Obzornik mat. fiz. **25** (1978) 1

IZREK O DEDUKCIJI

IZIDOR HAFNER

AMS Subj. Class. (1970) 02 B 10

V tem članku je dokazan izrek o dedukciji.

THE DEDUCTION THEOREM

In this article the deduction theorem is proved.

V tem članku bomo privzeli terminologijo iz razprave [1], zaradi lažjega razumevanja pa bomo ponovili nekaj definicij.

Formalni dokazi popolnoma elementarnih izrekov so ponavadi zelo dolgi. S formalizacijo teorije dobimo eksplicitno definicijo tega, kar je dokaz v tej teoriji. Ko smo to dosegli, ni vedno nujno sklicevati se direktno na to definicijo. Formalno dokazljivost neke formule (okrajšava za dobro oblikovano formulo) dosti laže dosežemo z uporabo metamatematičnih izrekov, ki govorijo o eksistenci formalnih dokazov. Dokazi teh metaizrekov pa morajo vsaj implicitno vsebovati metodo, kako pridemo do formalnih dokazov.

Najbolj enostavne take izreke bomo imenovali **izpeljana pravila,** ker izražajo principe, za katere lahko rečemo, da so izpeljani iz postuliranih pravil; dokazano je, da ne povečamo množice dokazljivih formul, če te principe uporabimo kot dodatne metode izpeljevanja.

V formalnih sistemih ima dokaz najbolj enostavno možno strukturo, sestoji namreč iz enega samega končnega zaporedja formul. V matematiki pa imajo dokazi večkrat bolj kompliciranо strukturo; pogosto na primer dokazujemo tako, da naredimo kakšno predpostavko.

Definirajmo zdaj pojem formalne izpeljivosti iz hipotez v dani formalni teoriji.

Naj bo dana prazna ali končna množica formul $\{\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n\}$. Vsako končno zaporedje formul imenujemo **dedukcija** ali **izpeljava** iz hipotez $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$, če za vsako formulo v tem zaporedju velja ena izmed naslednjih možnosti:

— da je ena izmed formul $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$;

— da je aksiom;

— da je dobljena iz formul, ki stojijo v zaporedju pred njo, po nekem pravilu sklepanja.

Rekli bomo, da je to zaporedje **dedukcija** njegove zadnje formule iz hipotez $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$. Simbolični izraz

$$\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n \vdash \mathscr{E}$$

bo izražal trditev, da je formula $\mathscr{E}$ izpeljiva iz hipotez $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$, to je, da obstaja dedukcija formule $\mathscr{E}$ iz hipotez $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$.

V posebnem primeru, ko je množica hipotez prazna, pravimo, da je formula $\mathscr{E}$ **dokazljiva.**

Naš glavni rezultat, izrek o dedukciji, bomo dokazali za teorije, ki imajo poleg drugih tudi naslednje aksiome (bolj natančno — aksiomske sheme):

(A1) $\mathscr{A} \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A})$;

(A2) $(\mathscr{A} \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C})) \Rightarrow ((\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{C}))$;

(A3) $(\forall x)(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow (\forall x)\mathscr{B})$, kjer spremenljivka x ne nastopa prosto v v formuli $\mathscr{A}$; edini pravili sklepanja pa sta:

(MP) modus ponens ali pravilo odcepitve: iz $\mathscr{A}$ in $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$ sklepamo na $\mathscr{B}$;

(G) generalizacija: iz $\mathscr{A}$ sklepamo na $(\forall x)\mathscr{A}$.

Vidimo torej, da nismo izčrpali celotnega spiska aksiomov predikatnega računa (aksiomi PR1—PR5 v [1]). Preostali dve aksiomski shemi sta:

(A4) $(\neg \mathscr{B} \Rightarrow \neg \mathscr{A}) \Rightarrow ((\neg \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A}) \Rightarrow \mathscr{B})$

(A5) $(\forall x)\mathscr{A} \Rightarrow S_t^x \mathscr{A} \mid$, kjer je term t prost za spremenljivko x v formuli $\mathscr{A}$.

To sta shemi PR3 in PR4 iz [1].

Za take formalne teorije je definicija dedukcije naslednja:

Končno zaporedje formul $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ je dedukcija (formule $\mathscr{B}_m$) iz hipotez $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ natanko tedaj, kadar za vsak $k = 1, 2, \ldots, m$ velja natanko ena izmed točk

(DH1) $\mathscr{B}_k$ je ena izmed formul $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$;

(DH2) $\mathscr{B}_k$ je aksiom;

(DH3) obstajata taki naravni števili $i, j < k$, da je formula $\mathscr{B}_k$ dobljena iz formul $\mathscr{B}_i$ in $\mathscr{B}_j$ po pravilu (MP) (tedaj je $\mathscr{B}_j$ kar $\mathscr{B}_i \Rightarrow \mathscr{B}_k$);

(DH4) obstaja tako naravno število $i < k$, da je $\mathscr{B}_k$ dobljena iz formule $\mathscr{B}_i$ z generalizacijo ($\mathscr{B}_k$ je torej $(\forall x)\mathscr{B}_i$).

Pri omenjenih predpostavkah glede formalne teorije velja naslednji **izrek o dedukciji:**

Če obstaja dedukcija formule $\mathscr{B}$ iz hipotez $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$, v kateri ni uporabljeno pravilo generalizacije na nobeno izmed spremenljivk, ki nastopajo prosto v formuli $\mathscr{A}_n$, potem obstaja dedukcija formule $\mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}$ iz hipotez $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_{n-1}$.

Iz dokaza tega izreka bo razvidno, kako dedukcijo formule $\mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}$ iz hipotez $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_{n-1}$ tudi dobimo, če poznamo dedukcijo formule $\mathscr{B}$ iz hipotez $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$. Ta izrek bomo torej lahko uporabljali kot izvedeno pravilo: če hočemo dokazati $\vdash \mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$, to dokažemo s trditvijo $\mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$, to je, da privzamemo $\mathscr{A}$ kot hipotezo.

Preden se lotimo dokaza izreka o dedukciji, moramo dokazati dva pomožna izreka.

Lema 1. Velja $\vdash \mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{A}$ (formula $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{A}$ je dokazljiva).

Dokaz. Naslednje zaporedje formul je dokaz formule $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{A}$.

(1) $(\mathscr{A} \Rightarrow ((\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{A}) \Rightarrow \mathscr{A})) \Rightarrow ((\mathscr{A} \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{A})) \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{A}))$

To je aksiom po shemi (A2), če vstavimo namesto $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ in $\mathscr{C}$ formule $\mathscr{A}$, $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{A}$, $\mathscr{A}$.

(2) $\mathscr{A} \Rightarrow ((\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{A}) \Rightarrow \mathscr{A})$

To je aksiom po shemi (A1), če vstavimo za $\mathscr{A}$ in $\mathscr{B}$ formuli $\mathscr{A}$ in $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{A}$.

(3) $(\mathscr{A} \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{A})) \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{A})$

Ta točka je posledica točk (1) in (2) po pravilu (MP).

(4) $\mathscr{A} \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{A})$

Točka (4) je aksiom po shemi (A1).

(5) $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{A}$

To dobimo iz točk (3) in (4) po pravilu (MP).

Lema 2. Če velja $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \vdash \mathscr{B}$ in $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \vdash \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}$, potem velja $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \vdash \mathscr{C}$.

Dokaz. Predpostavimo $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n \vdash \mathscr{B}$ in $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n \vdash \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}$. Tedaj obstaja dedukcija $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_m$ formule $\mathscr{B}$ iz $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ ($\mathscr{B}_m$ je $\mathscr{B}$) in dedukcija $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \ldots, \mathscr{C}_k$ formule $\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}$ iz $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ ($\mathscr{C}_k$ je torej $\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}$). Potem je zaporedje $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_m$, $\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_k, \mathscr{C}$ dedukcija formule $\mathscr{C}$ iz $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$, saj je formula $\mathscr{C}$ dobljena iz $\mathscr{B}_m$ in $\mathscr{C}_k$ po pravilu (MP).

Lema 2 se često uporablja v dokazovanju, včasih je navedena kot uporaba pravila (MP).

Dokaz izreka o dedukciji. Predpostavimo, da velja $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \vdash \mathscr{B}$. Potem obstaja dedukcija $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_m$ formule $\mathscr{B}$ iz hipotez $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ ($\mathscr{B}$ je $\mathscr{B}_m$).

Dokazali bomo

(1) $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1} \vdash \mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}_k$ za $k = 1, 2, \ldots, m$. Če postavimo $k = m$ v (1), dobimo trditev izreka o dedukciji.

Trditev (1) bomo dokazali z indukcijo. Po pravilu matematične indukcije moramo dokazati, da velja formula za število 1 in če velja za število k, da velja tudi za $k + 1$. Tokrat pa bo sklepanje malo drugačno.

Veljavnost kake trditve za vsa naravna števila pokažemo tako, da iz predpostavke, da ta trditev velja za vsa naravna števila, ki so manjša od števila k, sklepamo o pravilnosti trditve za število k. Stavek, da velja trditev za vsa naravna števila, ki so manjša od 1, je vedno izpolnjen, saj ni nobenega števila, manjšega od 1.

Primer 1. Predpostavimo, da $\mathscr{B}_k$ izpolnjuje točko (DH1) definicije dedukcije iz hipotez. Potem je formula $\mathscr{B}_k$ ena izmed hipotez, na primer $\mathscr{A}_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Primer 1a. $j \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}$. Iz točke (DH1) sledi

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1} \vdash \mathscr{A}_j \, (\equiv \mathscr{B}_k)$$

Po točki (DH2) in (A1) velja

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1} \vdash \mathscr{B}_k \Rightarrow (\mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}_k)$$

Iz leme 2 sledi

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1} \vdash \mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}_k$$

Primer 1b. Naj bo j = n. Potem je $\mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}_k$ kar $\mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{A}_n$ in zato $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1} \vdash \vdash \mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}_k$ po lemi 1 (Lema 1 trdi $\vdash \mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{A}_n$, to pa implicira $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1} \vdash \mathscr{A}_n \Rightarrow \Rightarrow \mathscr{A}_n$, saj je vsaka dokazljiva formula tudi izpeljiva iz kakršnekoli množice hipotez).

Primer 2. Vzemimo, da $\mathscr{B}_k$ izpolnjuje točko (DH2). Potem je $\mathscr{B}_k$ aksiom dane teorije in seveda velja

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1} \vdash \mathscr{B}_k$$

Iz enakega razloga velja tudi

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1} \vdash \mathscr{B}_k \Rightarrow (\mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}_k)$$

saj je desna stran glede na $\vdash$ aksiom po (A1).
Po lemi 2 dobimo

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1} \vdash \mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}_k$$

Primer 3. Vzemimo, da formula $\mathscr{B}_k$ izpolnjuje točko (DH3) definicije. Potem obstajata naravni števili $i, j < k$, da je $\mathscr{B}_j$ kar $\mathscr{B}_i \Rightarrow \mathscr{B}_k$. Zaradi indukcijske hipoteze imamo

(2) $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1} \vdash \mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}_i$ in
(3) $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1} \vdash \mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}_j \, (\equiv \mathscr{A}_n \Rightarrow (\mathscr{B}_i \Rightarrow \mathscr{B}_k))$

Po shemi (A2) dobimo

(4) $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1} \vdash (\mathscr{A}_n \Rightarrow (\mathscr{B}_i \Rightarrow \mathscr{B}_k)) \Rightarrow ((\mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}_i) \Rightarrow (\mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}_k))$

Iz točk (3) in (4) z uporabo leme 2 dobimo

(5) $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1} \vdash (\mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}_i) \Rightarrow (\mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}_k)$

Še enkrat uporabimo lemo 2 na točki (2) in (5) pa sledi

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1} \vdash \mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}_k$$

Primer 4. Vzemimo, da formula $\mathscr{B}_k$ izpolnjuje točko (DH4) definicije. Potem $\mathscr{B}_k$ dobimo iz neke formule $\mathscr{B}_i$ ($i < k$) z generalizacijo. $\mathscr{B}_k$ je torej $(\forall x)\, \mathscr{B}_i$ in x ne nastopa prosto v $\mathscr{A}_n$. Po indukcijski hipotezi imamo

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1} \vdash \mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}_i$$

Z generalizacijo od tod dobimo

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1} \vdash (\forall x)\, (\mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}_i)$$

Po točki (DH2) in ker je (A3) aksiomska shema, imamo

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1} \vdash (\forall x)\,(\mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}_i) \Rightarrow (\mathscr{A}_n \Rightarrow (\forall x)\,\mathscr{B}_i)$$

Po lemi 2 velja $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1} \vdash \mathscr{A}_n \Rightarrow (\forall x)\,\mathscr{B}_i$

oziroma $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1} \vdash \mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}_\kappa$

Predpostavko, da x ne nastopa prosto v $\mathscr{A}_n$, smo potrebovali zaradi uporabe aksioma (A3).

Tako smo izrek o dedukciji dokazali.

Aksiomsko shemo (A3) smo uporabili le v primeru 4. To pa pomeni, da v teorijah, v katerih je pravilo (MP) edino pravilo sklepanja, lahko dokažemo izrek o dedukciji že z aksiomskima shemama (A1) in (A2).

Taka teorija je na primer stavčni račun iz [1]. Tako smo dokazali:

Posledica 1. Če je $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \vdash \mathscr{B}$, potem je $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1} \vdash \mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}$, kjer je $\vdash$ znak za relacijo izpeljivosti v stavčnem računu.

Posledica 2. Če velja $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n \vdash \mathscr{B}$ in obstaja taka dedukcija, da v njej nismo uporabili pravila generalizacije na nobeno izmed spremenljivk, ki nastopajo prosto v katerikoli izmed hipotez, potem velja $\vdash \mathscr{A}_1 \Rightarrow (\mathscr{A}_2 \Rightarrow \ldots (\mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}) \ldots)$. To posledico pokažemo tako, da n-krat uporabimo izrek o dedukciji. S tem izrekom pa smo pojem izpeljivosti iz hipotez prevedli na pojem dokazljivosti.

Opomba. Kako iz dane dedukcije $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_m$ dobimo dedukcijo formule $\mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}$ iz hipotez $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_{n-1}$? To naredimo tako, da drugo za drugo tvorimo dedukcije formul $\mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ iz hipotez $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_{n-1}$ in sicer tako, kot nam pove dokaz izreka o dedukciji. Če smo na primer $\mathscr{B}_k$ dobili po točki (DH4) in je $\mathscr{B}_1', \ldots, \mathscr{B}_l', \mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}_i$ dedukcija formule $\mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}_i$, potem je

$$\mathscr{B}_1', \mathscr{B}_2', \ldots, \mathscr{B}_l', \mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}_i, (\forall x)\,(\mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}_i), (\forall x)\,(\mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}_i) \Rightarrow (\mathscr{A}_n \Rightarrow (\forall x)\,\mathscr{B}_i),$$
$$\mathscr{A}_n \Rightarrow (\forall x)\,\mathscr{B}_i$$

dedukcija formule $\mathscr{A}_n \Rightarrow (\forall x)\,\mathscr{B}_i$ $(\equiv \mathscr{A}_n \Rightarrow \mathscr{B}_\kappa)$ iz hipotez $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_{n-1}$.

V nadaljevanju bomo dokazali nekaj izrekov z uporabo izreka o dedukciji. Primeri 1 do 4 veljajo za stavčni račun in seveda za vse teorije, ki stavčni račun vsebujejo.

Primer 1. Dokažimo trditev

$$\vdash (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow ((\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}) \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{C}))$$

Dokaz poteka takole:

(1) $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}, \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}, \mathscr{A} \vdash \mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$
(2) $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}, \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}, \mathscr{A} \vdash \mathscr{A}$
(3) $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}, \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}, \mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$
(4) $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}, \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}, \mathscr{A} \vdash \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}$
(5) $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}, \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}, \mathscr{A} \vdash \mathscr{C}$
(6) $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}, \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C} \vdash \mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{C}$

Vrstice (1), (2) in (4) so veljavne, saj so na desni strani hipoteze. Vrstici (3) in (5) sta dobljeni iz prejšnjih vrtic po pravilu (MP). Vrstica (6) pa je dobljena z uporabo izreka o dedukciji iz (5). Če uporabimo izrek o dedukciji še dvakrat, dobimo našo trditev. Izpeljano pravilo, ki ga določa vrstica (6), bomo kasneje večkrat uporabili.

Primer 2. Zaporedje formul $\mathscr{A}, \mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}, \mathscr{B}$ je dedukcija formule $\mathscr{B}$ iz formul $\mathscr{A}, \mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$. To bomo predstavili v stolpcu

(1) $\mathscr{A}, \mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B} \vdash \mathscr{A}$
(2) $\mathscr{A}, \mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B} \vdash \mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$
(3) $\mathscr{A}, \mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B} \vdash \mathscr{B}$

Dokaz izreka o dedukciji nam omogoča, da to dedukcijo spremenimo v dedukcijo formule $(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{B}$ iz hipoteze $\mathscr{A}$. Glede na dokaz izreka o dedukciji moramo konstruirati dedukcijo $\mathscr{A} \vdash (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{A}$. To je primer 1a dokaza izreka o dedukciji:

$\mathscr{A} \vdash \mathscr{A}$
$\mathscr{A} \vdash \mathscr{A} \Rightarrow ((\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{A})$
$\mathscr{A} \vdash (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{A}$

Imamo namreč $n = 2$; formule $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{B}_c$ so zaporedoma $\mathscr{A}, \mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}, \mathscr{A}$.

Nato moramo dokazati

$$\mathscr{A} \vdash (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B})$$

To je primer 1b dokaza izreka o dedukciji. Uporabiti moramo dokaz leme 1.

Ostane še primer

$$\mathscr{A} \vdash (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{B}$$

To je primer 3 dokaza izreka o dedukciji, kjer so formule $\mathscr{B}_i, \mathscr{B}_j$, in $\mathscr{B}_k$ kar zaporedoma $\mathscr{A}$, $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$, $\mathscr{B}$.

Če zdaj vse skupaj strnemo v zaporedje formul, dobimo dedukcijo formule $(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{B}$ iz hipoteze $\mathscr{A}$:

$\mathscr{A}$, $\mathscr{A} \Rightarrow ((\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{A})$, $(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{A}$, $((\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow (((\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B})) \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B})))$ $\Rightarrow (((\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow ((\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}))) \Rightarrow ((\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B})))$,
$(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow (((\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B})) \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}))$,
$((\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow ((\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}))) \Rightarrow ((\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}))$,
$(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow ((\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}))$,
$(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B})$,
$((\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B})) \Rightarrow (((\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{A}) \Rightarrow ((\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{B}))$,
$((\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{A}) \Rightarrow ((\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{B})$,
$(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{B}$

Da je to res iskana dedukcija, se lahko prepričamo neposredno iz definicije dedukcije. Ta zgled nam je tudi pokazal, koliko se skrajša sklepanje z uporabo izvedenih pravil.

Primer 3. Velja $\mathscr{A} \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C})$, $\mathscr{B} \vdash \mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{C}$.

Dokaz. (1) $(\mathscr{A} \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C})) \Rightarrow ((\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{C}))$
(2) $\mathscr{A} \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C})$
(3) $(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{C})$
(4) $\mathscr{B}$
(5) $\mathscr{B} \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B})$
(6) $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$
(7) $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{C}$

Točka (1) je aksiom (A2), v točkah (2) in (4) nastopata hipotezi, točka (5) je aksiom (A1), (6) dobimo z uporabo (MP) v (4) in (5) in točko (7) z uporabo (MP) v (3) in (6).

Primer 4. (a) $\vdash \neg\neg\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B}$
(b) $\vdash \mathscr{B} \Rightarrow \neg\neg\mathscr{B}$
(c) $\vdash (\neg\mathscr{B} \Rightarrow \neg\mathscr{A}) \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B})$
(d) $\vdash (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow (\neg\mathscr{B} \Rightarrow \neg\mathscr{A})$

Dokaz.

(a) (1) $(\neg\mathscr{B} \Rightarrow \neg\neg\neg\mathscr{B}) \Rightarrow ((\neg\mathscr{B} \Rightarrow \neg\mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{B})$
(aksiom po (A4))

(2) $\neg\mathscr{B} \Rightarrow \neg\mathscr{B}$ (lema 1)
(3) $(\neg\mathscr{B} \Rightarrow \neg\neg\mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{B}$ (iz (1) in (2) po primeru 3)
(4) $\neg\neg\mathscr{B} \Rightarrow (\neg\mathscr{B} \Rightarrow \neg\neg\mathscr{B})$ (aksiom (A1))
(5) $\neg\neg\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B}$ (primer 1 iz (3) in (4))

(b) (1) $(\neg\neg\neg\mathscr{B} \Rightarrow \neg\mathscr{B}) \Rightarrow ((\neg\neg\neg\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow \neg\neg\mathscr{B})$ (aksiom (A4))
(2) $\neg\neg\neg\mathscr{B} \Rightarrow \neg\mathscr{B}$ (točka (a) tega primera)
(3) $((\neg\neg\neg\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow \neg\neg\mathscr{B})$ (iz (1) in (2) po (MP))
(4) $\mathscr{B} \Rightarrow (\neg\neg\neg\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B})$ (aksiom (A1))
(5) $\mathscr{B} \Rightarrow \neg\neg\mathscr{B}$ (iz (3) in (4) po primeru 1)

(c) (1) $\neg\mathscr{B} \Rightarrow \neg\mathscr{A}$ (hipoteza)
(2) $\mathscr{A}$ (hipoteza)
(3) $(\neg\mathscr{B} \Rightarrow \neg\mathscr{A}) \Rightarrow ((\neg\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A}) \Rightarrow \mathscr{B})$ (aksiom po (A4))
(4) $\mathscr{A} \Rightarrow (\neg\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A})$ (aksiom po (A1))
(5) $(\neg\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A}) \Rightarrow \mathscr{B}$ (iz (1) in (3) po (MP))
(6) $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$ (iz (4) in (5) po primeru 1)
(7) $\mathscr{B}$ (iz (2) in (6) po (MP))

Iskani rezultat dobimo z dvakratno uporabo izreka o dedukciji.

(d) (1) $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$ (hipoteza)
(2) $\neg\neg\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{A}$ (točka (a) primera 4)
(3) $\neg\neg\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$ (primer 1)
(4) $\mathscr{B} \Rightarrow \neg\neg\mathscr{B}$ (točka (b))
(5) $\neg\neg\mathscr{A} \Rightarrow \neg\neg\mathscr{B}$ (iz (3) in (4) po primeru 1)
(6) $(\neg\neg\mathscr{A} \Rightarrow \neg\neg\mathscr{B}) \Rightarrow (\neg\mathscr{B} \Rightarrow \neg\mathscr{A})$ (točka (c))
(7) $\neg\mathscr{B} \Rightarrow \neg\mathscr{A}$ (iz (5) in (6) po (MP))

Nato uporabimo izrek o dedukciji.

Primer 5. Razpravljanje bomo končali z dokazom trditve

$$\vdash (\exists y)(\forall x)\mathscr{A} \Rightarrow (\forall x)(\exists y)\mathscr{A}$$

v predikatnem računu. Spomnimo se, da smo eksistenčni kvantifikator uvedli v [1] z definicijo

$(\exists x)\mathscr{A}$ je okrajšava za $\neg(\forall x)\neg\mathscr{A}$

Obrat zgornje formule, namreč formula

$$(\forall x)(\exists y)\mathscr{A} \Rightarrow (\exists y)(\forall x)\mathscr{A}$$

ni logično veljavna. Vzemimo interpretacijo, katere domena je množica naravnih števil, formula $\mathscr{A}$ pa naj pomeni, da je število y večje od števila x. Potem je leva stran implikacije pravilna:

k vsakemu naravnemu številu obstaja večje število; desna stran pa je nepravilna: obstaja naravno število, ki je večje od vseh.

Svojo trditev bomo izpeljali iz naslednjih trditev:

(1) $\vdash \mathscr{A} \Rightarrow (\exists y)\mathscr{A}$
(2) $\vdash (\forall x)(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow ((\forall x)\mathscr{A} \Rightarrow (\forall x)\mathscr{B})$
(3) $\vdash (\forall x)(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow ((\exists x)\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B})$

pri čemer v (3) x ne nastopa prosto v $\mathscr{B}$.

Predpostavimo, da smo trditve (1), (2) in (3) že dokazali. Potem z generalizacijo iz (1) dobimo

(4) $(\forall x)(\mathscr{A} \Rightarrow (\exists y)\mathscr{A})$

Če zdaj v (2) pišemo $(\exists y)\mathscr{A}$ namesto $\mathscr{B}$, potem s pravilom (MP) iz (2) in (4) dobimo

(5) $(\forall x)\mathscr{A} \Rightarrow (\forall x)(\exists y)\mathscr{A}$

iz tega pa z generalizacijo

(6) $(\forall y)((\forall x)\mathscr{A} \Rightarrow (\forall x)(\exists y)\mathscr{A})$

Če v (3) pišemo y, $(\forall x)\mathscr{A}$, $(\forall x)(\exists y)\mathscr{A}$ namesto x, $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ in uporabimo pravilo (MP) na (3) in (6), dobimo

$$(\exists y)(\forall x)\mathscr{A} \Rightarrow (\forall x)(\exists y)\mathscr{A}$$

Preostane nam torej samo še, da dokažemo točke (1), (2) in (3). Preden se lotimo dokaza, moramo izpeljati še pravilo *reductio ad absurdum*:

iz $\Gamma, \neg\mathscr{B} \vdash \neg\mathscr{A}$ in $\Gamma, \neg\mathscr{B} \vdash \mathscr{A}$ sledi $\Gamma \vdash \mathscr{B}$, kjer je Γ neka končna množica formul in v teh izpeljavah ne uporabljamo generalizacije na spremenljivke, ki so proste v $\mathscr{B}$.

Če uporabimo izrek o dedukciji na hipotezi, dobimo $\Gamma \vdash \neg\mathscr{B} \Rightarrow \neg\mathscr{A}$ in $\Gamma \vdash \neg\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A}$. Od tod z dvakratno uporabo pravila (MP) in aksioma (A4)

$$(\neg\mathscr{B} \Rightarrow \neg\mathscr{A}) \Rightarrow ((\neg\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A}) \Rightarrow \mathscr{B})$$

dobimo $\Gamma \vdash \mathscr{B}$.

Dokaz točke (1):

(i) $(\forall y)\neg\mathscr{A} \Rightarrow \neg\mathscr{A}$	(aksiom (A5), vzamemo $S_y^y \neg\mathscr{A}$ |, ki je $\neg\mathscr{A}$)
(ii) $\neg\neg\mathscr{A} \Rightarrow \neg(\forall y)\neg\mathscr{A}$	(iz (i) po točki (d) primera 4)
(iii) $\mathscr{A} \Rightarrow \neg\neg\mathscr{A}$	(točka (b) primera 4)
(iv) $\mathscr{A} \Rightarrow (\exists y)\mathscr{A}$	(dobimo iz (ii) in (iii) po primeru 1 in uporabimo definicijo za $\exists$).

Dokaz točke (2) sledi iz pravilnosti naslednjih vrstic:

$(\forall x)(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}), (\forall x)\mathscr{A} \vdash \mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$	(uporabimo aksiom (A5) in (MP), $S_x^x(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B})$ | je kar $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$)
$(\forall x)(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}), (\forall x)\mathscr{A} \vdash \mathscr{A}$	(uporabimo (A5) in (MP), $S_x^x\mathscr{A}$ | je $\mathscr{A}$)
$(\forall x)(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}), (\forall x)\mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$	(iz prejšnjih vrstic po (MP))
$(\forall x)(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}), (\forall x)\mathscr{A} \vdash (\forall x)\mathscr{B}$	(z generalizacijo iz prejšnje vrstice).

Trditev (2) dobimo nato z dvakratno uporabo izreka o dedukciji.

Dokaz točke (3):

$(\forall x)(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}), (\exists x)\mathscr{A}, \neg\mathscr{B} \vdash \mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$	(tako kot v prvi vrstici dokaza točke (2))
$(\forall x)(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}), (\exists x)\mathscr{A}, \neg\mathscr{B} \vdash \neg\mathscr{B}$	(definicija dedukcije: (DH1))
$(\forall x)(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}), (\exists x)\mathscr{A}, \neg\mathscr{B} \vdash \neg\mathscr{A}$	(posledica točke (d) primera 4)
$(\forall x)(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}), (\exists x)\mathscr{A}, \neg\mathscr{B} \vdash (\forall x)\neg\mathscr{A}$	(z generalizacijo iz prejšnje vrstice)
$(\forall x)(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}), (\exists x)\mathscr{A}, \neg\mathscr{B} \vdash \neg(\forall x)\neg\mathscr{A}$	(definicija dedukcije (DH1) in definicija za $\exists$)
$(\forall x)(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}), (\exists x)\mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$	(reductio ad absurdum).

Izid dobimo, ko uporabimo izrek o dedukciji.

LITERATURA

[1] Niko Prijatelj, *Formalna izgradnja logičnega jezika*, Obzornik mat. fiz., **25** (1978) 20—33.