ni večje od 10, ni manjše od 7.

(4) Za vsako naravno število x in za vsaj eno naravno število y velja, da je $y>x$.

(5) Za vsaj eno naravno število y in za vsako naravno število x velja $y>x$.

(6) Za vsako naravno število x in za vsaj eno naravno število y y ni večje od x.

(7) Za vsaj eno naravno število y in za vsako naravno število x y ni večje od x.

Potrebujemo kar nekaj časa, da ugotovimo, da so izjave (1), (2) in (3) resnice, čeprav se nanašajo na matematično znanje predšolskega otroka. Glede izjav (4) in (5) obstajajo različna mnenja. Jaz menim, da sta ekvivalentni in neresnični. Vrstici (6) in (7) sta še teže razumljivi, dvoumni in morda ne sodita niti med pravilne stavčne konstrukcije. Dvoumje izvira iz tega, ker kaže, da imata izraza »za vsak x in za vsaj en y« ter »za vsaj en y in za vsak x« isti pomen.

3. Če uvedemo kvantifikatorje tako, da rečemo, da bomo pisali »$\forall\, x \in \mathbf{N}$« namesto »za vsako naravno število x« še ne pokrijemo vseh primerov. Če se dogovorimo, da bo izraz »$S(x)$« označeval lastnost »x je sodo število«, potem lahko prevedemo naslednje izjave v simboliko:

(1) Vsako naravno število je sodo. (1′) $(\forall x)\,S(x)$

(2) Nobeno naravno število ni sodo. (2′) $(\forall x)\,\neg\,S(x)$

(3) Vsaj eno naravno število je sodo. (3′) $(\exists x)\,S(x)$

(4) Vsaj eno naravno število ni sodo. (4′) $(\exists x)\,\neg\,S(x)$

(5) Vsako naravno število ni sodo. (5′) $\neg\,(\forall x)\,S(x)$

Izjavi (4) in (5) sta logično ekvivalentni, zapisa pa se razlikujeta samo po tem, da namesto »vsako« piše »vsaj eno«. V slovenskem jeziku lahko torej v tem primeru naredimo to zamenjavo, ne da bi spremenili pomen, v simboličnem jeziku takšna zamenjava vedno spremeni tudi pomen. Nasprotniki simbolizma bodo to dejstvo vzeli za dokaz, da je simbolizem neuporaben. V resnici pa je slovenski jezik tisti, ki je težak, saj npr. dovoljuje spremembo vrstnega reda stavčnih členov. Oglejmo si primera nepravilne rabe, navedena v Slovenščini za vsakogar Janeza Gradišnika:

(6) Vse to, kar so takrat pisali o moji plači, ni bila resnica.

(7) Vsak osveščen pripadnik maloštevilnega naroda ne more biti ravnodušen do usode svojega narodnega jezika.

Naslednji primer pa kaže, da je lahko majhna sprememba v izražanju velika sprememba v pomenu:

(8) Vse, kar govorim, je neresnica.

(9) Vse, kar govorim, ni resnica.

Seveda pa simbolični jezik ne bo izpodrinil naravnega jezika, nasprotno, prevajanje iz enega v drugega bo izostrilo natančnost izražanja v naravnem jeziku, to pa je eden od najvišjih ciljev, ki jih želimo doseči.

4. Kot vemo, so definicije v matematiki v nekem smislu odveč, novo uvedeni pojem lahko v vsaki trditvi eliminiramo tako, da namesto *definienduma* uporabimo *definiens*. Če prepišemo definiensa definicij iz citiranega odstavka, dobimo v bistvu tole:

(1) K vsakemu naprej predpisanemu pozitivnemu številu ε lahko najdemo vsaj eno tako pozitivno število δ, da je izpolnjena neenačba $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, če je le $|x-x_0|<\delta$.

(2) K vsakemu naprej predpisanemu pozitivnemu številu ε lahko najdemo vsaj eno tako pozitivno število $\delta(\varepsilon)$, da velja implikacija:

$$|x - x'| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Po logični strani je razlika le v tem, da je spremenljivka x_0 zamenjana z x'. Pogoj (1) pravi o x, x_0 in f prav isto kot pogoj (2) o x, x' in f. Kaj pa pravzaprav pogoj (1) pove — isto, kot katerikoli od naslednjih 6 pogojev:

(3) K vsakemu naprej predpisanemu pozitivnemu številu ε lahko najdemo vsaj eno tako pozitivno število δ, da je

$$|x - x_0| \geqslant \delta \quad \text{ali} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(4) Za vsako pozitivno število ε velja, da lahko najdemo vsaj eno takšno pozitivno število δ, za katero velja $|x - x_0| \geqslant \delta$ ali pa je $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

(5) Za vsako pozitivno število ε velja:

$$x \neq x_0 \quad \text{ali} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(6) $x \neq x_0$ ali pa za vsako pozitivno število ε velja neenačba $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

(7) $x \neq x_0$ ali pa je $f(x) = f(x_0)$.

(8) Če velja $x = x_0$, potem velja $f(x) = f(x_0)$.

To zadnje pa ni nič drugega kot eden od logičnih zakonov oziroma trivialna resnica.

5. Prejšnje argumentiranje je v celoti vezano na logične zakone, ponovimo ga lahko tudi v simboliki.

(1) $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

(2) $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(|x - x_0| \geqslant \delta \vee |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

Vrstica (1) je logično ekvivalentna (2) zaradi zakona $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg\, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$.

(3) $(\forall \varepsilon > 0)\,((\exists \delta > 0)\,|x - x_0| \geqslant \delta \vee |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

Vrstica (3) je logično ekvivalentna vrstici (2) zaradi zakona $(\exists\, a)\,(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\exists\, a)\,\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, kjer a ne nastopa v formuli $\mathcal{B}$.

(4) $(\forall \varepsilon > 0)\,(x \neq x_0 \vee |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

Vrstica (3) je ekvivalentna vrstici (4) po izreku:

$$x \neq x_0 \Leftrightarrow (\exists \delta > 0)\,|x - x_0| \geqslant \delta$$

(5) $x \neq x_0 \vee (\forall \varepsilon > 0)\,|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Vrstica (5) je ekvivalentna vrstici (4) po zakonu $\forall\, a\,(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \vee \forall\, a\,\mathcal{B}$, kjer a ne nastopa v $\mathcal{A}$.

(6) $x \neq x_0 \vee f(x) = f(x_0)$

Vrstica (6) je ekvivalentna vrstici (5) po izreku $f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

(7) $x = x_0 \Rightarrow f(x) = f(x_0)$

Vrstica (7) je ekvivalentna vrstici (6) zaradi zakona $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg\, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$.

6. Na tej stopnji bodo nasprotniki simbolizma trdili, da je nekoristen in da ga kaže prepovedati. Toda za te nejasnosti ni kriv simbolizem. Med pogojema

(1) $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

(2) $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x)\,(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

je bistvena razlika. Prvi daje odnos med tremi objekti x, x_0 in f, drugi pa med dvema, namreč odnos med x_0 in f — prav ta je *zveznost* funkcije f v točki x_0. Toda prav (1) se običajno daje kot prireditev pogoja (1) iz točke **4.** Kot prevod slovenskega teksta je to seveda lahko točno, toda ne prvo ne drugo ni ustrezen definiens za definicijo zveznosti.

7. Simbolična logika lahko opravi svojo nalogo le, če ji damo dovolj prostora in časa. Če jo odpravimo v nekaj vrsticah in minutah, bo bolj škodovala, kot pa razjasnjevala, odprla bo več problemov, kot pa bi jih rešila. Kolikokrat bo otrok ponovil »$7 \cdot 8 = 56$«, preden si bo dokončno zapomnil Kolikokrat je treba uporabiti zakon »$\neg\,(\forall x)\,\mathcal{A} \Leftrightarrow (\exists x)\,\neg\,\mathcal{A}$, da ga dokončno obvladamo, ali pa »$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg\,\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$«? Izražanje matematičnih tekstov v pogovornem jeziku je večkrat težavna zadeva. Še teže je formulirati pravila sklepanja za pogovorni jezik. Brez pravil sklepanja pa dokazovanje nima nikakršnega smisla. V šoli smo slišali nekaj pravil za stavčno logiko, za kvantifikatorje pa nobenih; prav tako o pravilnem formuliranju definicij nikjer ni bilo govora. Primer definicije zveznosti zadosti zgovorno kaže, da to znanje ne pride samo po sebi.

Izidor Hafner

NOVE KNJIGE

MATEMATIKA — stručno-metodički časopis. — Zagreb, Školska knjiga, 10 (1981) št. 1, 2, 3, 4.

Revija Matematika objavlja članke, ki obravnavajo splošne probleme matematičnega izobraževanja (zamisli, načrte, programe idr.), strokovne in metodične poglede programske vsebine matematičnih predmetov na vseh nivojih izobraževanja, poročila o novih matematičnih teorijah, predstavitve posameznih matematičnih problemov in zanimivih problemov iz drugih področij povezanih z matematiko, razne zanimivosti iz zgodovine matematike, obvestila o novih knjigah in revijah ter obvestila o važnejših dogajanjih v zvezi z matematiko.

Revijo Matematika so izdajale že različne založbe v Beogradu, Ljubljani in Sarajevu. Nepravočasno izhajanje revije bo skušala popraviti Školska knjiga iz Zagreba, ki je zamudo za leto 1981 že nadomestila, obljublja pa, da bo kmalu prišla na tekoče. Revijo priporočamo vsem aktivom matematikov na srednjih in osnovnih šolah v Sloveniji. V imenu uredniškega odbora revije vabimo člane našega društva, da se v reviji oglašajo s prispevki.

Ciril Velkovrh