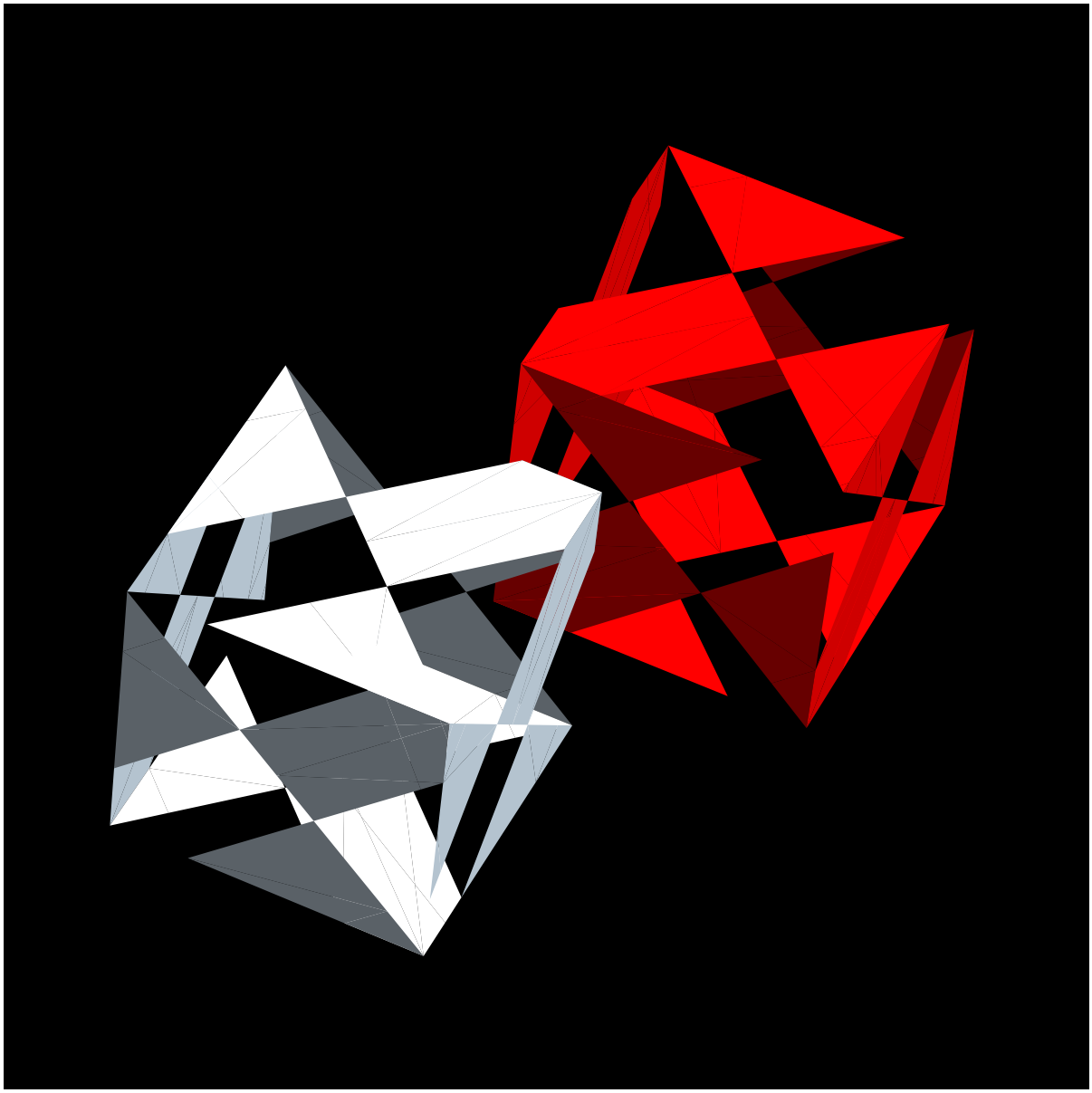
Spoštovani,

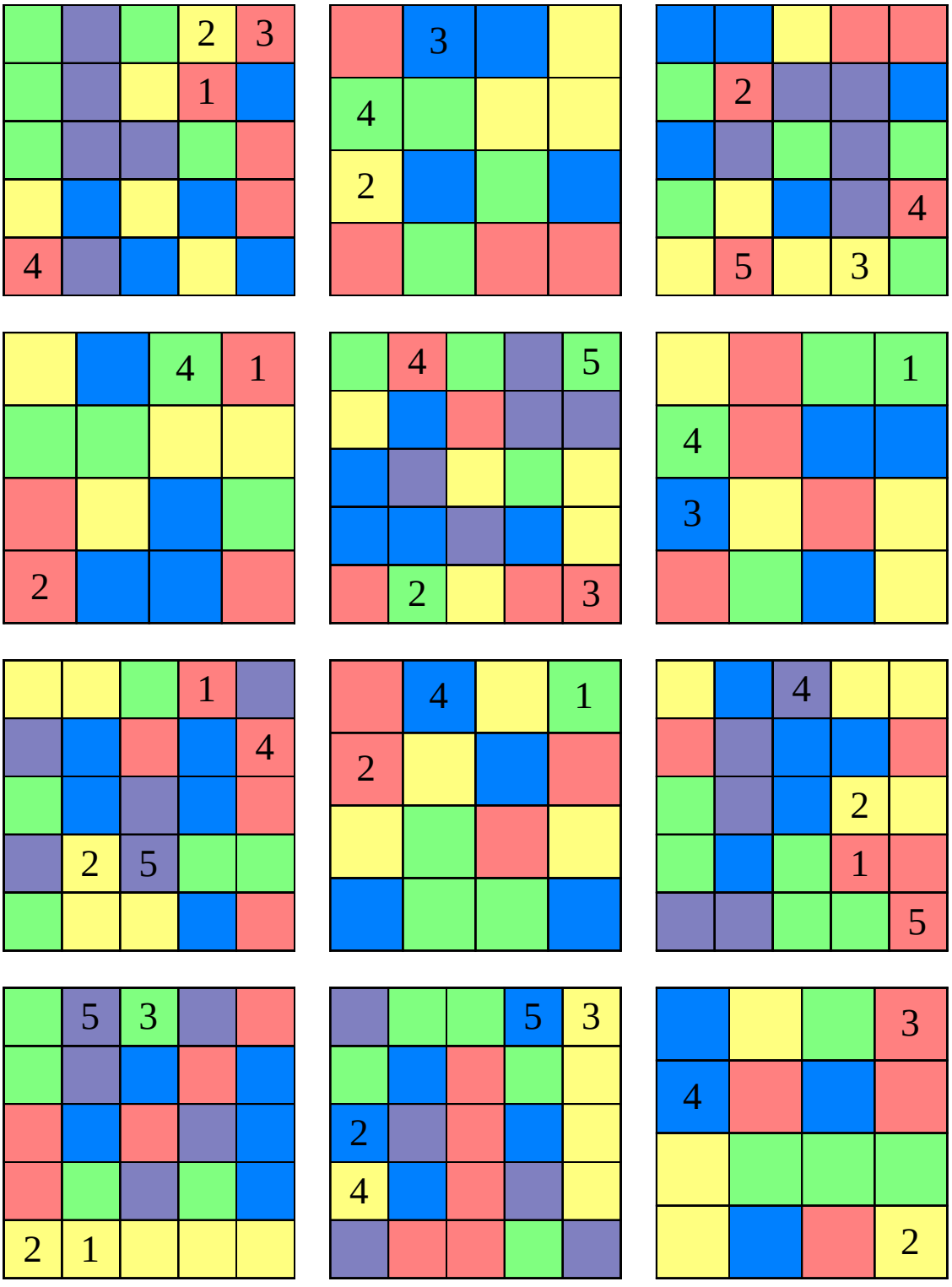
Pred vami je druga številka 28. letnika revije Logika in razvedrilna matematika. Spet bi vas radi opozorili na starejše številke revije, ki so zdaj dostopne na spletu, bodisi v celoti, bodisi le delno. Do teh številk pridete prek povezave: http://www.logika.si/revija/vsebine.htm
Na spletni strani http://www.logika.si/ smo pripravili štiri sklope nalog, ki bodo lahko služile za pripravo na tekmovanje iz logike (https://www.zotks.si/), iz razvedrilne matematike (https://www.dmfa.si/), na tekmovanje Matemček in na tekmovanje za priznanje logične pošasti (http://www.mathema.si/).
Še bolj so te naloge koristne za vsakdanje urjenje možganov, ki tako kot telo potrebujejo nekaj vsakdanje telovadbe, potrebujejo kakšno logično nalogo za jutranji zagon naših misli.
Na spletni strani logika.si boste našli še vrsto člankov iz preteklih številk revije, ki dajejo nekaj teoretičnih izhodišč in definicij, povezanih z logiko, ter več zbirk tipičnih logičnih nalog.
Naredili smo tudi precej zgledov sklopa *računanje,* kjer bomo objavljali naloge za utrjevanje osnovnih vsebin matematike v osnovni in srednji šoli.



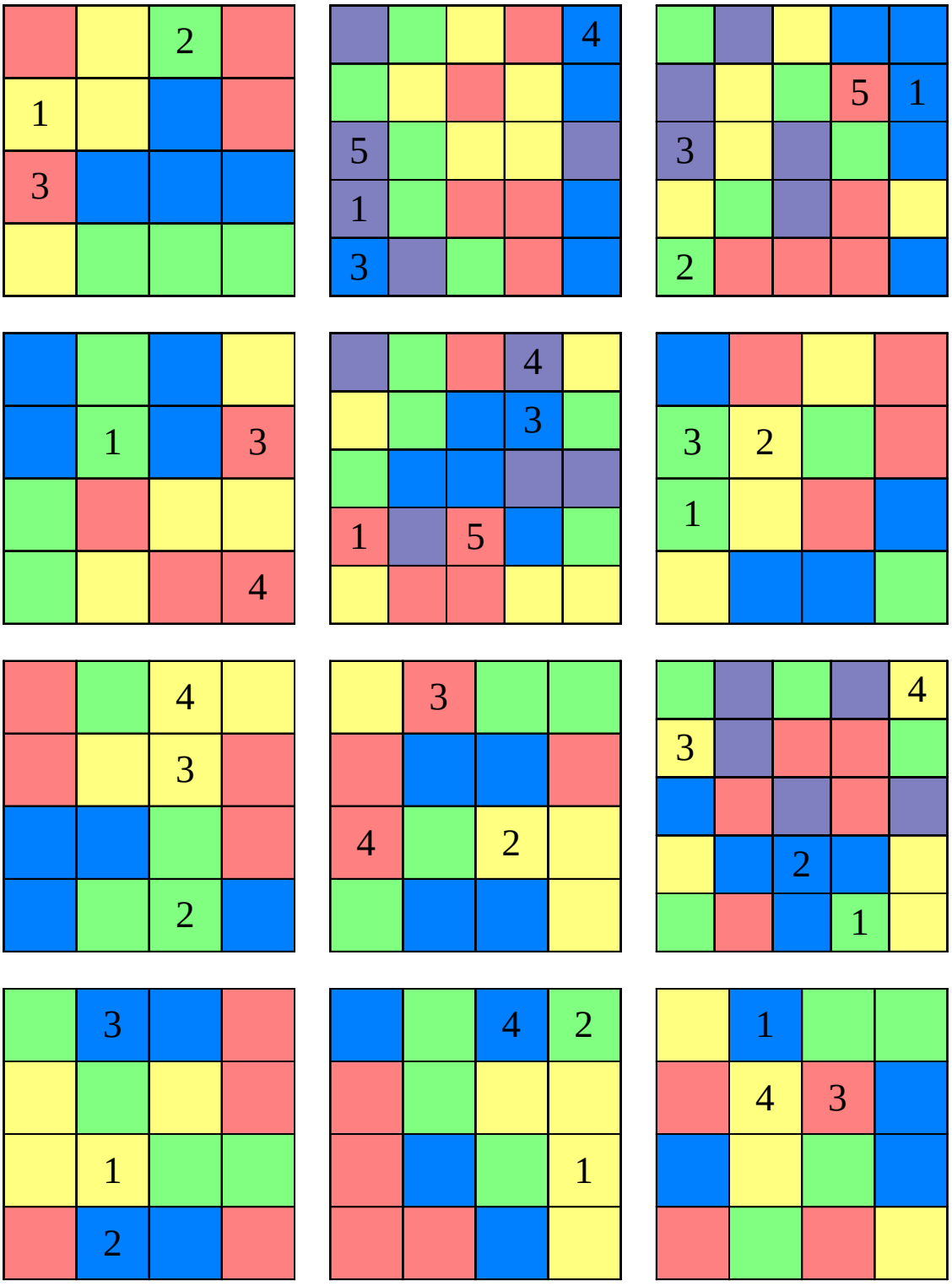
Barvni sudoku

V n × n kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do n tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve nastopalo vseh n števil.

1.



2.



Latinski kvadrati

V n × n kvadratkov moraš vpisati začetne številke 1, 2, 3, … tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu nastopalo vseh n številk.

3			
2		3	
	1		

	2		3
		4	
	3		

3				4
4	3			
	1		4	2
	4		2	

1				
		2		4
			5	2
	2	3	1	

3	2			
	1			5
				1
	5		1	
				3

				1
5	1		2	3
	3			
			5	
2	5		1	

		3	
	3	1	
			2

			2
	3		
1			
	2	1	

2				1
	3	5		
			2	3
	4			

		3		
4			2	
	2		3	
		5		1

		3	
		4	3
	1		

3			
		1	
		4	1

Sudoku s črkami

V n × n kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do n tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih z isto črko nastopalo vseh n števil.

E	E 4	C 2	B 5	C
C	A	C 1	C	E
B	A	A	B	A
A	B	D	E	B
D	D	D	D	E

B	C	D 5	C 2	C
E 1	C	E	A	A
E 3	A	A	E	B
D	B	D	E	D
A	C	D	B	B

A	E 3	B	A	D 4
C 1	D	C	A	E
E 5	B	B	E	B
C	C	C	D	A
A	D	E	D	B

E	E 2	E 3	E	A 1
D	A	C	B	C
D	B	C	C	D
C	E	D	B	A
A 5	D	B	B	A

E	D	B	D	A
E 4	E	B	B	B
D 3	D	D	B	A
C 1	C	E	C	A
C 2	E	C	A	A

C	E	B	D	D 5
C	E	A	C	E
B 1	B	E	A	E
A 3	D	D	B	D
A 2	A	C	C	B

B	D	C	B	E
D	E	D	C	C
B	B	B	E	A 4
E 1	A	D	A	A
C	C 2	D	E 5	A

C	A	C	C	A
D	A	E	D	D
B	E	C	C	A 5
B 2	D	B	B	E 3
B 5	E 4	A	D	E

A	A	B	E	C
A 5	D	E	B	D
C	E	C	E	B 3
C	B	D	A	C
A	E 2	B 4	D	D

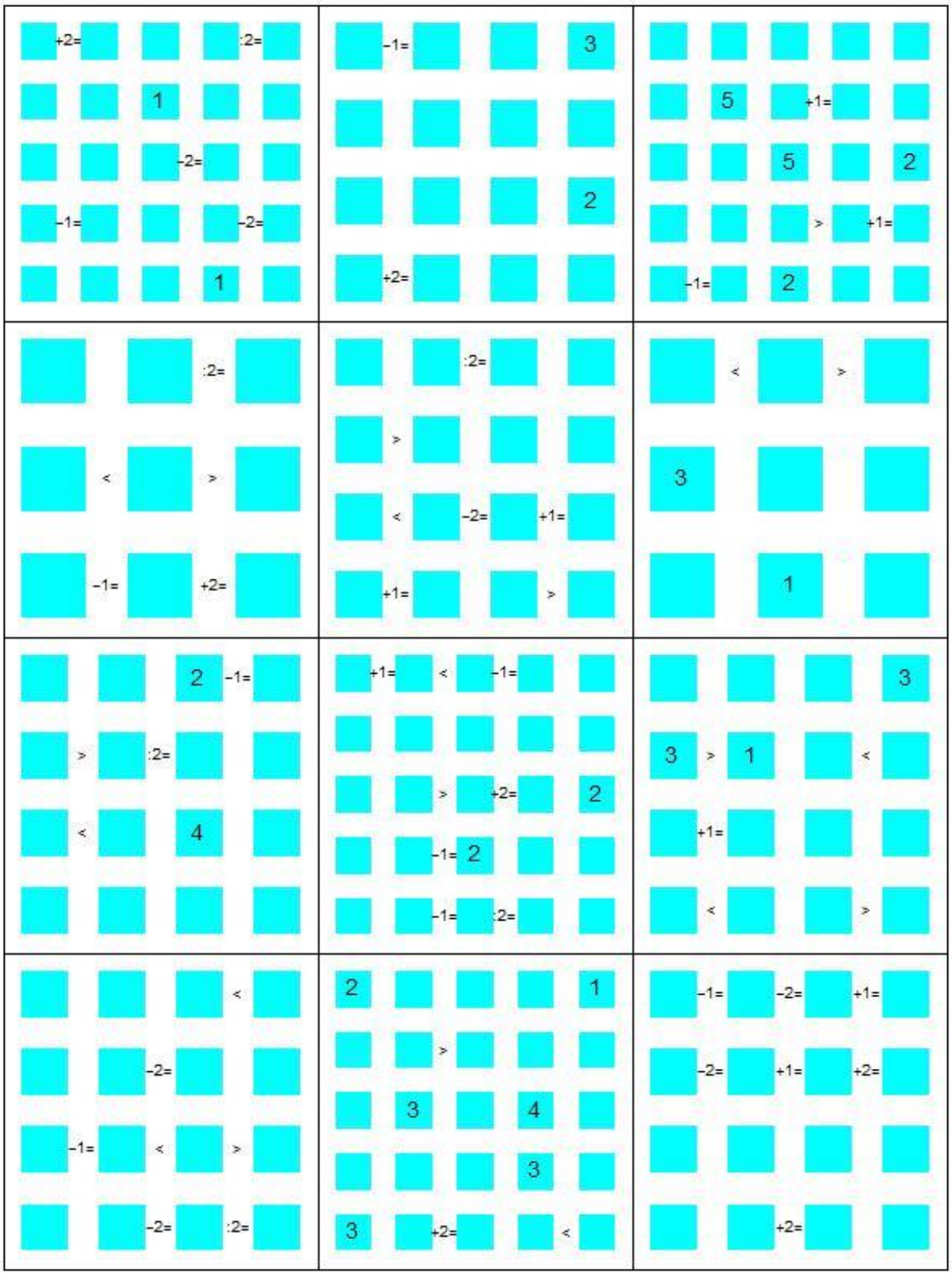
D	B 3	E	B	E
A 4	B	E	B	C
A 1	E	C	A	E
A 5	D	D	A	D
C	D	C	B	C

B	A 1	E	C	D 5
C	B	C	D	D
E 4	A	E	A	B
B	C	A	E	C
B 3	E	D	A	D

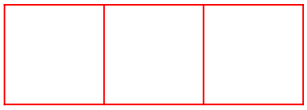
D	D	C 4	E	A 2
D	B 2	A	E	A
C 5	E	C	C	B
B 3	A	E	B	E
D	D	C	B	A

Futoshiki

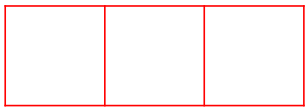
V n × n kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do n tako, da bo v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu nastopalo vseh n števil ter da bodo izpolnjene vse relacije.



Določi razpored



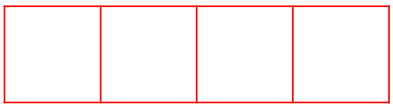
A JE SOSEDA OD B.	N
A JE DESNO OD C.	N
A JE LEVO OD C.	R



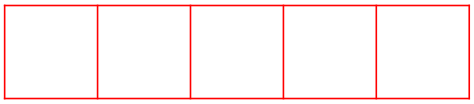
A JE LEVO OD B.	N
B JE DESNO OD C.	R



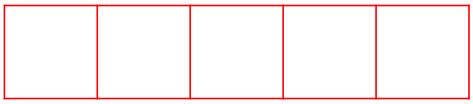
A JE SOSEDA OD D.	R
C JE SOSEDA OD D.	R
B JE LEVO OD D.	N
C JE LEVO OD D.	R



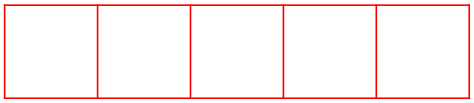
A JE DESNO OD B.	N
C JE SOSEDA OD D.	R
A JE SOSEDA OD C.	R
A JE DESNO OD C.	R
B JE SOSEDA OD D.	N



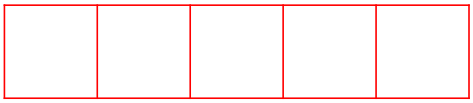
D JE SOSEDA OD E.	N
C JE LEVO OD D.	N
D JE LEVO OD E.	R
A JE LEVO OD D.	R
C JE DESNO OD E.	R



C JE DESNO OD D.	R
A JE SOSEDA OD E.	R
B JE DESNO OD D.	N
A JE LEVO OD C.	N
A JE SOSEDA OD C.	N



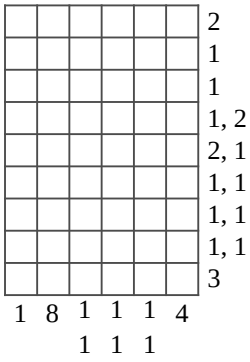
B JE SOSEDA OD E.	R
A JE DESNO OD D.	N
B JE SOSEDA OD C.	R
C JE DESNO OD E.	N
A JE LEVO OD C.	N

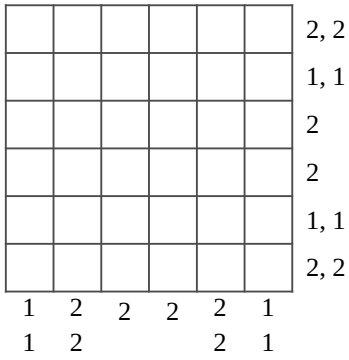


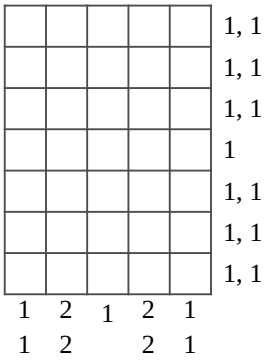
A JE DESNO OD E.	R
D JE LEVO OD E.	R
A JE LEVO OD C.	R
B JE DESNO OD D.	N
C JE SOSEDA OD E.	N

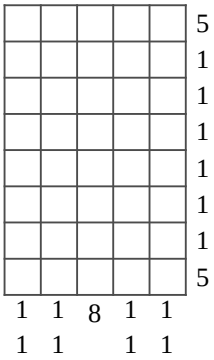
Gobelini

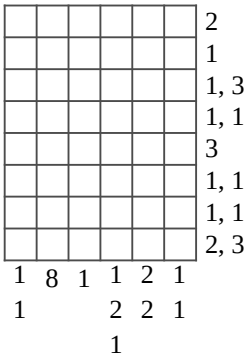
Kvadratke v razpredelnici moraš pobarvati sivo tako, da bo zaporedje sivih pasov v vrstici ustrezalo zaporedju števil na desni in da bo zaporedje sivih pasov v stolpcu ustrezalo zaporedju števil pod njim.

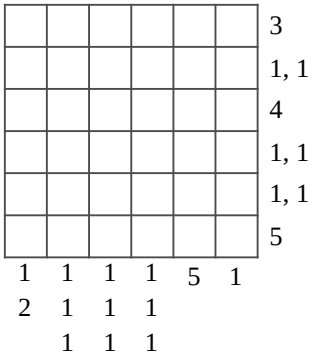


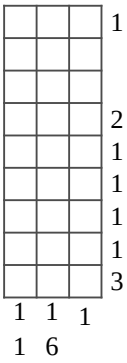


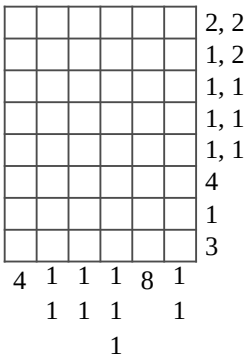


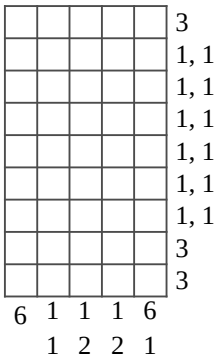


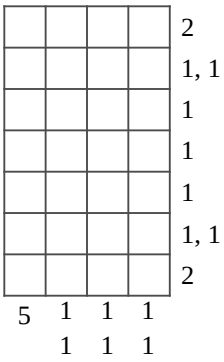


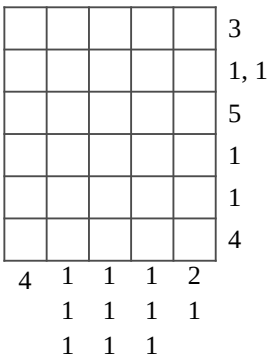


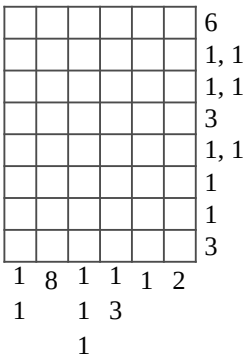






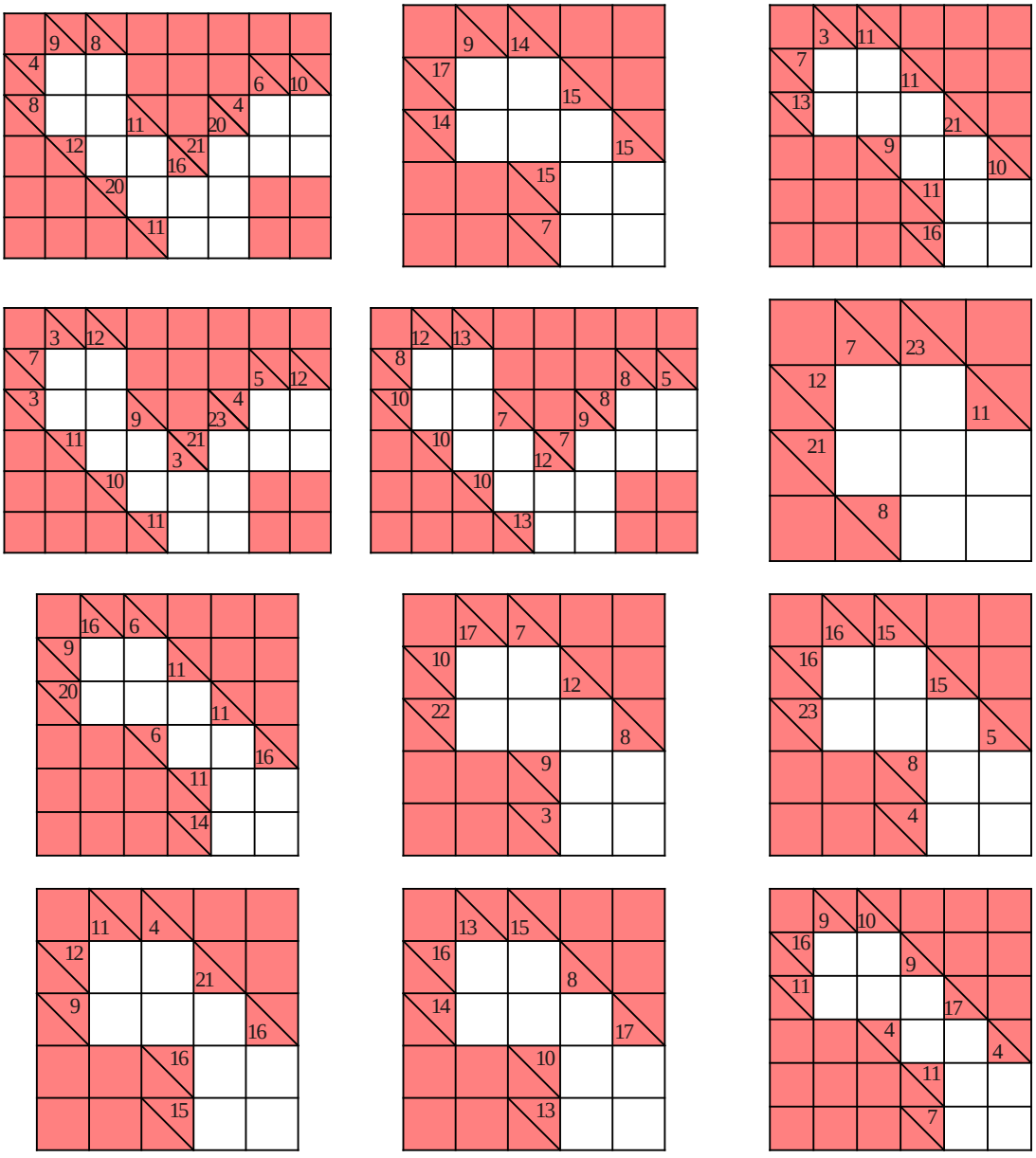






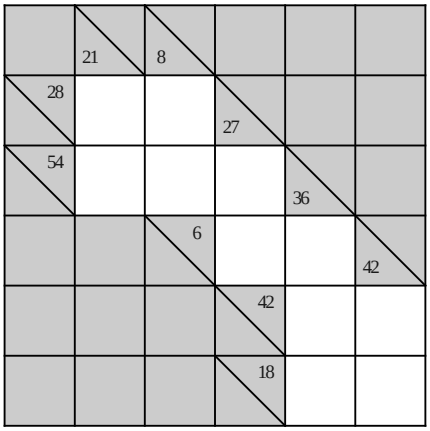
Križne vsote

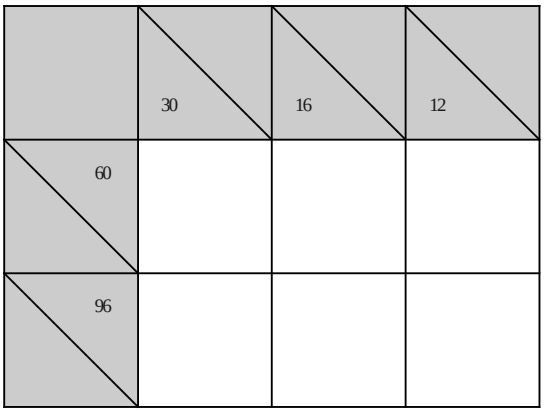
Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da je vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in stolpcih enaka številu, ki je zapisano v rdečem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem pa morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

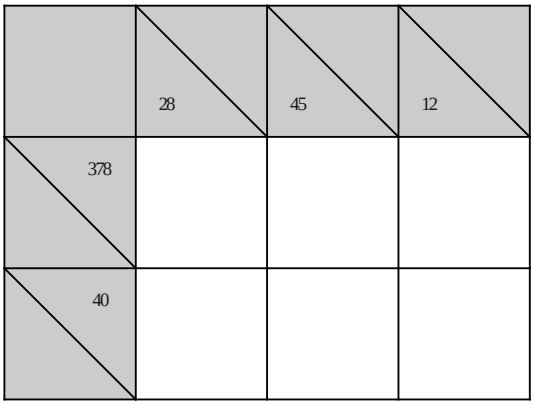


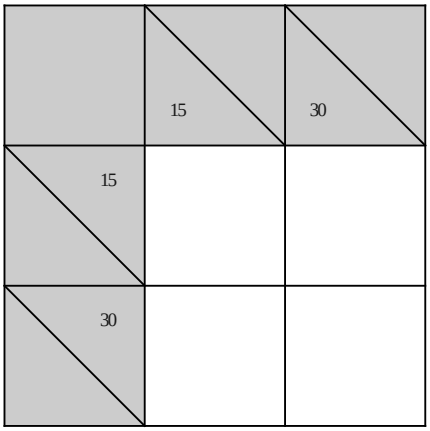
Križni produkti

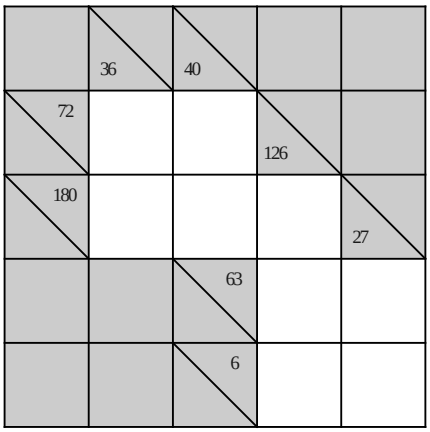
Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 2 do 9 tako, da bo zmnožek števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in stolpcih enak številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na zač□etku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem pa morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

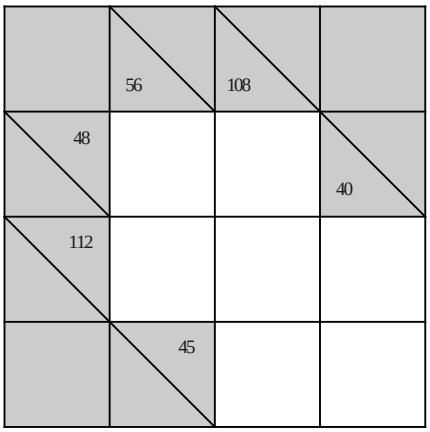






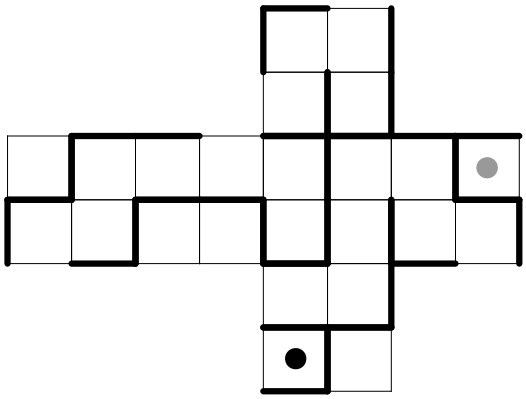


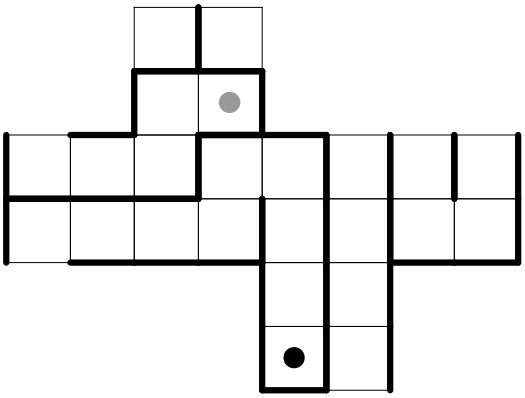


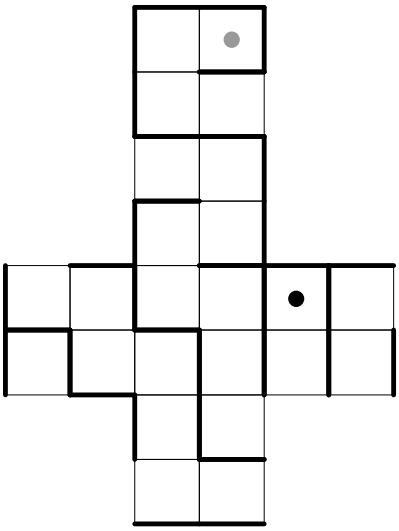


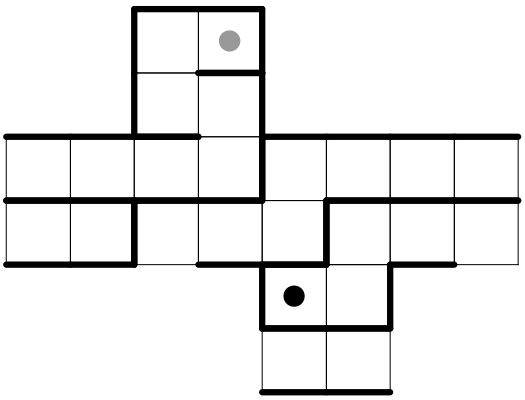
Labirint na kocki

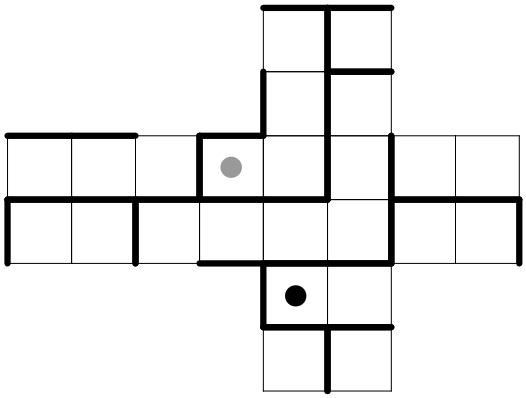
Poveži točki na kocki:

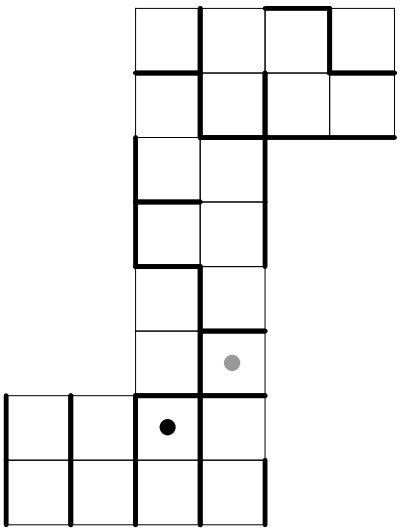






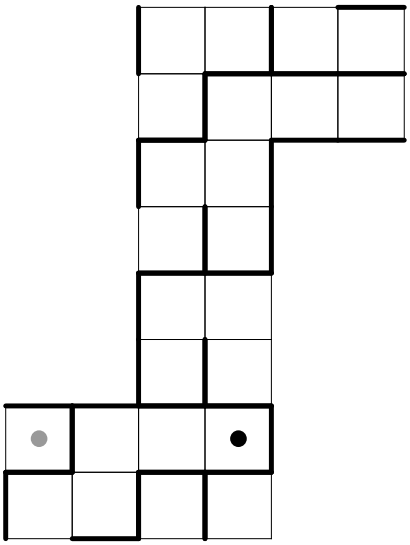


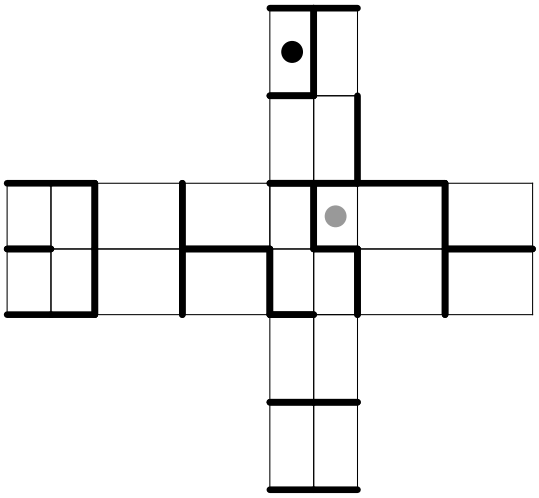


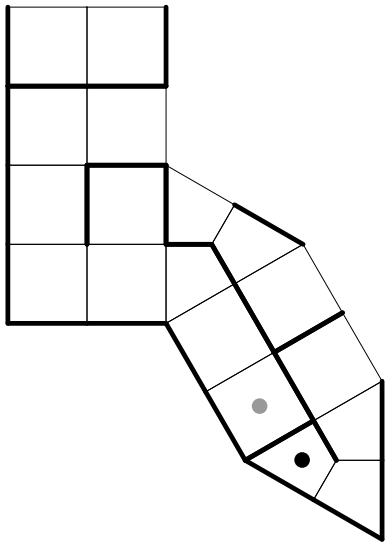


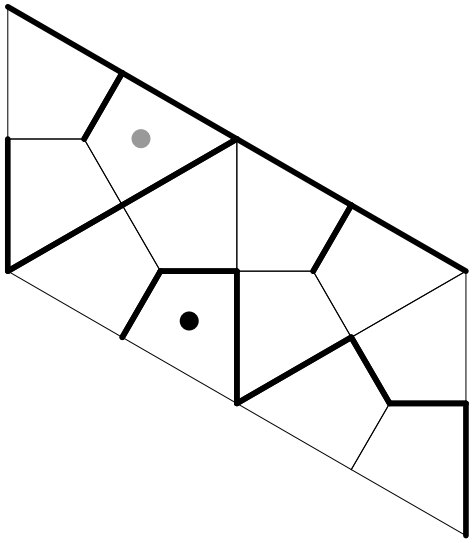
Labirinti na enostavnih poliedrih

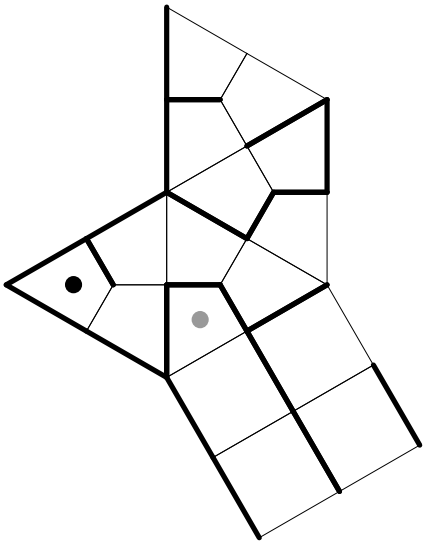
Poveži točki na poliedru:

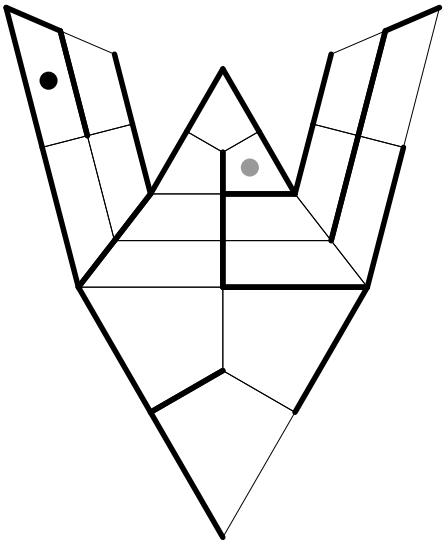




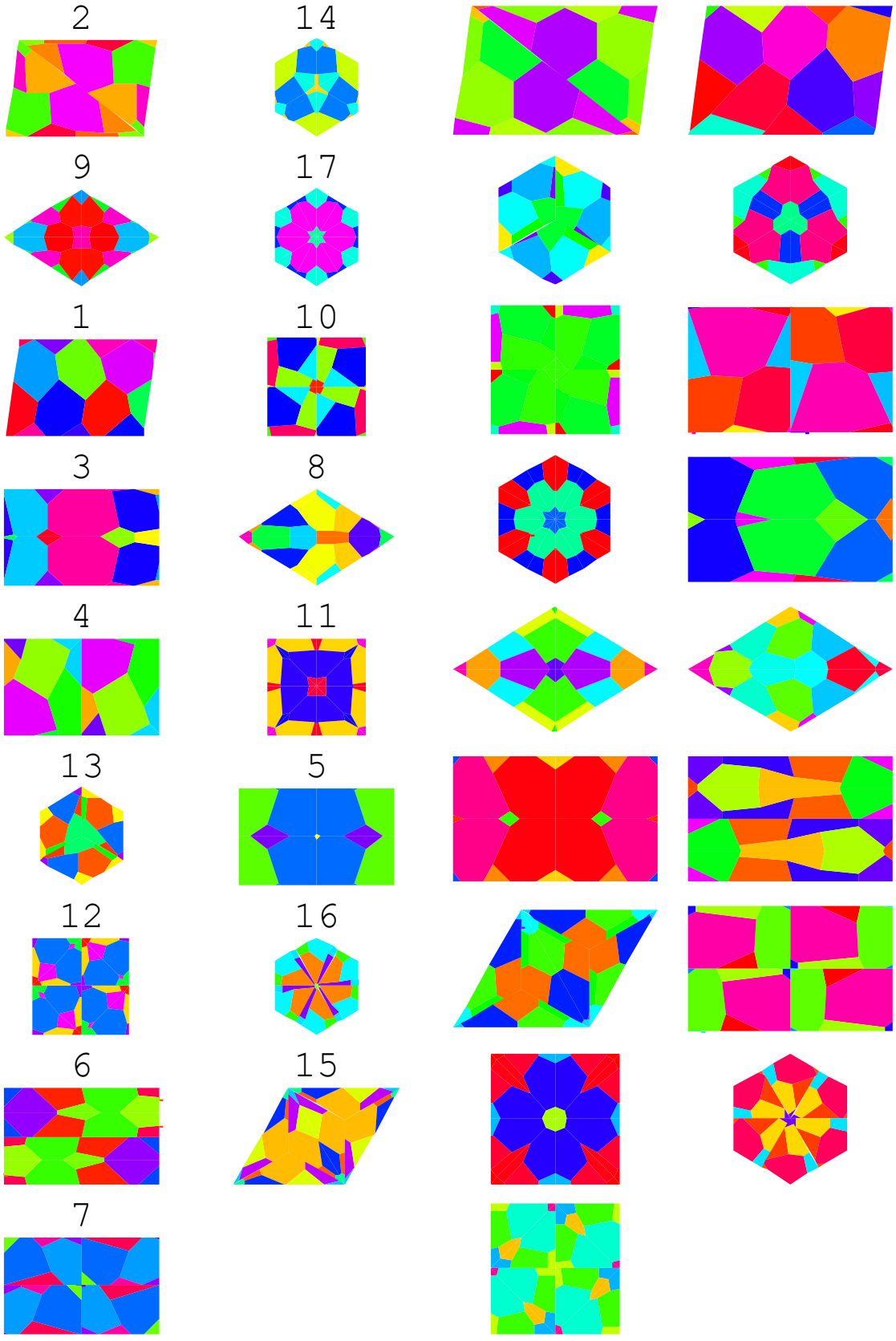






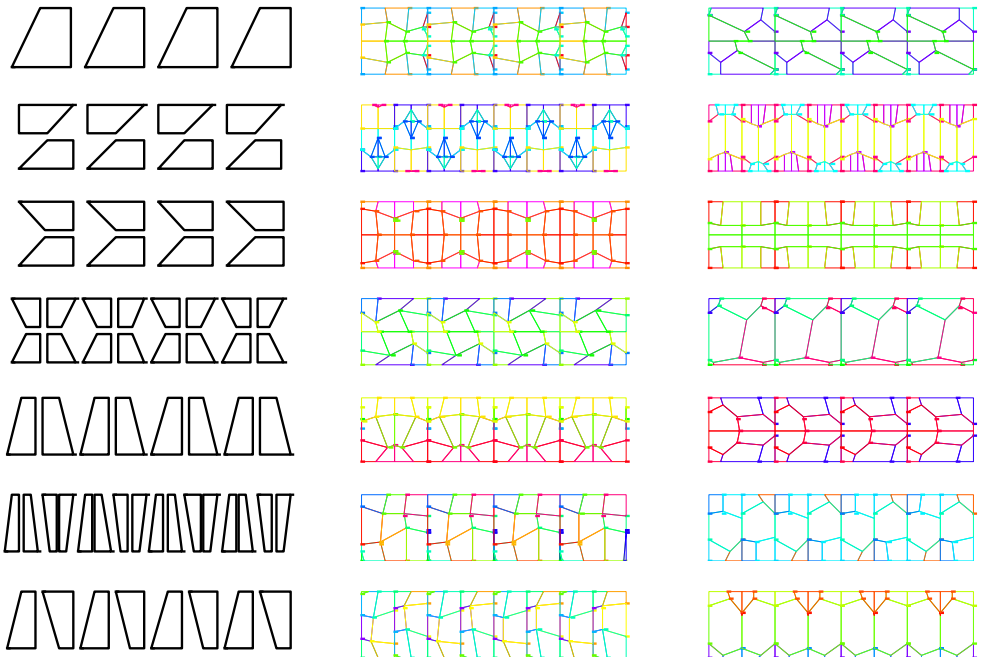


Poveži sličici, ki pripadata isti grupi

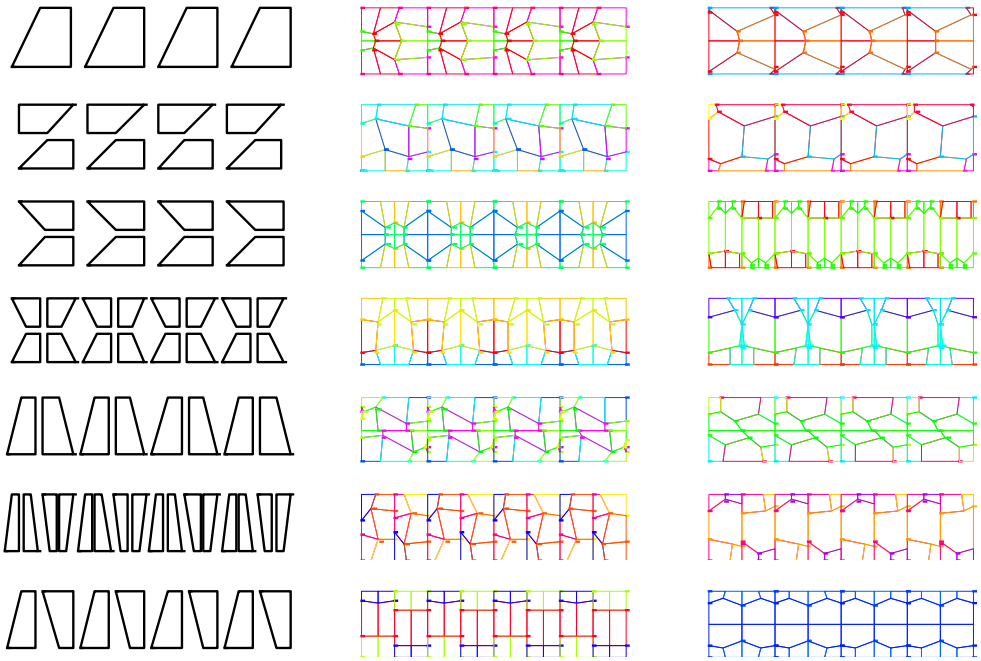


Poveži sličici, ki pripadata isti grupi

a)

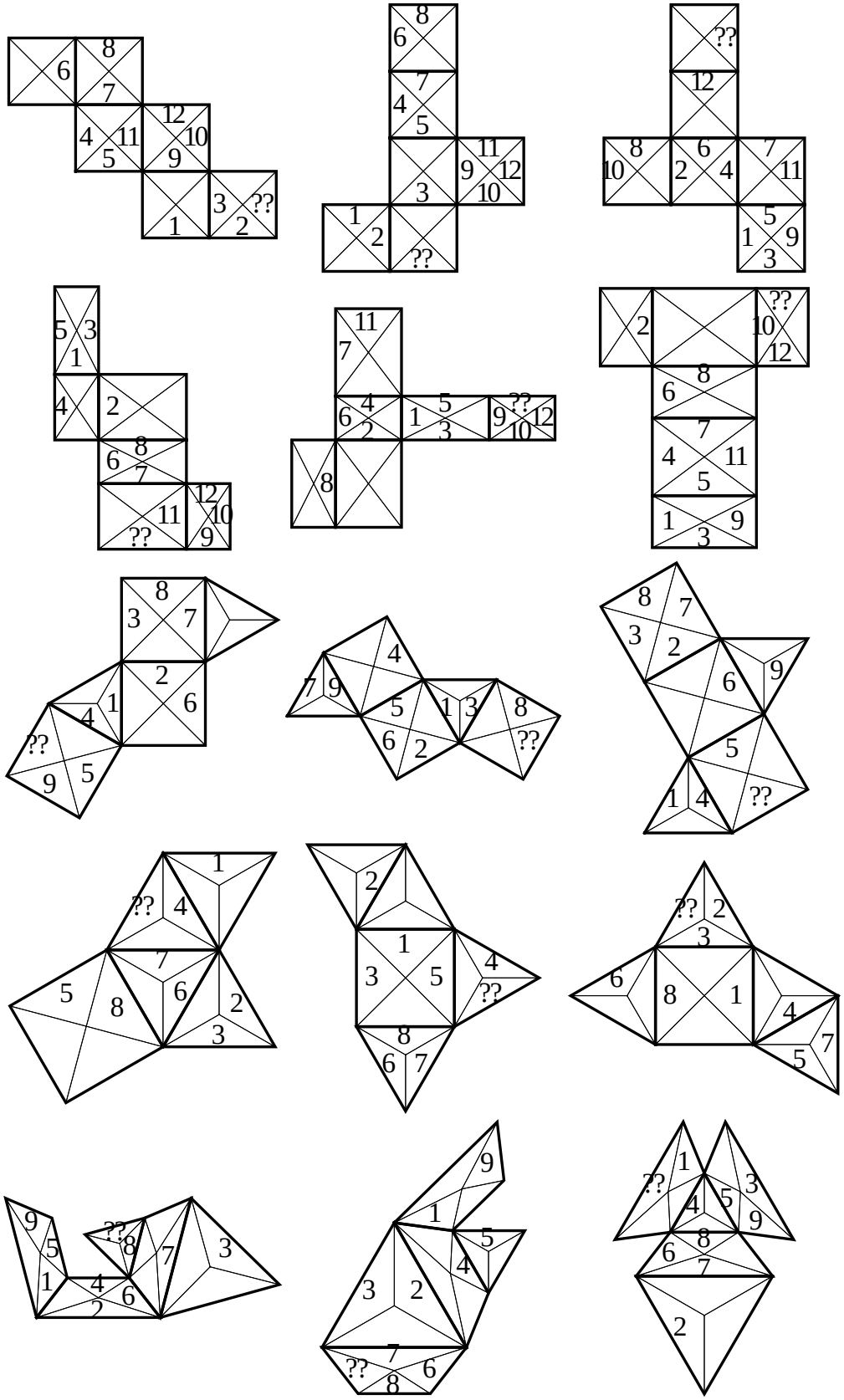


b)

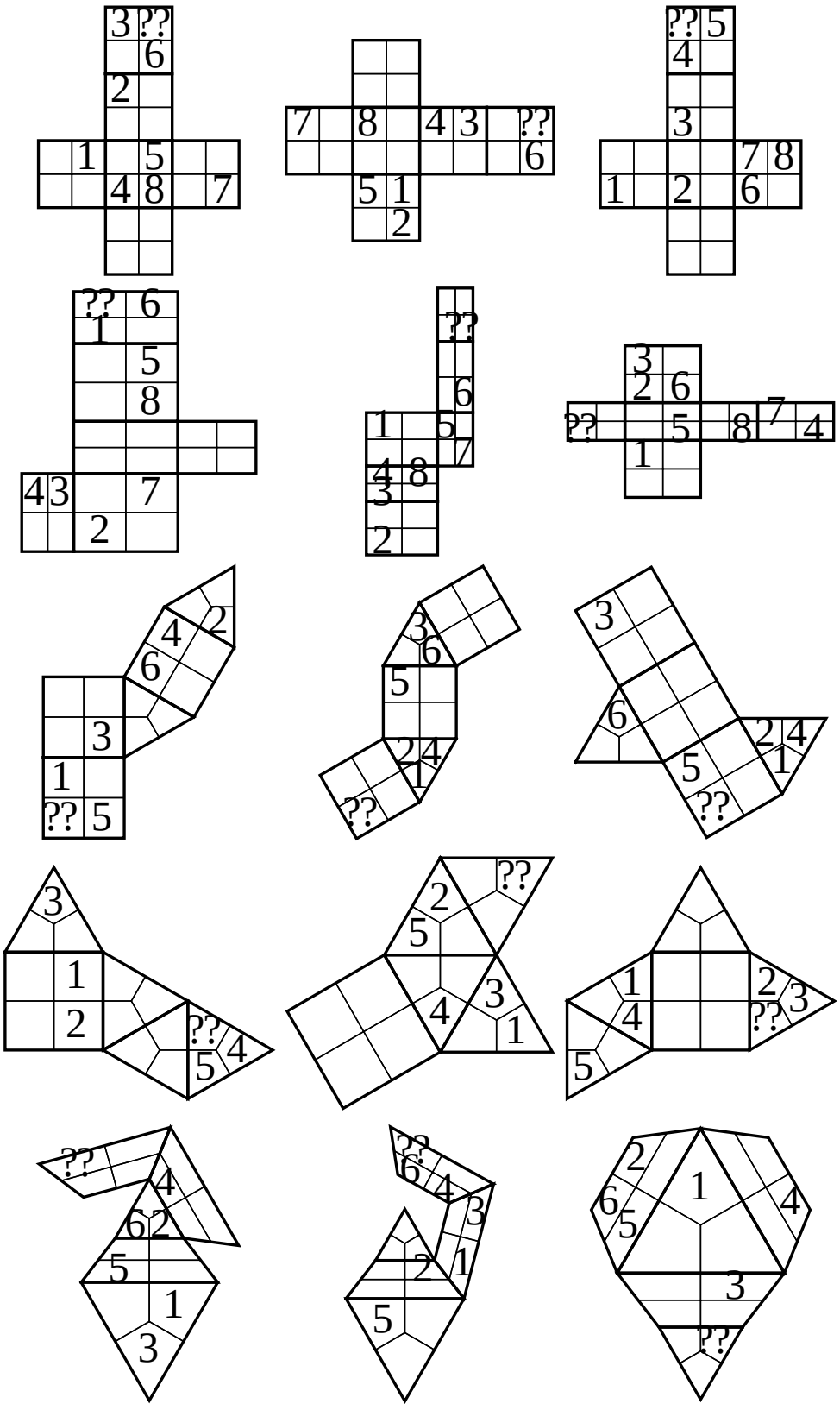


Prostorska predstavljivost

a) Katero število moramo vpisati na mesto znaka ??, da bosta stranici pripadali istemu robu poliedra?



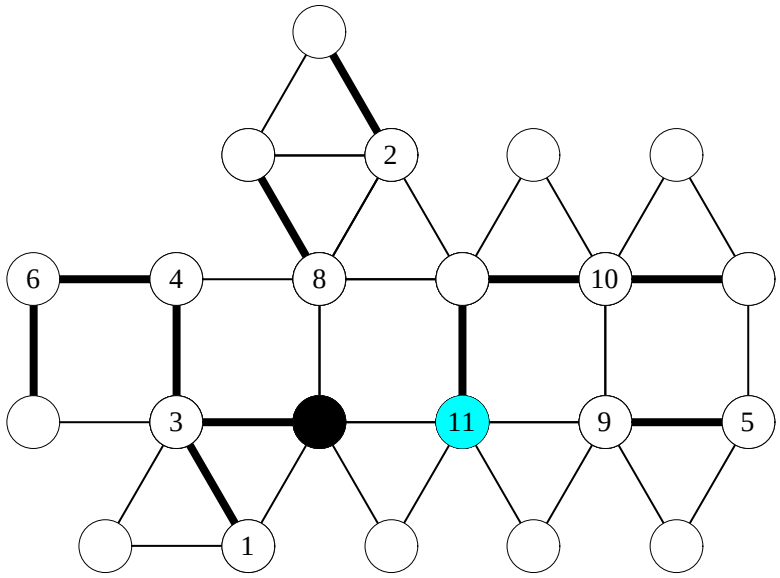
b) Katero številko moramo vpisati na mesto znaka ??, da bosta oglišči pripadali istemu oglišču poliedra?



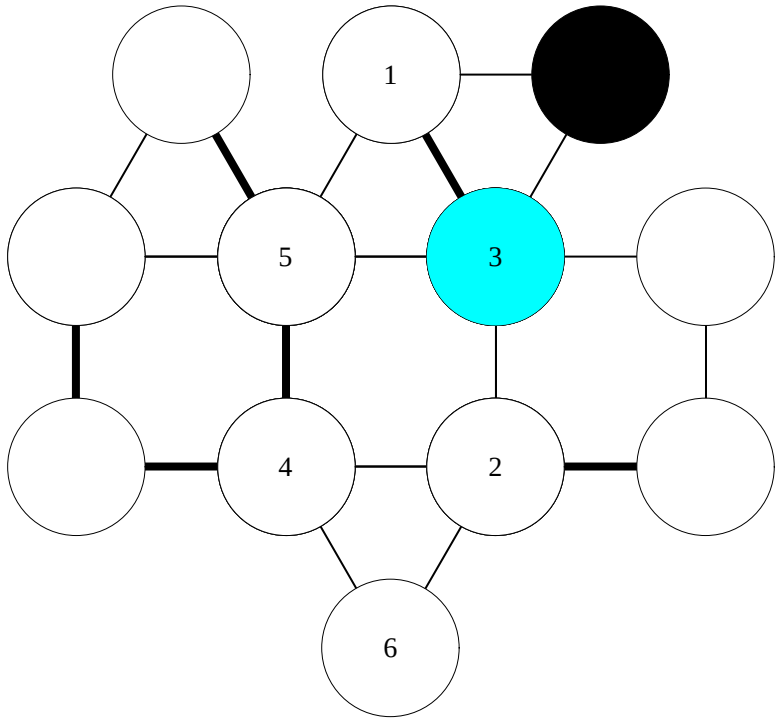
Labirinti na robovih poliedra

V naslednjih nalogah moramo povezati dve oglišči poliedra, ki je podan z mrežo. Poiskati moramo pot od oranžne do modre točke. Iz ene točke lahko gremo do druge točke, če je med njima debelejša črta ali pa točki predstavljata isto oglišče poliedra.

1.

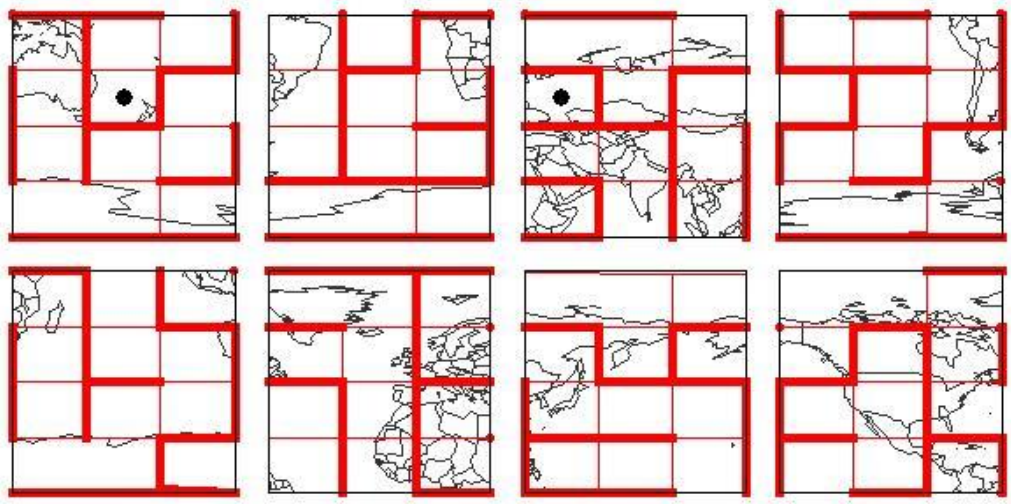


2.

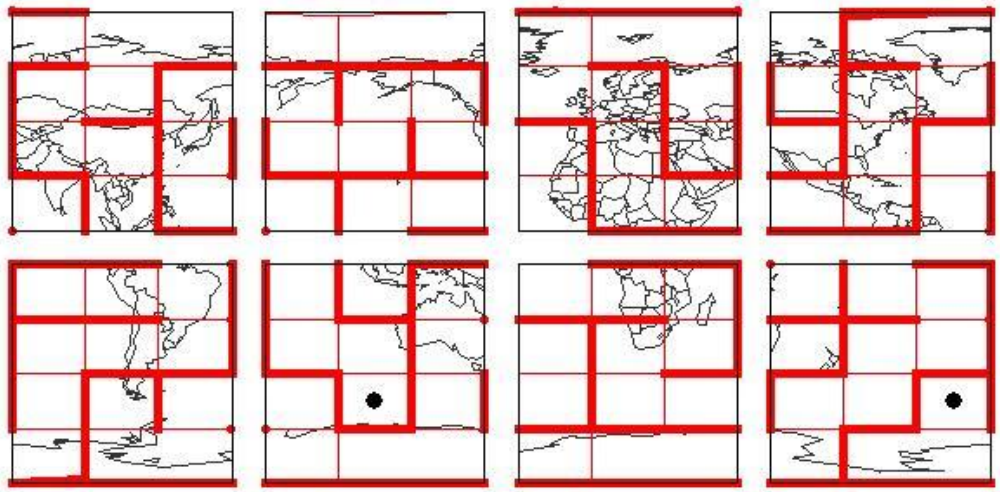


Večdelni labirinti na zemljevidu

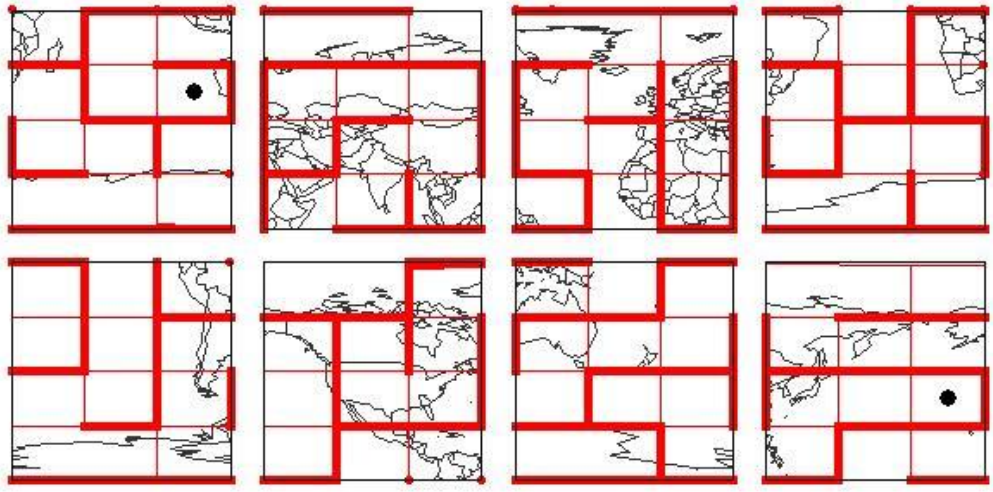
1.



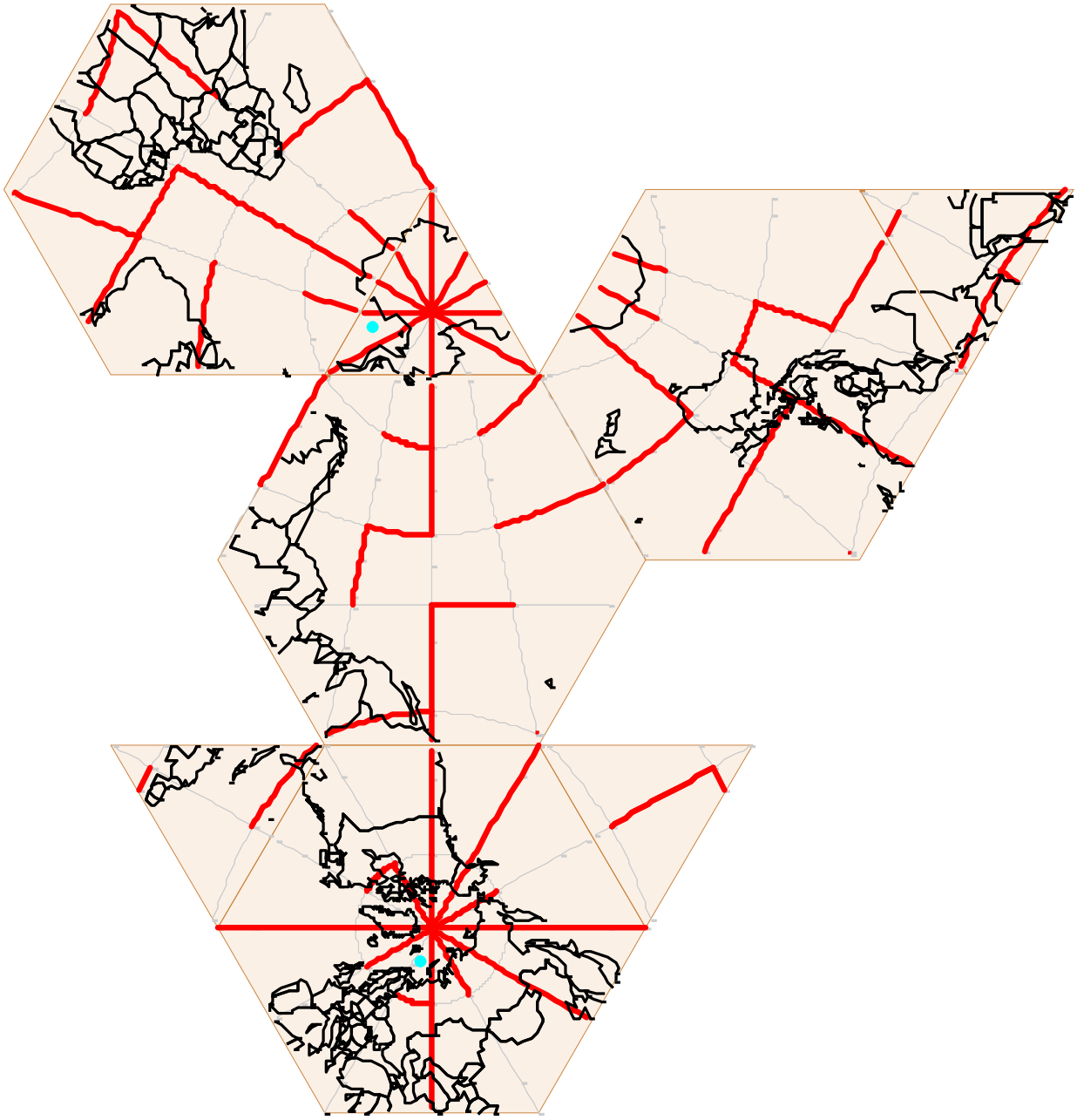
2.



3.

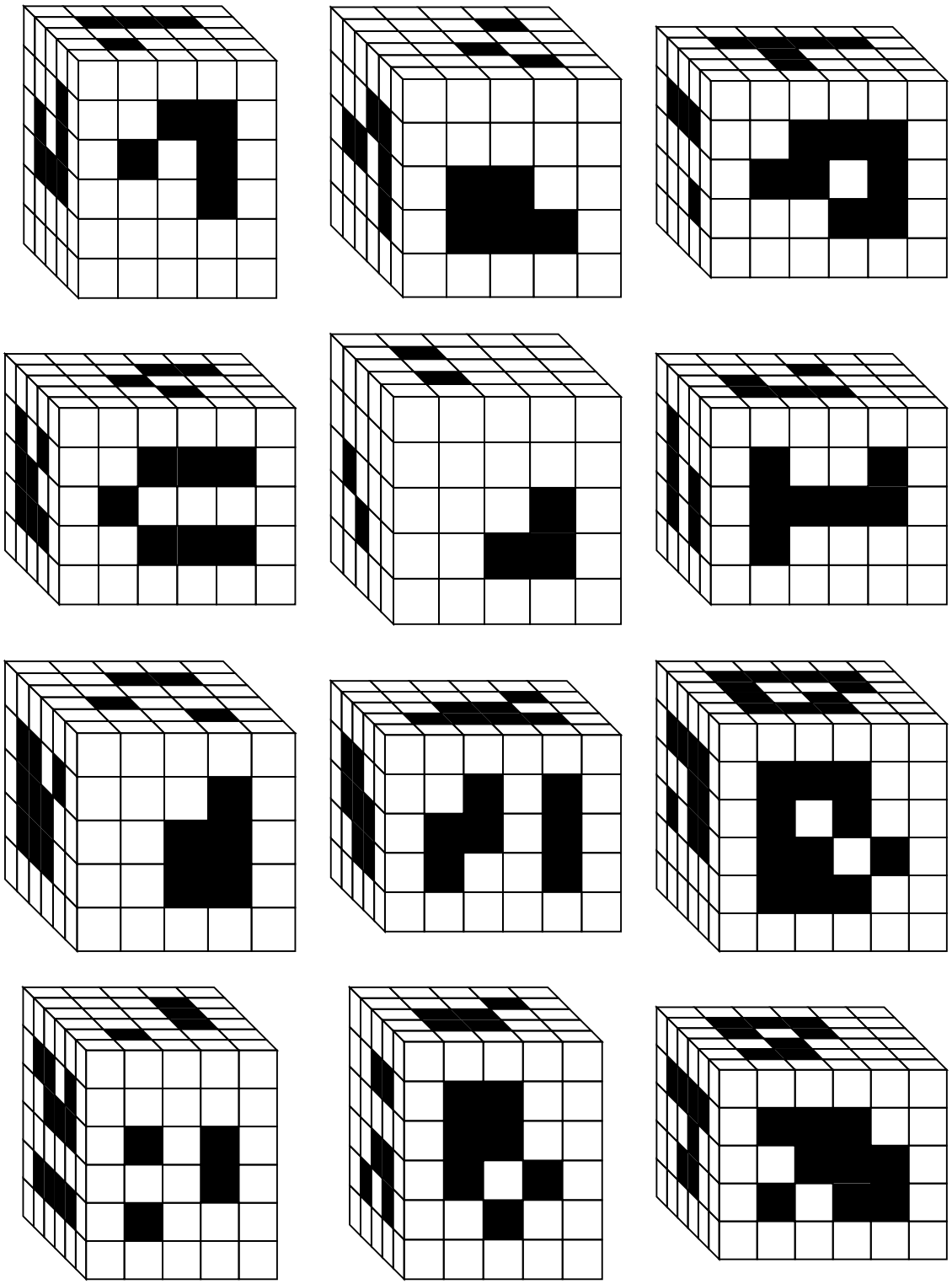


Labirint na zemljevidu



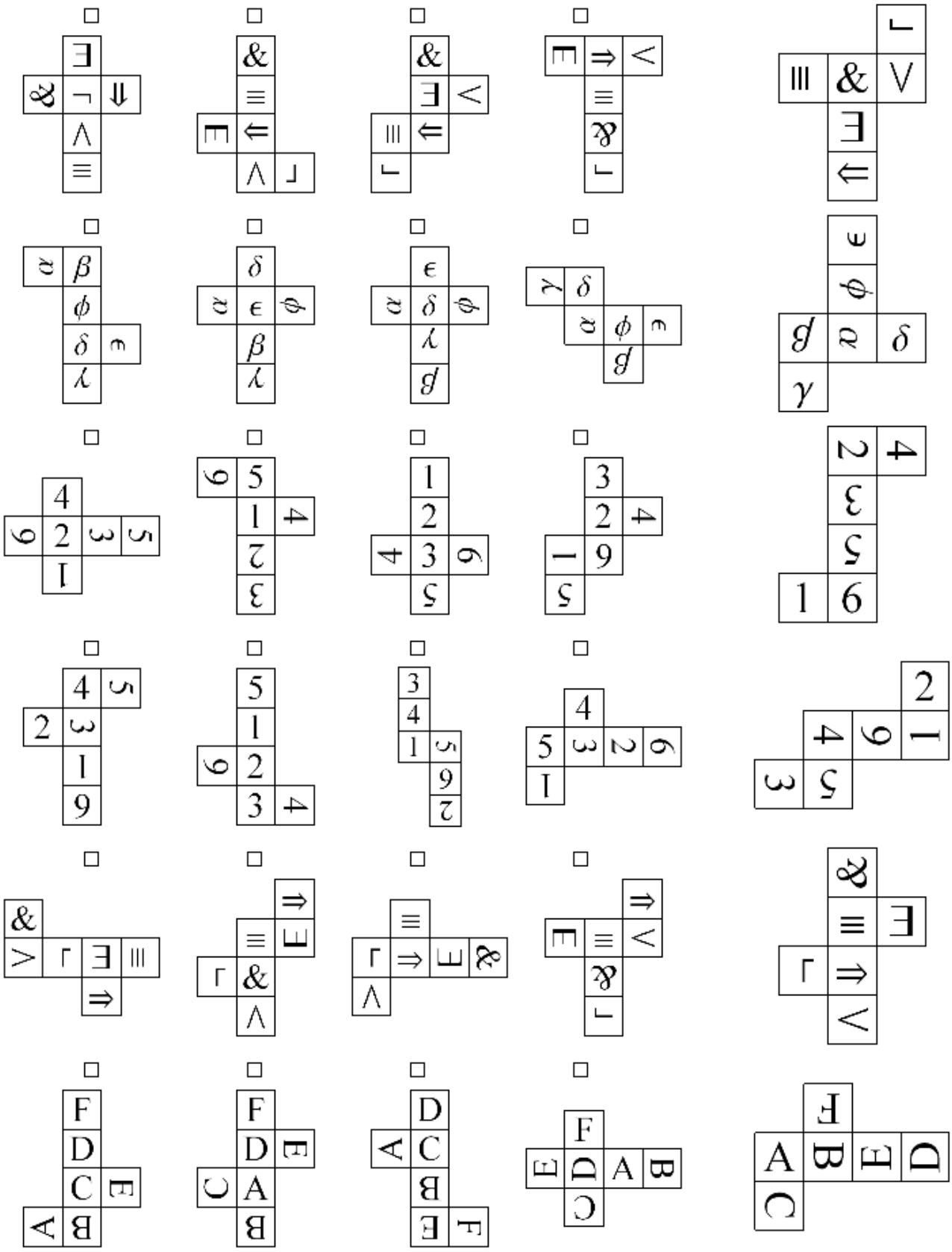
Odstranjene kocke

Dan je kvader, ki sestoji iz kockic. Odstranimo vse kocke, ki so zaznamovane črno od vrha do dna, od leve do desne in od spredaj do zadaj. Koliko kock smo odstranili?



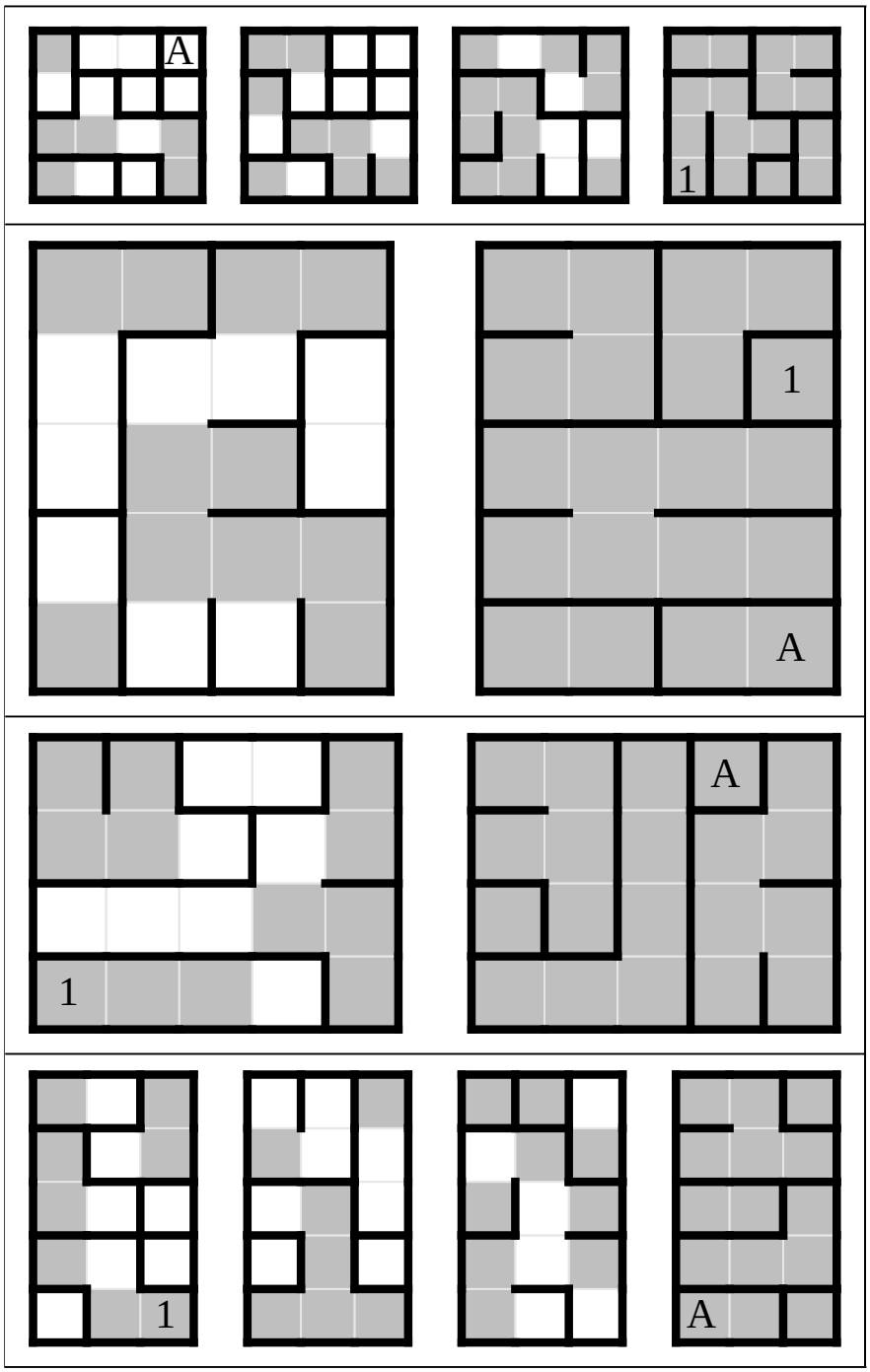
Kocki določi mrežo

Vsaki mreži na desni (večja mreža) določi mrežo iste kocke na levi.



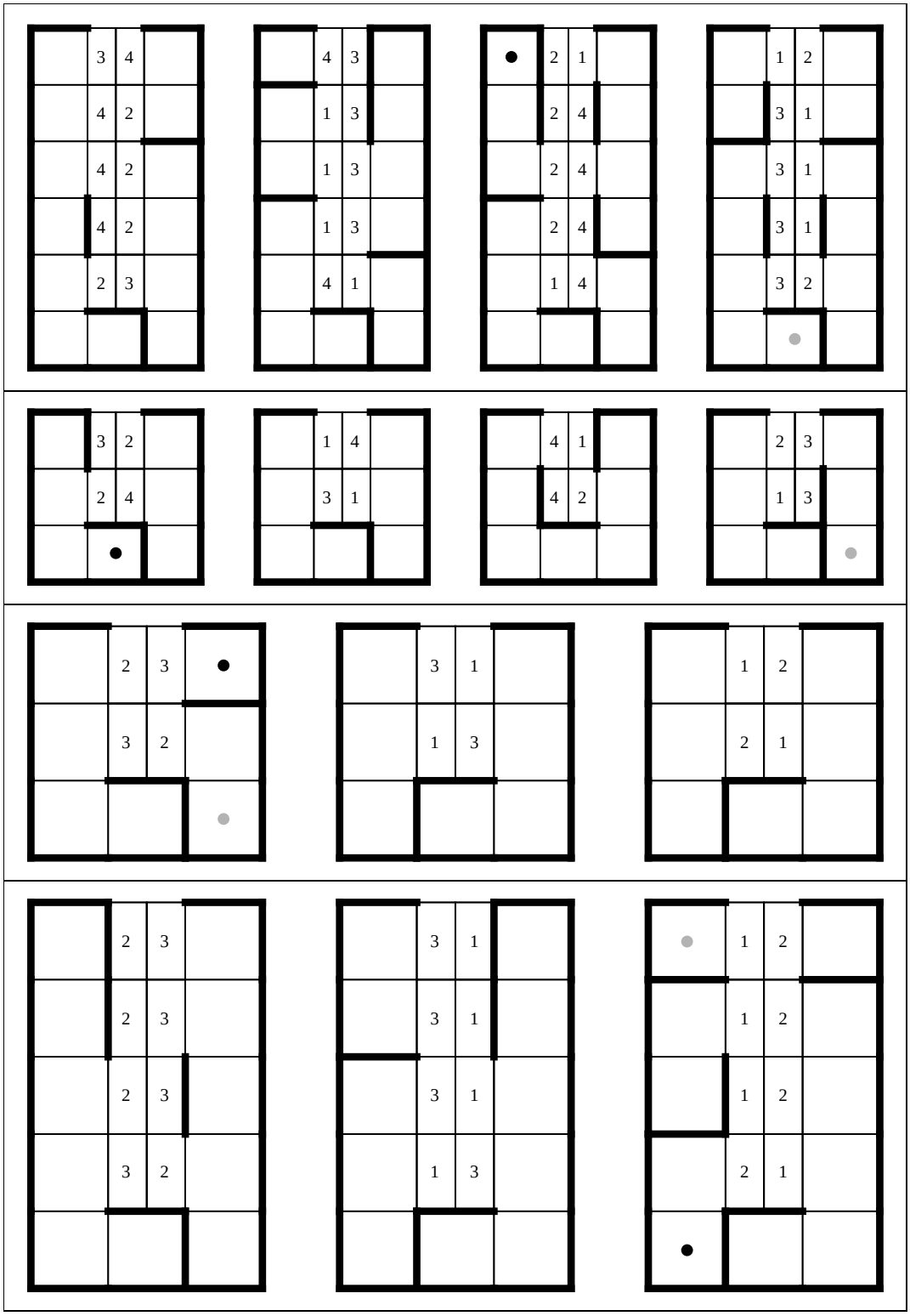
Labirint v kvadru

Kvader sestoji iz vodoravnih slojev kockastih oddelkov (zgornji, srednji in spodnji sloj so dani od leve proti desni). Odebeljene črte preprečujejo prehajanje med sosednjima oddelkoma istega sloja. Med oddelkom in oddelkom neposredno pod njim lahko prehajamo, če in samo če je prvi pobarvan belo.
Poišči najkrajšo pot od oddelka z 1 do oddelka z A! Pot označi z zaporednimi naravnimi števili. Prvi oddelek je že označen z 1, vsak naslednji sosednji oddelek (kocko) pa s številom, večjim za 1.



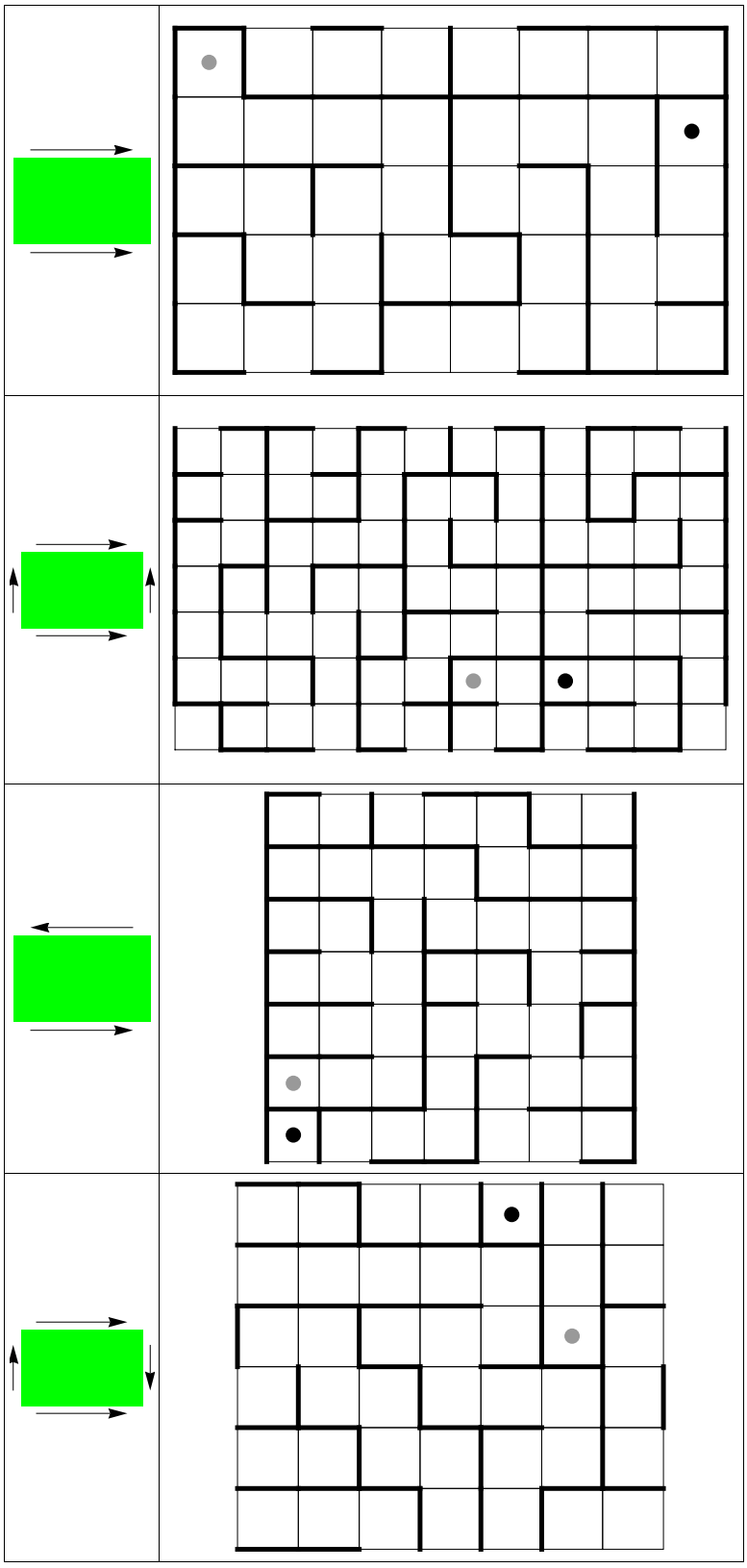
Labirint na Riemannovi ploskvi

Imamo več listov, ki jih razlikujemo po zaporedni številki od leve proti desni. Vsak list ima obliko podkve, sredina pa je razrez. Vsi kvadratki enega lista so povezani, prehod med njimi pa nam prepreči odebeljena črta. Kako je s prehajanjem z nekega lista na drugega? To so prehodi po horizontali. Recimo, da smo se znašli na tretjem kvadratku od zgoraj levo na tretjem listu. Oznaka sosednjega pravokotnika je 2 - to pomeni, da lahko nadaljujemo na desnem enako ležečem kvadratku 2. lista.. Tak prehod pa ni možen, če je med kvadratkom in sosednim pravokotnikom odebeljena črta. Poiskati moramo pot od črne do sive pike.



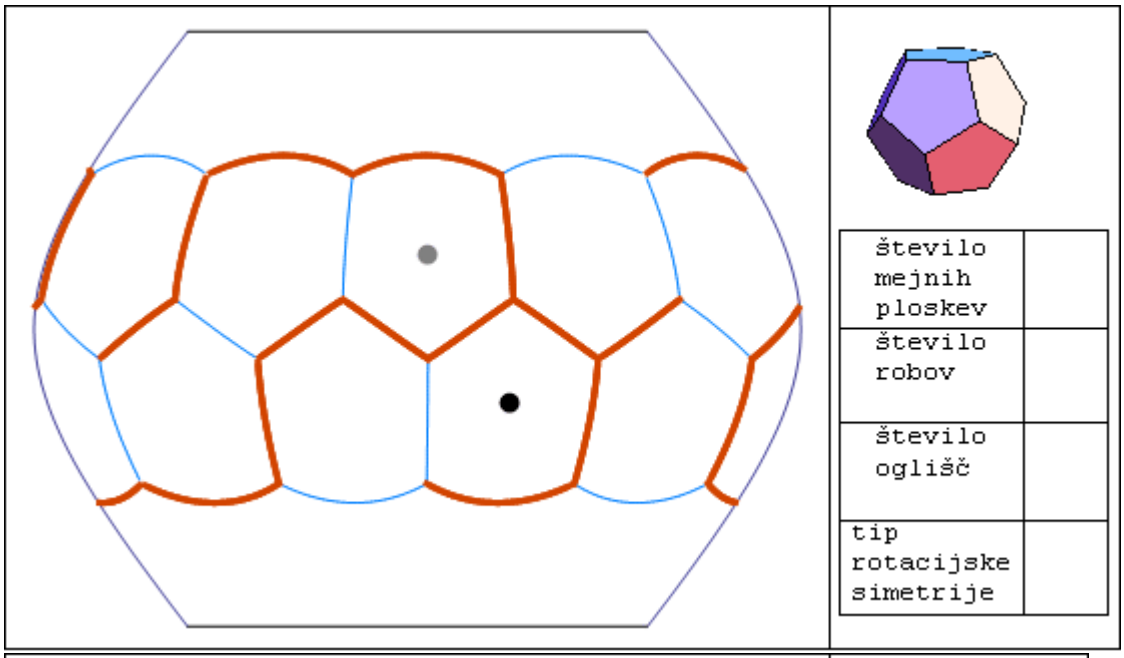
Labirinti na ploskvah

Podan je labirint na pravokotniku. Moramo poiskati pot od temnejše do svetlejše pike. Prehod med sosednjimi kvadratki je možen, če med njima ni odebeljene črte. Skica na levi pomeni, kako sta nasprotni stranici pravokotnika povezani (miselno ju moramo zlepiti).

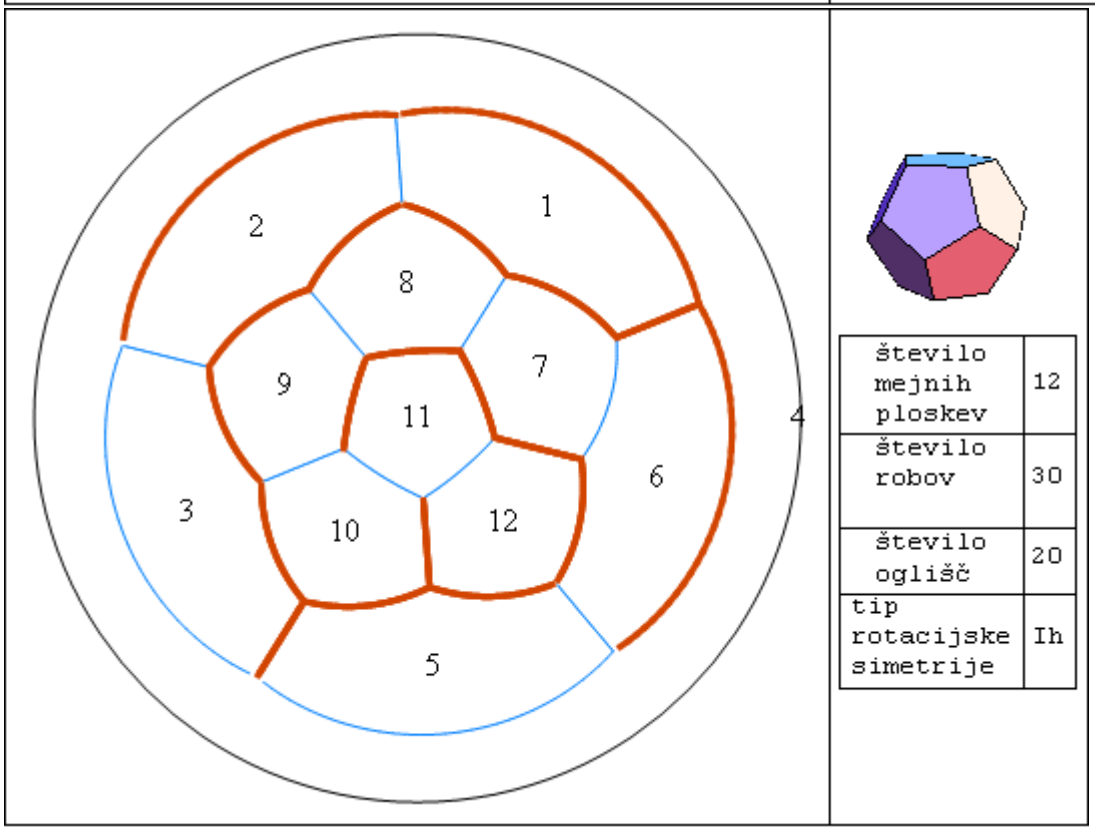


Labirinti na projekcijah teles

Telo je projicirano v ravnino. Na projekciji je podan labirint, kjer odebeljene črte preprečujejo prehod iz projekcije mejne ploskve na projekcijo sosednje mejne ploskve.



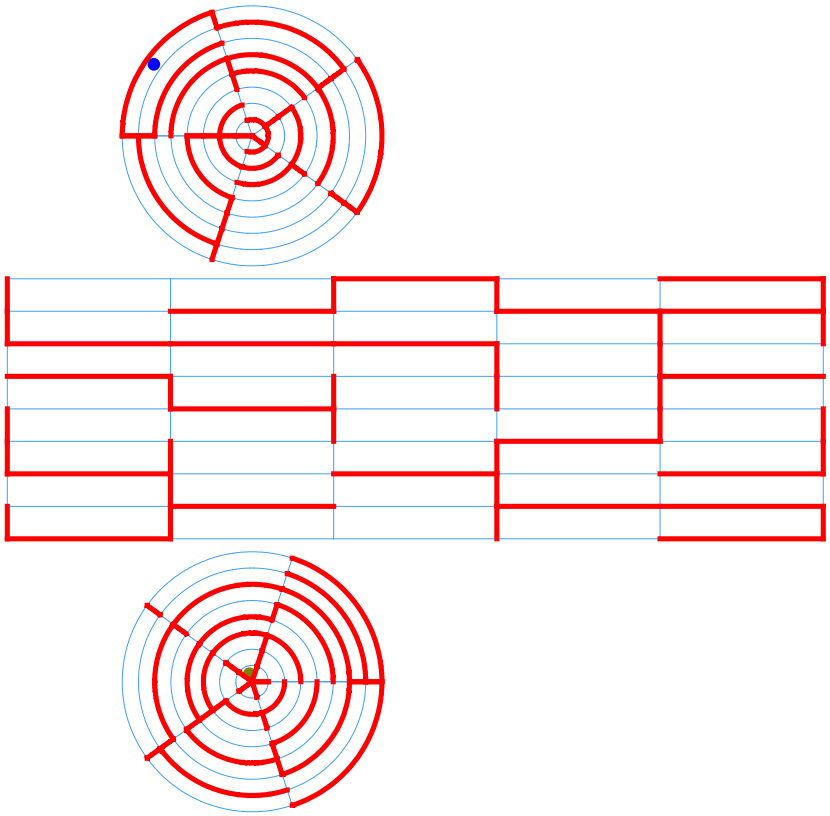
število mejnih ploskev	
število robov	
število oglišč	
tip rotacijske simetrije	



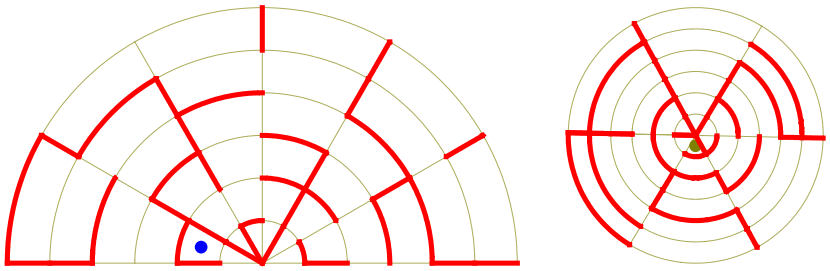
število mejnih ploskev	12
število robov	30
število oglišč	20
tip rotacijske simetrije	Ih

Labirinti na mreži valja in stožca

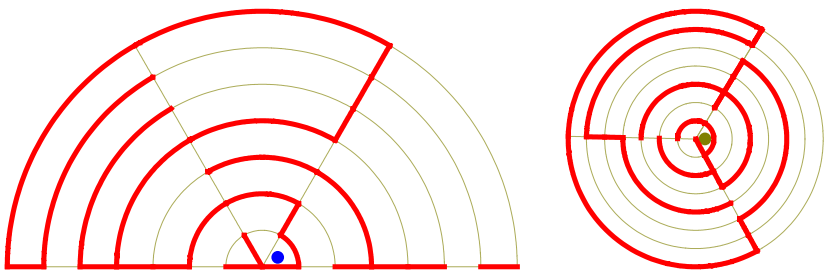
1.



2.

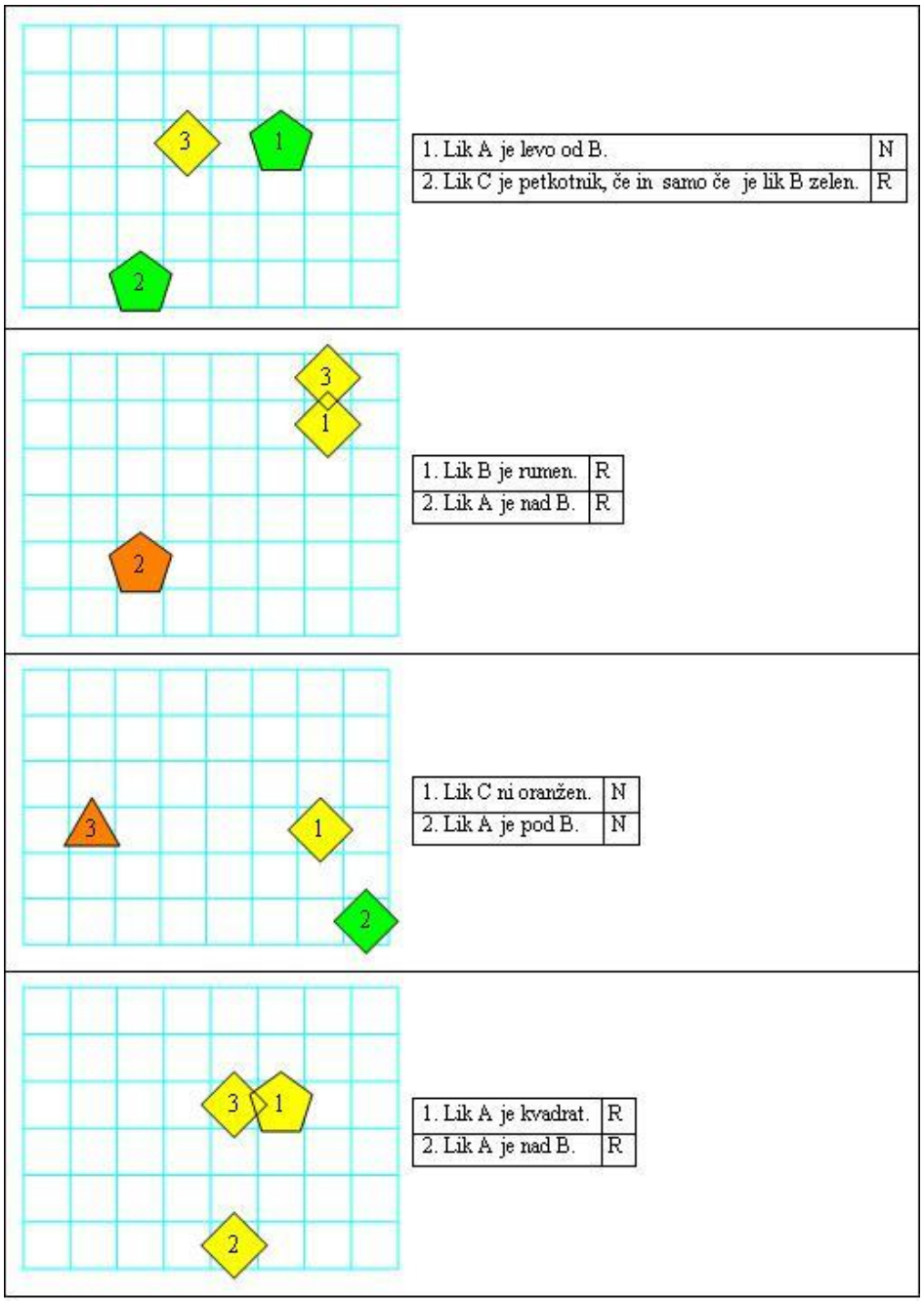


3.



Analiziraj pogoje nalog

Dobro definirana naloga je naloga, pri kateri so njeni pogoji potrebni in zadostni za njeno rešitev. To pomeni, da noben pogoj ni odveč in da ima naloga enolično rešitev. Pri zastavljeni nalogi imamo lahko več možnosti:
Naloga nima rešitve, pogoji so protislovni.
Naloga ima več rešitev, to je, pogoji niso zadostni (za enolično rešitev).
Naloga ima enolično rešitev, vendar pogoji niso potrebni (vsaj en pogoj bi lahko izpustili in bi naloga še vedno imela enolično rešitev).
Naloga ima enolično rešitev in pogoji so potrebni (neodvisni) in seveda zadostni. Naloga je dobro definirana.
V naslednjih nalogah moramo ugotoviti, kako je s pogoji naloge.
Poiskati moramo imena A, B,C, … likov, ki so označeni z 1, 2, 3, …, če so izpolnjeni pogoji na desni strani slike. Ugotoviti moramo tudi, ali so pogoji neodvisni.



Nagradne naloge

Z letošnjim letom uvajamo kar tri nagradne uganke: nagradno logično nalogo, nalogo v esperantu in nagradno nalogo o simetriji. Za vsako bomo med pravilnimi rešitvami izžrebali tri nagrajence. Prva nagrada bo komplet *poševna prizma in drugi modeli*, druga bo *Jovo mini komplet*, tretja pa *poševna tristrana prizma* (to je, dosedanja nagrada). Tri šole z **največjim številom** poslanih odgovorov bomo tudi nagradili z omenjeno prvo nagrado.
Reševalce prosimo, da ob rešitvi čitljivo napišejo svoj **domači** (in ne šolski naslov), na katerega bomo poslali morebitno nagrado. Po žrebu bodo vsi ti podatki uničeni. Rešitve pošljite z **navadno** in ne priporočeno pošto. Če naloge rešujete v okviru pouka, vse rešitve posamezne naloge pošljite v **eni kuverti** (ni treba dati za vsakega učenca v posebno kuverto). Če rešujete dve ali tri naloge, zberite posamezne naloge v manjše kuverte in vse pošljite v eni večji kuverti. Posamezniki lahko pošljete vse rešitve v eni kuverti, vendar mora biti vsaka rešitev na svojem listu in opremljena s čitljivim naslovom.
Poševna prizma in drugi modeli je komplet 40 okvirjev Polydron (20 enakostraničnih trikotnikov, 18 kvadratov in 2 pravokotna enakostranična trikotnika). Tako boste lahko sestavili dvajseterec, osmerec, četverec in kocko, če naštejemo le nekaj možnosti.
Jovo mini model sestoji iz dveh petkotnih, osmih kvadratnih in petnajstih trikotnih ploščic ter ključa. Obstaja 29 enakorobnih poliedrov, katerih stranice (mejne ploskve) so pravilni mnogokotniki in jih lahko sestavimo s tem kompletom.
Poševna prizma je komplet za sestavljanje poševne tristrane prizme. Spodaj je fotografija vseh treh nagrad.



Največ odgovorov iz 1. številke so nam poslale šole: OŠ ŠMARJE-SAP, OŠ ANTONA MARTINA SLOMŠKA VRNIKA in OŠ DRAGITINA KETTEJA, ILIRSKA BISTRICA. Nagrade bodo prejeli še: A.Š., ROGAŠKA SLATINA, L:B:, KAMNIK, M.O. in T.S., ŠMARJE-SAP, M.P. in V.U., ILIRSKA BISTRICA, M.D. in P.R., PIVKA, V.V., VRHNIKA.

Nagradna logična naloga

Štiri prijateljice (Iva, Ella, Dora, Jana) imajo različnine konje (Mistral, King, Pongo, Reno), ki so različnih pasem (poni, lipicanec, frizijec, rjavec). Za vsako določi ime, ime konja in njegovo pasmo.

1. Ella nima Rena.
2. Jana konj je rjavec.
3. Pongo ni ne frizijec ne poni.
4. Mistral ni ne lipicanec ne frizijec.
5. Dora nima ponija.
6. Reno ni frizijec.
7. Ella nima Mistrala.
8. Pongo ni lipicanec.

	Mistral	King	Pongo	Reno	poni	lipicanec	frizijec	rjavec
Iva								
Ella								
Dora								
Jana								
poni								
lipicanec								
frizijec								
rjavec								

ime	konj	pasma
Iva		
Ella		
Dora		
Jana		

Rešitev nagradne uganke pošljite do 1.1..2019 na naslov Logika d.o.o., Svetčeva pot 11, 1241 Kamnik, s pripisom »Nagradna uganka«. Prosimo vas, da napišete domači in ne šolski naslov, da vam, če boste izžrebani, pošljemo nagrado.

Nagradna naloga v esperantu

Kvar amikinoj (Amelio, Kristina, Sofia, Sonja) kun diversaj familiaj nomoj (Gonzalez, Metla, Li, Dupont) havas diversajn profesiojn (artistino, kemiistino, muzikistino, verkistino).
Divenu iliajn nomojn, familiajn nomojn kaj profesiojn.

1. Sinjorino Dupont estas nek artistino nek verkistino.
2. Sinjorino Metla estas nek verkistino nek muzikistino.
3. La familia nomo de Sonja estas Gonzalez.
4. La profesio de sinjorino Gonzalez ne estas artistino.
5. La familia nomo de Sofia estas nek Li nek Dupont.
6. La profesio de sinjorino Metla ne estas artistino.
7. La familia nomo de Kristina ne estas Dupont.

	Gonzalez	Metla	Li	Dupont	artistino	kemiistino	muzikistino	verkistino
Amelio								
Kristina								
Sofia								
Sonja								
artistino								
kemiistino								
muzikistino								
verkistino								

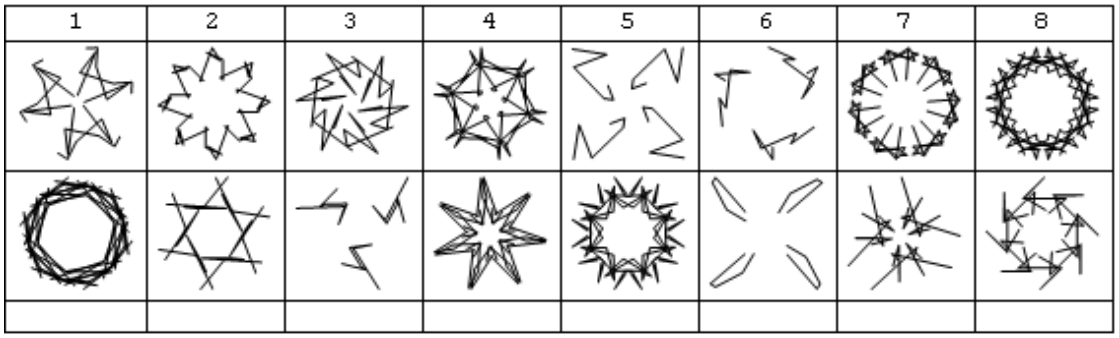
nomo	famnom	profesio
Amelio		
Kristina		
Sofia		
Sonja		

Rešitev nagradne uganke pošljite do 1.1..2019 na naslov Logika d.o.o., Svetčeva pot 11, 1241 Kamnik, s pripisom »esperanto«. Prosimo vas, da napišete domači in ne šolski naslov, da vam, če boste izžrebani, pošljemo nagrado.

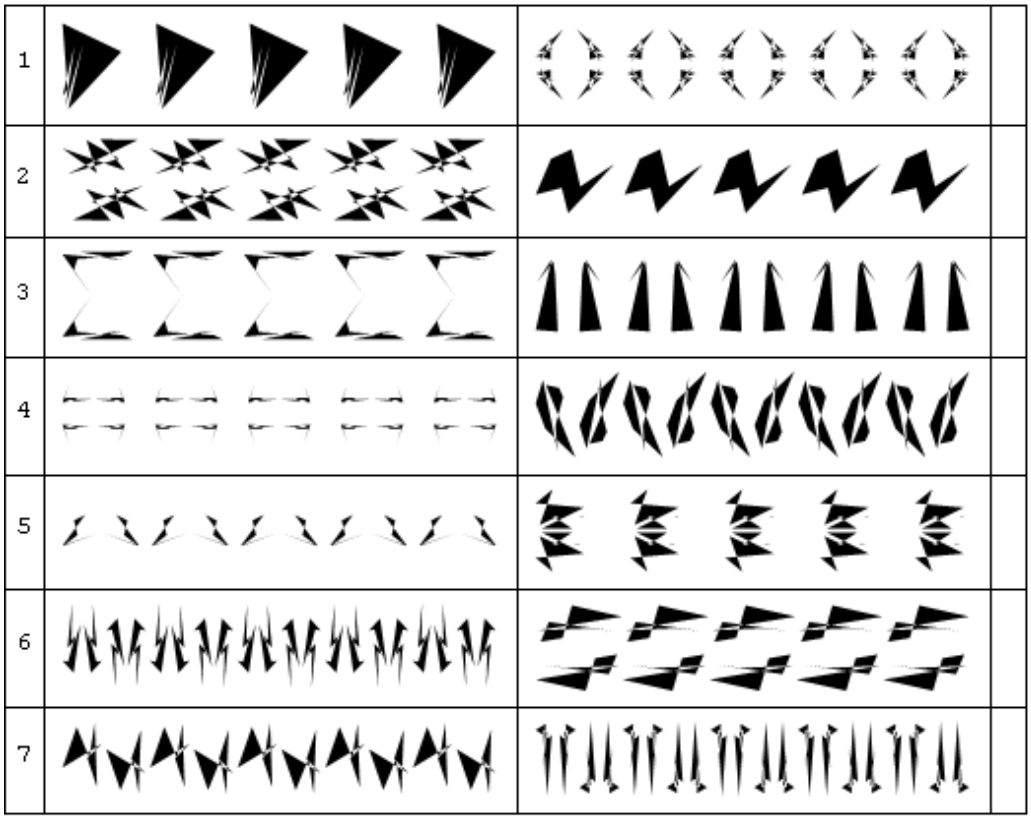
Nagradna naloga simetrija

V prvi vrstici (levem stolpcu) so simetrije likov označene z zaporednimi številkami.
Označi like v drugi vrstici (desnem stolpcu) s številko njihove simetrije.

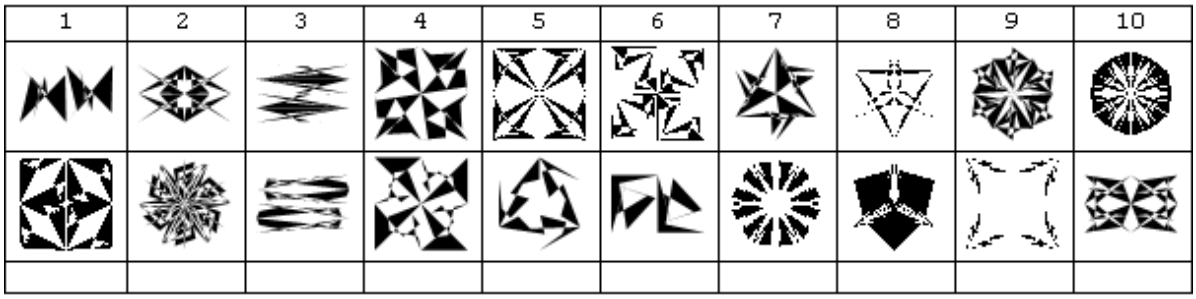
A)



B)



C)



Rešitev nagradne uganke pošljite do 1.1..2019 na naslov Logika d.o.o., Svetčeva pot 11, 1241 Kamnik, s pripisom »simetrija«. Prosimo vas, da napišete domači in ne šolski naslov, da vam, če boste izžrebani, pošljemo nagrado

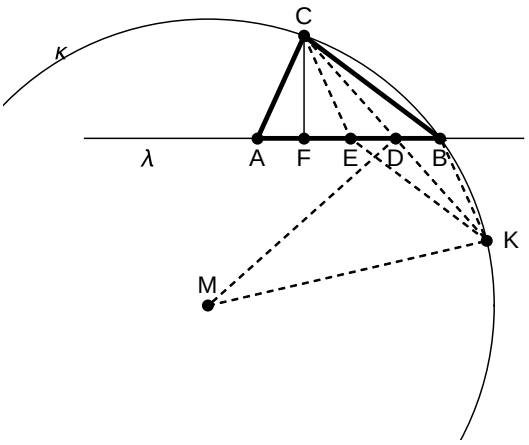
Modeli iz ploščic

V tej rubriki bomo objavljali modele naših bralcev, Tokrat objavljamo model, ki ga je sestavil Bor z manjšo pomočjo svojega očka.



Še ena rešitev Plemljeve naloge

Ko smo bili že prepričani, da smo odkrili vse možne rešitve Plemljeve naloge (konstruirati je treba trikotnik, če je podana osnovnica *c*, višina na osnovnico *v* in razlika kotov pri A in B), smo v [2, str. 121] našli povsem nov postopek reševanja. Animacija te rešitve je objavljena v [3].



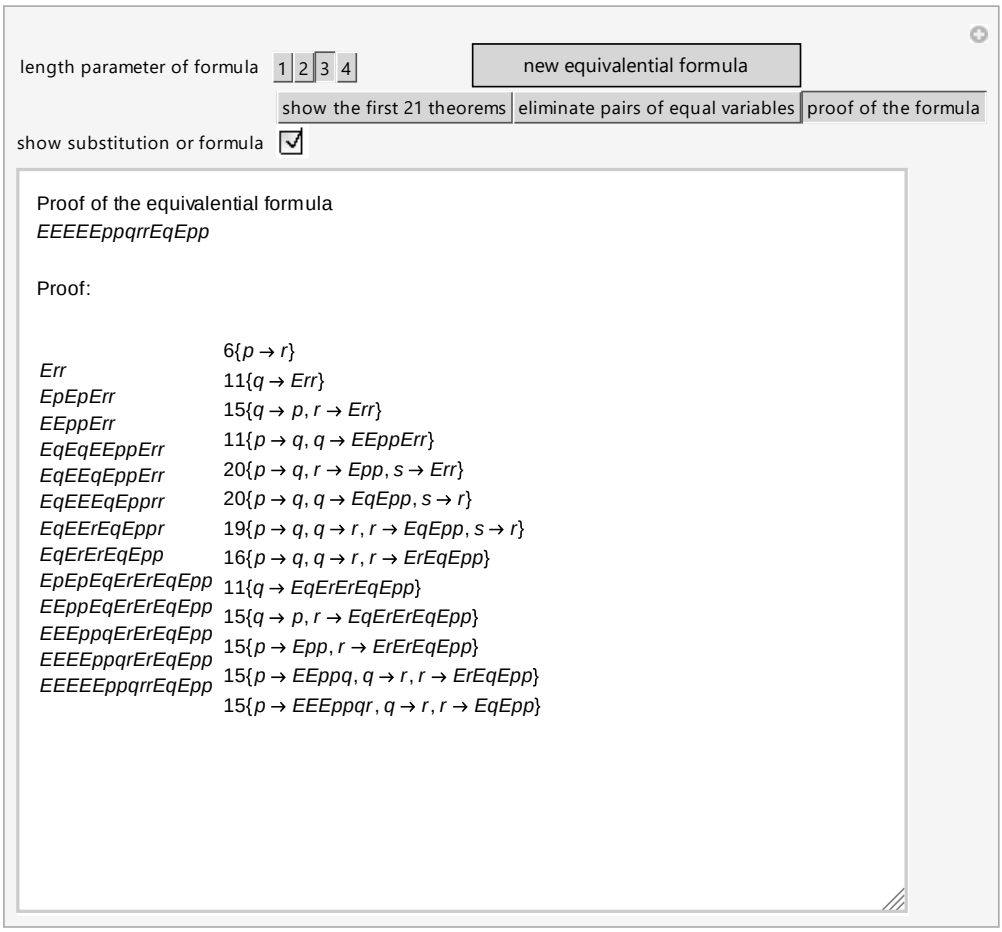
Na premici λ narišemo točko F in na njeni pravokotnici narišemo točko C, tako da je |FC|=*v*. Na premici λ narišemo točko D, tako da je |DF|=*c*/2. Daljico CD podvojimo, tako da je |DK|=|CD|, Konstruiramo točko M, tako da je MKD pravokoten trikotnik s kotom δ=α−β pri M. Krožnica z radijem |MK|=|MC| in središčem v M seka premico λ v točki B. Od B odmerimo A na razdalji *c*. Narišimo še točko E, tako da je |DB|=|DE|. Potem je EKBC paralelogram, njegov kot pri B je π-δ, saj je to kot nad tetivo CK, kjer je središčni kot 2δ. Torej je kot tega paralelograma pri C enak δ. To pomeni, da je kot FEC enak δ+β. Toda |AF|=*c*-(*c*/2+|DB|)=*c*/2-|ED|=|FE|. Torej je trikotnik AEC enakokrak in je zato kot pri A enak δ+β=α.

Reference

[1] H. Holleben, P. Gerwien, Aufgaben-Systemeund Sammlungenaus der ebenen Geometrie, I. in II. vol., Berlin, 1831 in 1832.
[2] E. Specht, 300 Aufgaben zur Geometrie und zu Ungleichungen insbesondere zur Vorbereitung auf Mathematik-Olympiaden, Version 2.5 (Dezember 2000), Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Fakultät für Naturwissenschaften.
[3] Izidor Hafner, Marko Razpet and Nada Razpet
"The Plemelj Construction of a Triangle: 15"
http://demonstrations.wolfram.com/ThePlemeljConstructionOfATriangle15/
Wolfram Demonstrations Project
Published: August 1, 2018

Ekvivalentnostni račun

Ekvivalentnostni račun je podsistem izjavnega računa, ki vsebuje samo ekvivalenco. Lesniewski je dokazal, da lahko ta račun aksiomatiziramo. Pri tem sta pravili sklepanja odcepitev in substitucija. Lukasiewicz je dokazal, da lahko sistem aksiomatiziramo z enim samim aksiomom: EEpqEErqEpr. Lukasiewicz [4] je najprej dokazal 20 izrekov:



Nato je dokazal, da je vsaka tavtologija, ki vsebuje samo ekvivalence, dokazljiva.
Zgornja slika prikazuje 20 izrekov, naslednja pa primer dokaza neke tavtologije. Oboje je narejeno z demonstacijo [1].

Najkrajši aksiom

Dokazati, da je formula EEpqEErqEpr najkrajši aksiom, pomeni, da moramo za vse krajše tavtologije, v katerih nastopa samo ekvivalenca, pokazati, da ne morejo biti aksiomi. Tokrat bomo to pokazali samo za formulo Epp. Vzemimo, da E pomeni izjavno funkcijo, ki je podana s tabelo:

E	1	0
1	1	0
0	1	1

Potem je E00=1 in E11=1. Torej je Epp tavtologija (vedno ima vrednost 1). Ta tabela ohranja resničnost pravila odcepitve: Če je a=1 in Eab=1, potem je b=1. Seveda pa ohranja resničnost pri substituciji izjavnih spremenljivk s formulami.
Toda EEpqEErqEpr ni tavtologija. Če naredimo zamenjave (substitucije) p->1, q->1, r->0, dobimo 0 za vrednost formule.

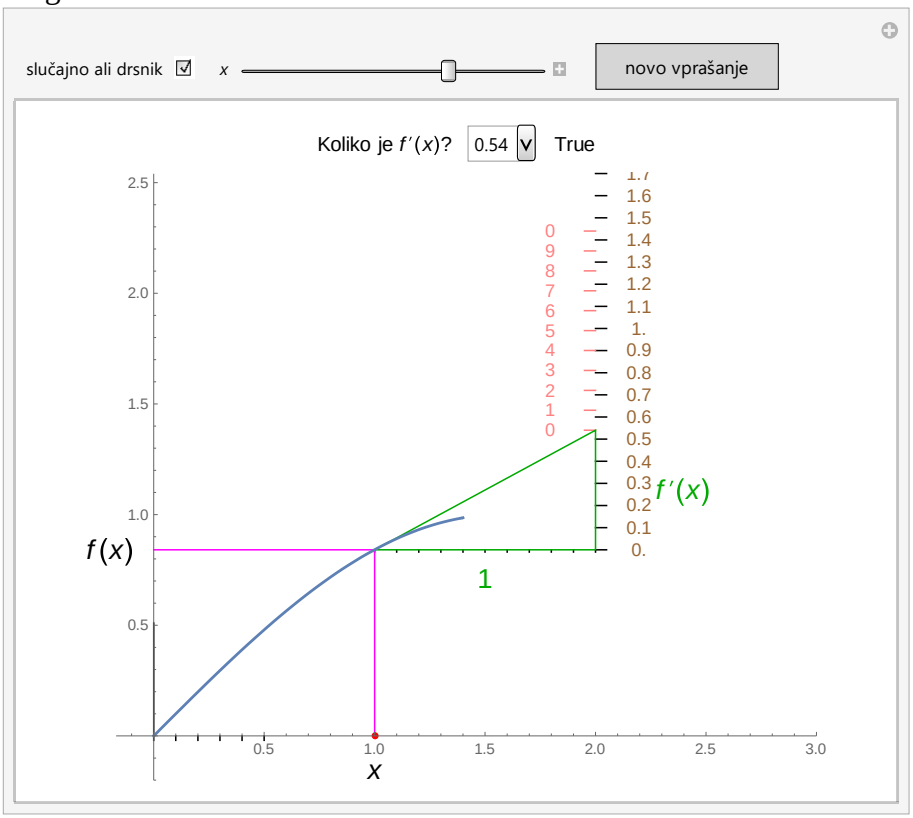
Torej aksiom ekvivalentnostnega računa ni izpeljiv iz aksioma Epp. Dokazi za druge formule zahtevajo bolj zahtevne tabele.

Kreativne definicije

Definicija je kreativna, če z njeno uvedbo lahko dokažemo izreke, ki ne vsebujejo novo uvedenega simbola, a niso dokazljivi brez uporabe te definicije. V splošnem je problem »kreativnosti« zelo težak. V primeru zelo enostavne teorije, to je, ekvivalentnostnega računa, pa se da to dobro ilustrirati.
Ekvivalentnostni račun je izjavni račun, ki ima le eno izjavno povezavo, to je ekvivalenco.
Uporabili bomo poljsko notacijo. Na primer tavtologijo p ⇔ p bomo pisali Epp.
Aksiom te teorije bo
EEsEppEEsEppEEpqEErqEpr,
Pravili sklepanja pa sta substitucija in odcepitev. Pokazali bomo, da lahko izreke te teorije dobimo le s substitucijo.
Če lahko dobimo nov izrek te teorije z odcepitvijo, potem morata obstajati dve formuli dobljeni s substitucijo v aksiom, ena je oblike Eαβ, druga pa α. Ta pogoja lahko izrazimo:
Eαβ ≅ EEγEδδEEγEEδδEEδεEEζεEδζ (a)
α ≅ EEρEσσEEρEσσEEστEEυτEσυ (b)
Tu znak ≅ pomeni skladnost (enakost) izrazov. Iz prve enakosti sledi, da EγEδδ ustreza izrazu α.
Zato veljajo enakosti:
α ≅ EγEδδ ≅ EEρEσσEEρEσσEEστEEυτEσυ (c)
γ ≅ EρEσσ (d)
δ ≅ EρEσσ (e)
δ ≅ EEστEEυτEσυ (f)
Iz (e) in (f) dobimo:
ρ ≅ Eστ (g)
σ ≅ Eυτ (h)
σ ≅ Eσυ (i).
To je protislovje, saj izraz ne more imeti skladnega pravega dela.
Iz tega sledi, da v tem sistemu ne moremo dokazati krajših izrekov, kot je aksiom. Na primer Epp ni izrek, je pa tavtologija.
Če pa vpeljemo definicijo
EVpEpp (ta definicija vpelje enomestno konstantno izjavno funkcijo Vp ⇔ Epp)
in v aksiomu zamenjamo spremenljivko s z Vp dobimo z odcepitvijo izreke
EEVpEppEEVpEppEEpqEErqEpr
EVpEppEEpqEErqEpr
EEpqEErqEpr
Zadnji izraz je Lukasiewiczov aksiom za ekvivalentnosti račun. Povzeto po:[4].
Reference:
[1] Izidor Hafner "The Completeness Theorem of Equivalential Calculus" http://demonstrations.wolfram.com/TheCompletenessTheoremOfEquivalentialCalculus/ Wolfram Demonstrations Project
Published: December 5 2013
[2] I. Hafner, On proof length in the equivalential calculus, Glasnik matemtički, vol.15(35)(1980), 233-242.
[3] I. Hafner, On lower bound of the proof length in the eqiuvalential calculus, Glasnik matematički, vol.20 (40) (1985), 269-270.
[2] Jan Lukasiewicz, Equivalential calculus, Polish Logic 1920-1939, Oxford, Clarendon Press, 1967, str. 88-115.

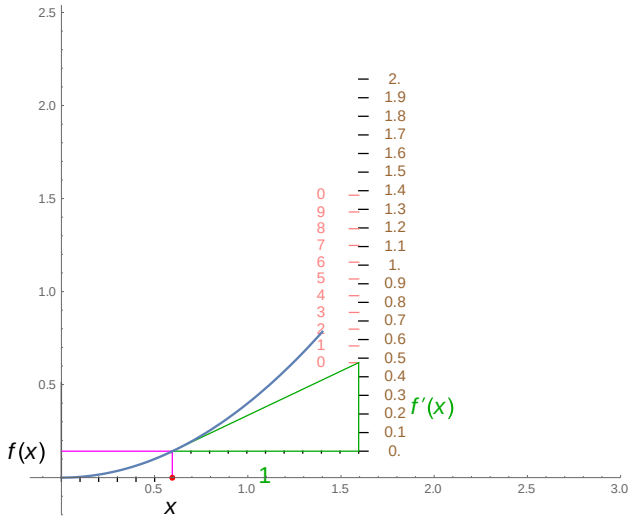
Odvod na dve decimalki

Odvod funkcije f v točki x je smerni količnik tangente na graf funkcije v točki (x, f(x)). Če vzamemo del tangente med abscisama x in x+1, dobimo pravokotni trikotnik, katerega kateti sta 1 in f´(x). Na sivi lestvici odčitamo odvod na eno decimalko, na Vernierjevi lestvici pa določimo še drugo decimalko.



V zgornjem primeru je odvod enak 0.54.

Določi odvod:



Referenca:

Izidor Hafner "Estimate Derivative"
http://demonstrations.wolfram.com/EstimateDerivative/
Wolfram Demonstrations Project
Published: February 28 2013

Prosti moduli in kemijske enačbe

Vzemimo poljubno množico $T=\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ in kolobar K. Elementi modula M nad kolobarjem K so vse formalne linearne kombinacije $a_1t_1+a_2t_2+\ldots+a_nt_n$, kjer so koeficienti iz K. Seštevanje in množenje s skalarjem sta definirana:
$(a_1t_1+a_2t_2+\ldots+a_nt_n)+ (a_1t_1+a_2t_2+\ldots+a_nt_n) = (a_1 + b_1)t_1+(a_2 + b_2)t_2+\ldots+(a_n + b_n)t_n)$
$a(a_1t_1+a_2t_2+\ldots+a_nt_n) = aa_1t_1+aa_2t_2+\ldots+aa_nt_n$.
Modul, ki ga tako dobimo, označujemo K(T). Za nas je pomemben Z(T), kjer je Z kolobar celih števil. Kadar je K obseg, govorimo o abstraktnem vektorskem prostoru, ki ima bazo T [3].
Uravnovesiti kemijsko enačbo $C_2H_6O+O_2$ --> CO_2+H_2O pomeni, da moramo poiskati rešitev v celih številih enačbe $x(2C+6H+O)+y(2O) = z(C+2O)+w(2H+O)$. Lahko jo zapišemo tudi $x(2, 6, 1)+y(0, 0, 2) = z(1, 0, 2)+w(2,0,1)$. Atomi imajo vlogo bazičnih elementov, molekule pa so linearne kombinacije.
Tokrat imamo delo z Z modulom z bazo {C, H, O}.
Če izenačimo število posameznih atomov na levi in desni, dobimo system homogenih enačb
$2x=z$
$6x=2w$
$x+2y=2z+w$
Če ima ta system racionalno rešitev, potem ima tudi rešitev v celih številih. Zato lahko glede rešljivosti uporabimo izreke o rešljivosti linearnih enačb. Lahko bi ga tudi reševali z Gaussovo eliminacijsko metodo. Vendar je lažje, če reduciramo število spremenljivk in uporabljamo v bistvu Eulerjevo metodo za reševanje diofantskih enačb. Rešitve kemijskih enačb so ponavadi majhna števila, zato pogosto računamo na pamet.
Če tretjo enačbo pomnožimo z 2 in nadomestimo z in w z x, dobimo
$2x+4y=8x+6x$, $y=3x$. Rešitev z najmanjšimi števili je (1, 3, 2, 3).
Več primerov najdete v [1, 2, 3 in 4].

Reference:

[1] D. E. Goldberg, *Schaum's 3000 Solved Problems in Chemistry*, New York: McGraw-Hill, 1988
[2] Izidor Hafner
"Free Modules for Balancing Abstract Chemical Equations"
http://demonstrations.wolfram.com/FreeModulesForBalancingAbstractChemicalEquations/
Wolfram Demonstrations Project
Published: August 2, 2018
[3] Barile, Margherita. "Free Module." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource, created by Eric W. Weisstein. http://mathworld.wolfram.com/FreeModule.html
[4] Izidor Hafner "Balancing Abstract Chemical Equations with One Kind of Atom"
http://demonstrations.wolfram.com/BalancingAbstractChemicalEquationsWithOneKindOfAtom/
Wolfram Demonstrations Project
Published: November 24 2014
[5] Izidor Hafner "Balancing Abstract Chemical Equations"
http://demonstrations.wolfram.com/BalancingAbstractChemicalEquations/
Wolfram Demonstrations Project
Published: January 9 2014

Rešitve

Barvni sudoku

1.

5	4	1	2	3
3	2	5	1	4
2	1	3	4	5
1	3	4	5	2
4	5	2	3	1

1	3	2	4
4	2	1	3
2	4	3	1
3	1	4	2

2	4	5	1	3
3	2	1	4	5
1	3	4	5	2
5	1	3	2	4
4	5	2	3	1

3	2	4	1
1	3	2	4
4	1	3	2
2	4	1	3

1	4	3	2	5
3	1	2	5	4
2	3	5	4	1
4	5	1	3	2
5	2	4	1	3

2	4	3	1
4	3	1	2
3	1	2	4
1	2	4	3

3	5	4	1	2
1	3	2	5	4
2	1	3	4	5
4	2	5	3	1
5	4	1	2	3

3	4	2	1
2	1	3	4
4	2	1	3
1	3	4	2

3	2	4	5	1
4	5	1	3	2
1	3	5	2	4
5	4	2	1	3
2	1	3	4	5

4	5	3	1	2
1	3	2	4	5
5	4	1	2	3
3	2	4	5	1
2	1	5	3	4

1	4	2	5	3
5	1	4	3	2
2	5	3	4	1
4	3	1	2	5
3	2	5	1	4

2	4	1	3
4	2	3	1
1	3	2	4
3	1	4	2

2.

4	3	2	1
1	4	3	2
3	2	1	4
2	1	4	3

2	3	1	5	4
4	5	2	3	1
5	1	4	2	3
1	2	3	4	5
3	4	5	1	2

5	1	4	3	2
4	2	3	5	1
3	5	2	1	4
1	4	5	2	3
2	3	1	4	5

1	4	3	2
4	1	2	3
3	2	4	1
2	3	1	4

5	1	2	4	3
4	2	1	3	5
3	5	4	1	2
1	3	5	2	4
2	4	3	5	1

2	4	1	3
3	2	4	1
1	3	2	4
4	1	3	2

1	3	4	2
2	1	3	4
4	2	1	3
3	4	2	1

1	3	4	2
2	4	3	1
4	1	2	3
3	2	1	4

2	1	3	5	4
3	2	1	4	5
1	5	4	2	3
5	4	2	3	1
4	3	5	1	2

1	3	4	2
2	4	3	1
4	1	2	3
3	2	1	4

3	1	4	2
1	4	2	3
4	2	3	1
2	3	1	4

3	1	2	4
1	4	3	2
4	2	1	3
2	3	4	1

Latinski kvadrati

3	2	1	4
2	4	3	1
4	1	2	3
1	3	4	2

4	2	1	3
3	1	4	2
2	4	3	1
1	3	2	4

3	2	1	5	4
4	3	2	1	5
5	1	3	4	2
2	5	4	3	1
1	4	5	2	3

1	5	4	2	3
2	3	5	4	1
5	1	2	3	4
3	4	1	5	2
4	2	3	1	5

3	2	1	5	4
2	1	4	3	5
5	3	2	4	1
4	5	3	1	2
1	4	5	2	3

4	2	5	3	1
5	1	4	2	3
1	3	2	4	5
3	4	1	5	2
2	5	3	1	4

4	2	3	1
1	4	2	3
2	3	1	4
3	1	4	2

4	1	3	2
2	3	4	1
1	4	2	3
3	2	1	4

3	2	1	5	4
2	5	3	4	1
4	3	5	1	2
5	1	4	2	3
1	4	2	3	5

5	4	3	1	2
4	5	1	2	3
1	2	4	3	5
2	3	5	4	1
3	1	2	5	4

2	4	3	1
1	2	4	3
3	1	2	4
4	3	1	2

1	4	3	2
3	1	2	4
4	2	1	3
2	3	4	1

Sudoku s črkami

E 1	E 4	C 2	B 5	C 3
C 5	A 3	C 1	C 4	E 2
B 3	A 5	A 4	B 2	A 1
A 2	B 1	D 5	E 3	B 4
D 4	D 2	D 3	D 1	E 5

B 4	C 1	D 5	C 2	C 3
E 1	C 5	E 2	A 3	A 4
E 3	A 2	A 1	E 4	B 5
D 2	B 3	D 4	E 5	D 1
A 5	C 4	D 3	B 1	B 2

A 2	E 3	B 1	A 5	D 4
C 1	D 5	C 3	A 4	E 2
E 5	B 4	B 2	E 1	B 3
C 4	C 2	C 5	D 3	A 1
A 3	D 1	E 4	D 2	B 5

E 4	E 2	E 3	E 5	A 1
D 1	A 3	C 2	B 4	C 5
D 2	B 5	C 4	C 1	D 3
C 3	E 1	D 5	B 2	A 4
A 5	D 4	B 1	B 3	A 2

E 5	D 4	B 3	D 1	A 2
E 4	E 3	B 1	B 2	B 5
D 3	D 2	D 5	B 4	A 1
C 1	C 5	E 2	C 3	A 4
C 2	E 1	C 4	A 5	A 3

C 4	E 1	B 2	D 3	D 5
C 5	E 4	A 1	C 2	E 3
B 1	B 3	E 5	A 4	E 2
A 3	D 2	D 4	B 5	D 1
A 2	A 5	C 3	C 1	B 4

B 3	D 1	C 5	B 4	E 2
D 5	E 4	D 2	C 1	C 3
B 2	B 5	B 1	E 3	A 4
E 1	A 3	D 4	A 2	A 5
C 4	C 2	D 3	E 5	A 1

C 1	A 2	C 3	C 5	A 4
D 4	A 3	E 5	D 2	D 1
B 3	E 1	C 2	C 4	A 5
B 2	D 5	B 4	B 1	E 3
B 5	E 4	A 1	D 3	E 2

A 4	A 3	B 2	E 5	C 1
A 5	D 4	E 3	B 1	D 2
C 2	E 1	C 5	E 4	B 3
C 3	B 5	D 1	A 2	C 4
A 1	E 2	B 4	D 3	D 5

D 2	B 3	E 1	B 4	E 5
A 4	B 2	E 3	B 5	C 1
A 1	E 4	C 5	A 3	E 2
A 5	D 1	D 4	A 2	D 3
C 3	D 5	C 2	B 1	C 4

B 2	A 1	E 3	C 4	D 5
C 1	B 4	C 5	D 3	D 2
E 4	A 3	E 2	A 5	B 1
B 5	C 2	A 4	E 1	C 3
B 3	E 5	D 1	A 2	D 4

D 1	D 5	C 4	E 3	A 2
D 4	B 2	A 5	E 1	A 3
C 5	E 4	C 3	C 2	B 1
B 3	A 1	E 2	B 4	E 5
D 2	D 3	C 1	B 5	A 4

Futoshiki

1	3	5	4	2
4	2	1	5	3
3	1	4	2	5
5	4	2	3	1
2	5	3	1	4

2	1	4	3
4	2	3	1
3	4	1	2
1	3	2	4

3	2	1	5	4
2	5	3	4	1
1	4	5	3	2
5	1	4	2	3
4	3	2	1	5

3	2	1
1	3	2
2	1	3

3	2	1	4
4	1	3	2
1	4	2	3
2	3	4	1

1	3	2
3	2	1
2	1	3

3	4	2	1
4	2	1	3
1	3	4	2
2	1	3	4

1	2	5	4	3
2	1	3	5	4
5	4	1	3	2
4	3	2	1	5
3	5	4	2	1

4	2	1	3
3	1	2	4
2	3	4	1
1	4	3	2

1	2	3	4
4	3	1	2
2	1	4	3
3	4	2	1

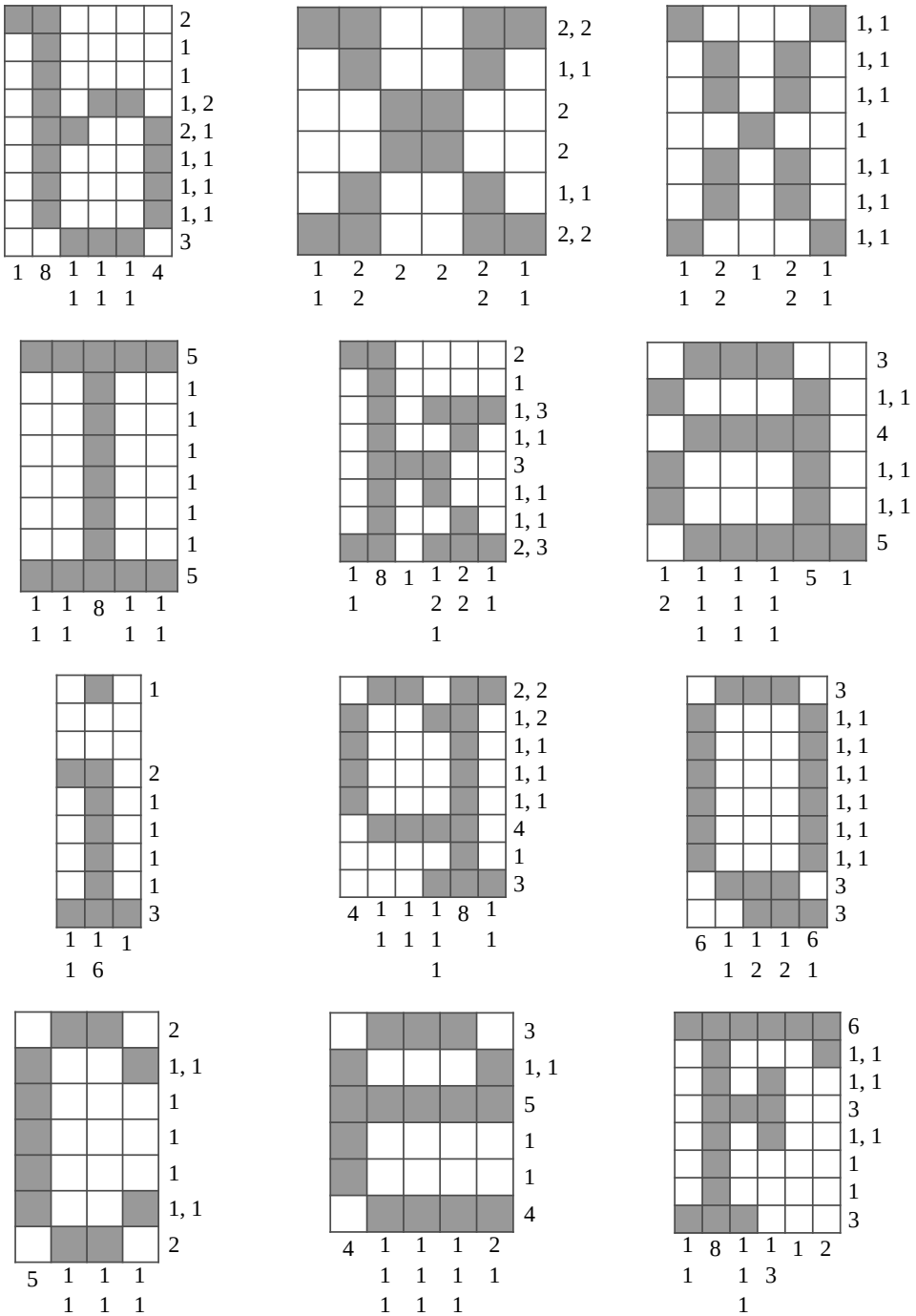
2	4	3	5	1
4	5	1	2	3
1	3	5	4	2
5	1	2	3	4
3	2	4	1	5

4	3	1	2
3	1	2	4
2	4	3	1
1	2	4	3

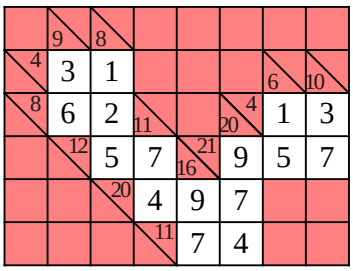
Razpored znakov

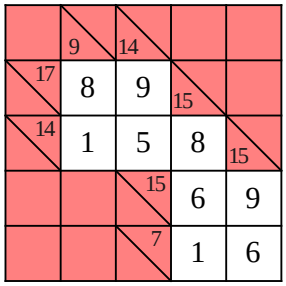
A C B	C B A
C D A B	D C A B
A D B E C	B D C E A
C B E A D	B D E A C

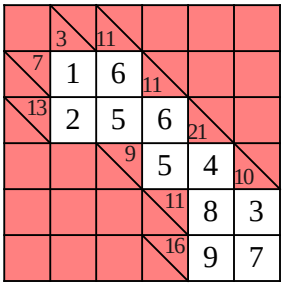
Gobelini

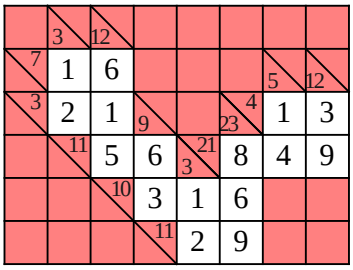


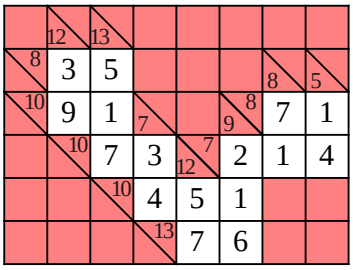
Križne vsote

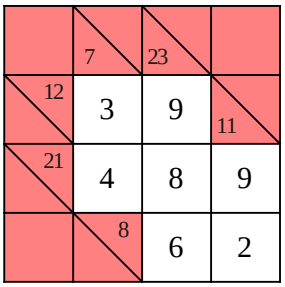


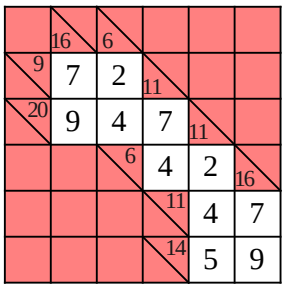


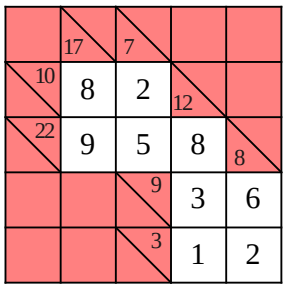


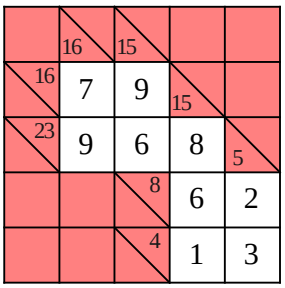


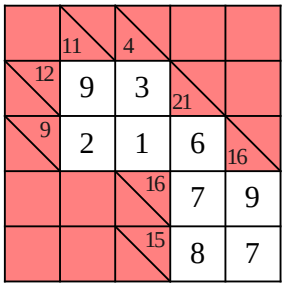


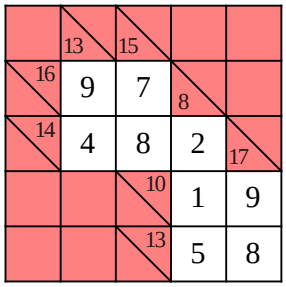


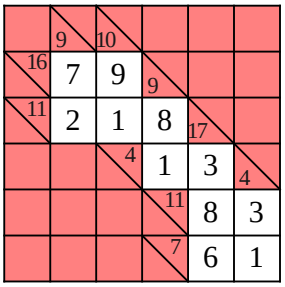












Križni produkti

	21	8			
28	7	4	27		
54	3	2	9	36	
		6	3	2	42
			42	6	7
			18	3	6

	30	16	12
60	5	2	6
96	6	8	2

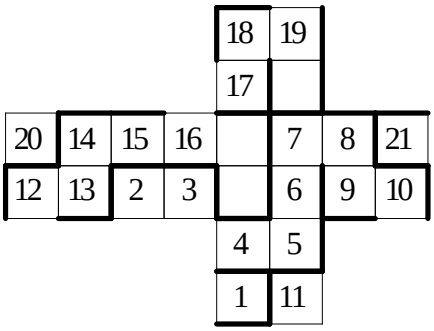
	28	45	12
378	7	9	6
40	4	5	2

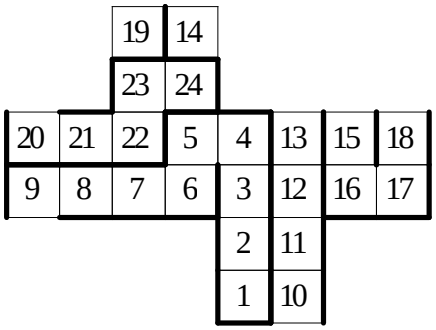
	15	30
15	3	5
30	5	6

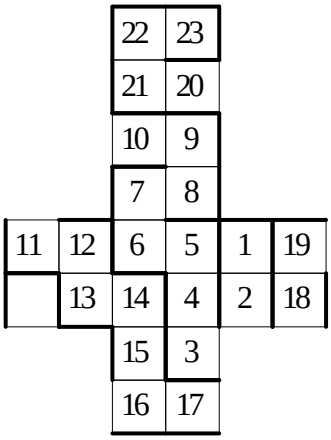
	36	40		
72	9	8	126	
180	4	5	9	27
		63	7	9
		6	2	3

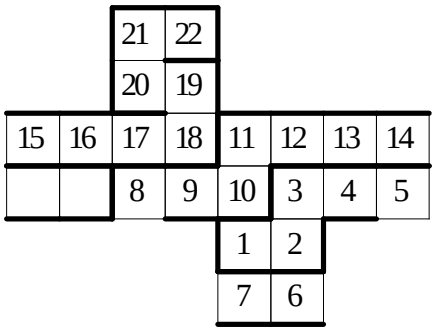
	56	108	
48	8	6	40
112	7	2	8
	45	9	5

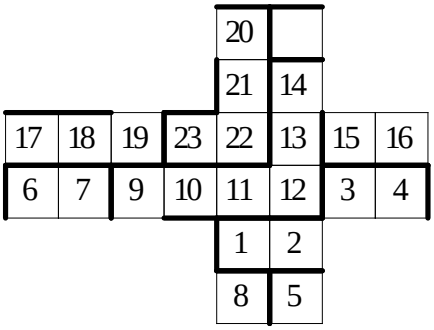
Labirint na kocki

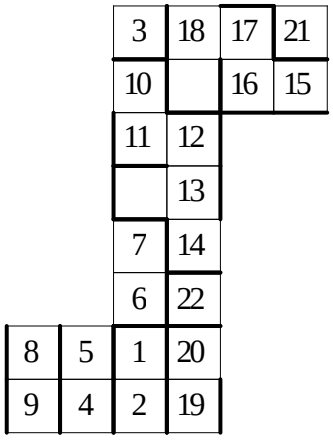




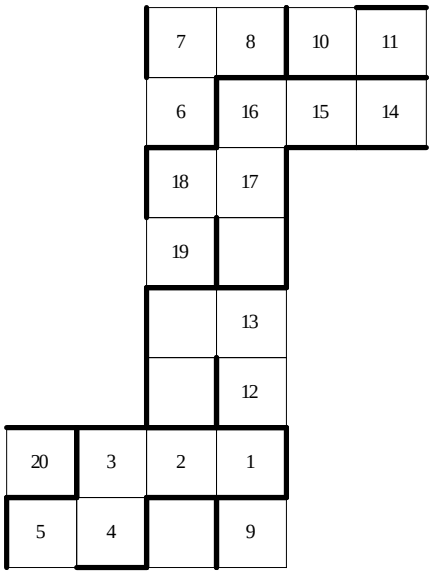


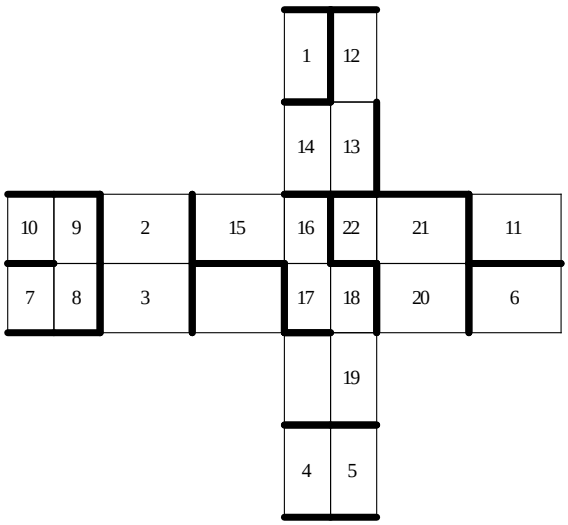


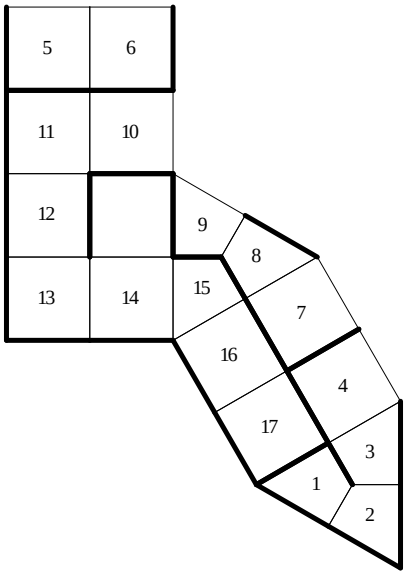


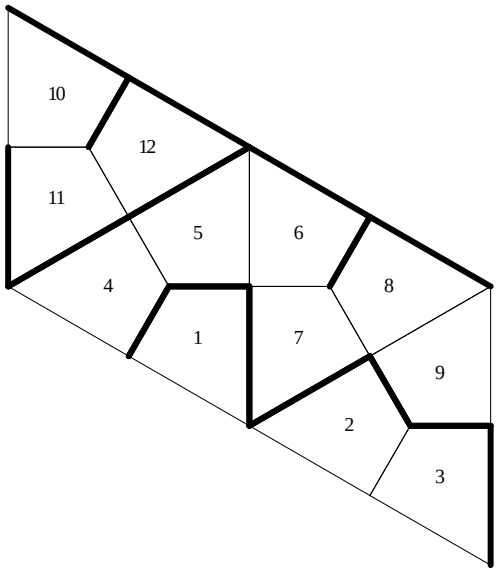


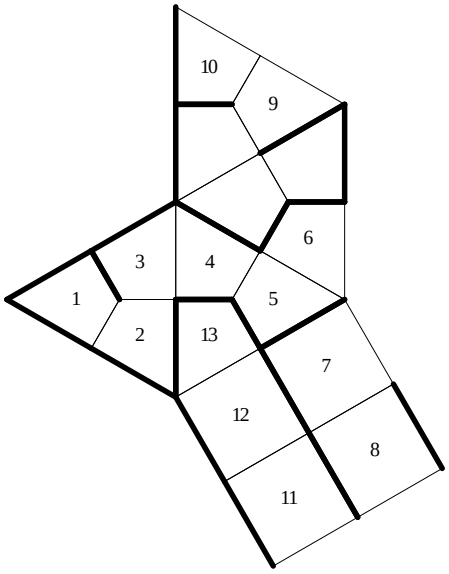
Labirinti na enostavnih poliedrih

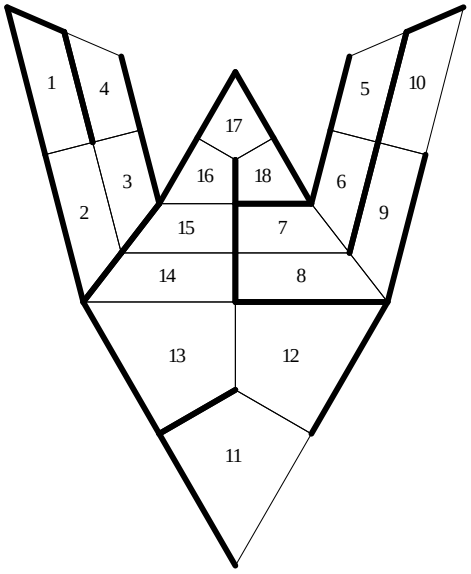












Grupe

Linearne grupe:
a) {6, 4, 1, 3, 5, 2, 7}, {4, 1, 5, 3, 7, 2, 6}
b) {2, 5, 1, 3, 4, 7, 6}, {2, 5, 1, 7, 4, 3, 6}

Prostorska predstavljivost

a)

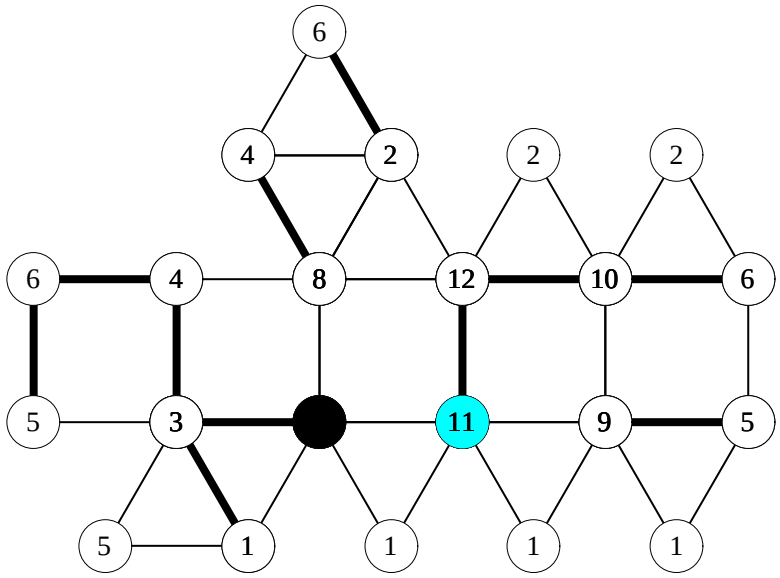
	1	2	3
1	8	8	11
2	5	11	9
3	8	7	8
4	5	7	6
5	5	9	2

b)

	1	2	3
1	7	7	1
2	2	2	4
3	2	3	3
4	3	1	5
5	5	5	4

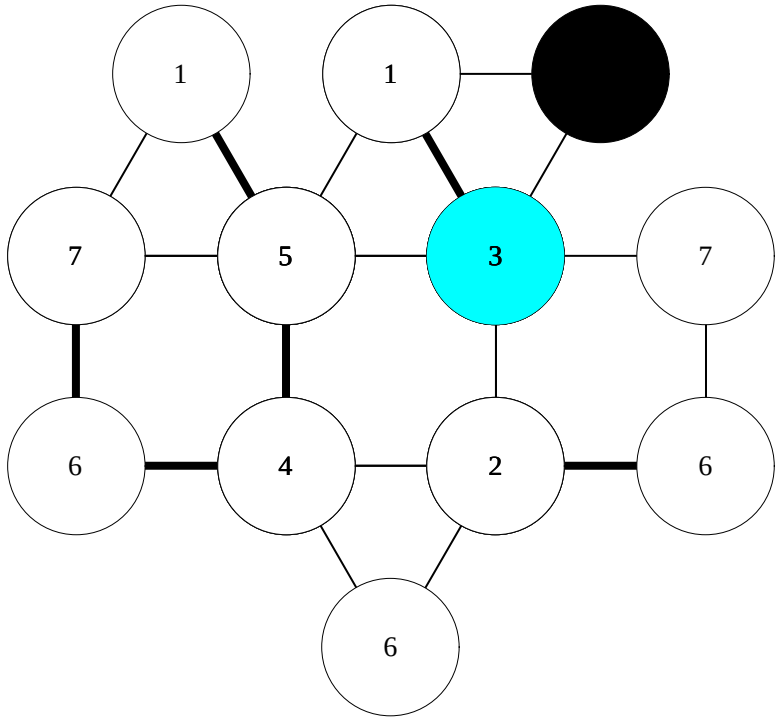
Labirinti na robovih poliedra

1.



{11,12,10,6,4,3,7}

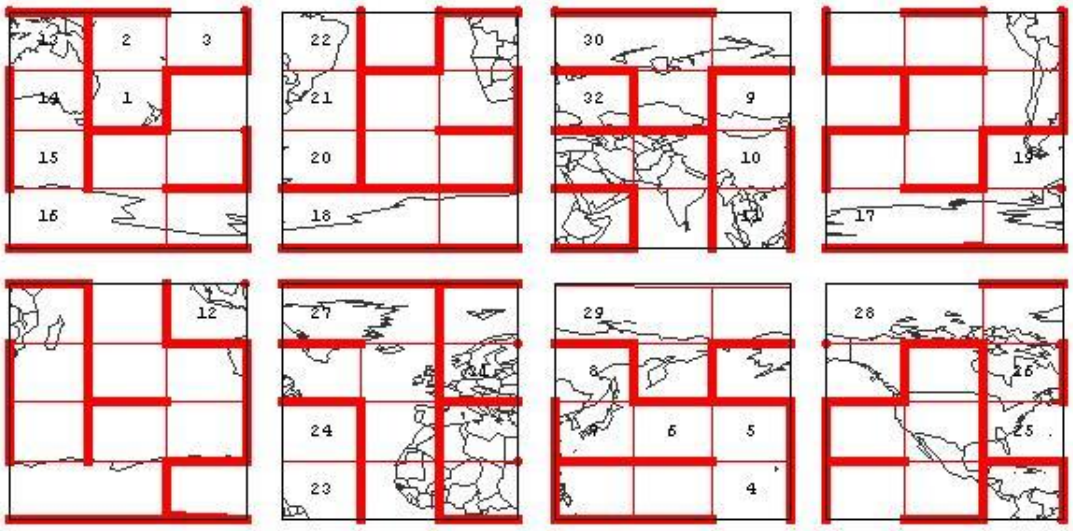
2.



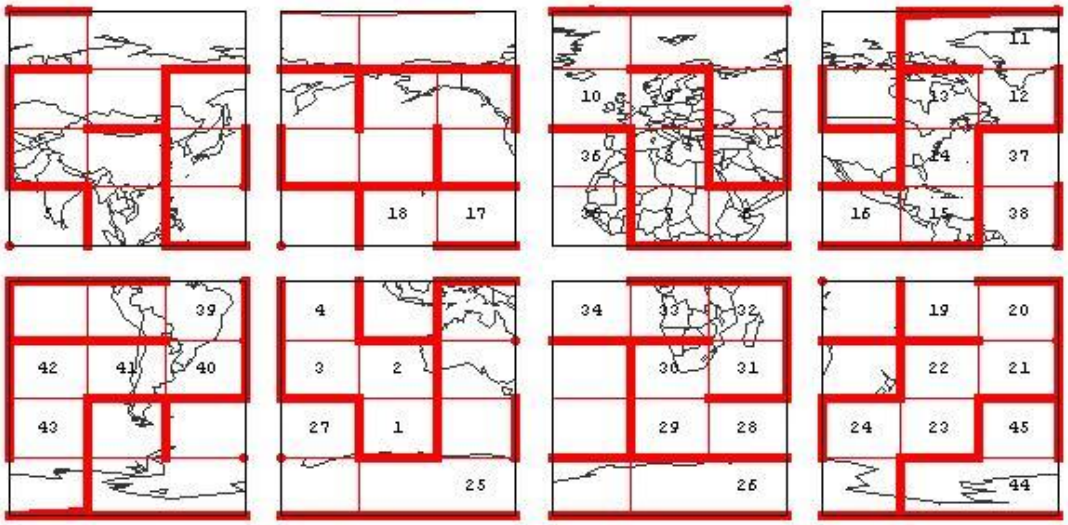
{3,1,5,4,6,7}

Večdelni labirinti na zemljevidu

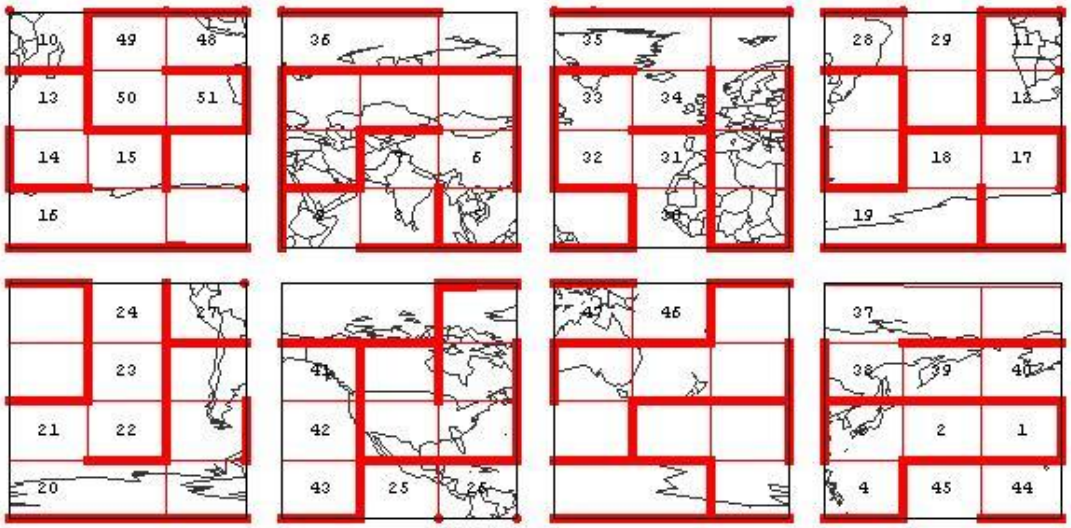
1.



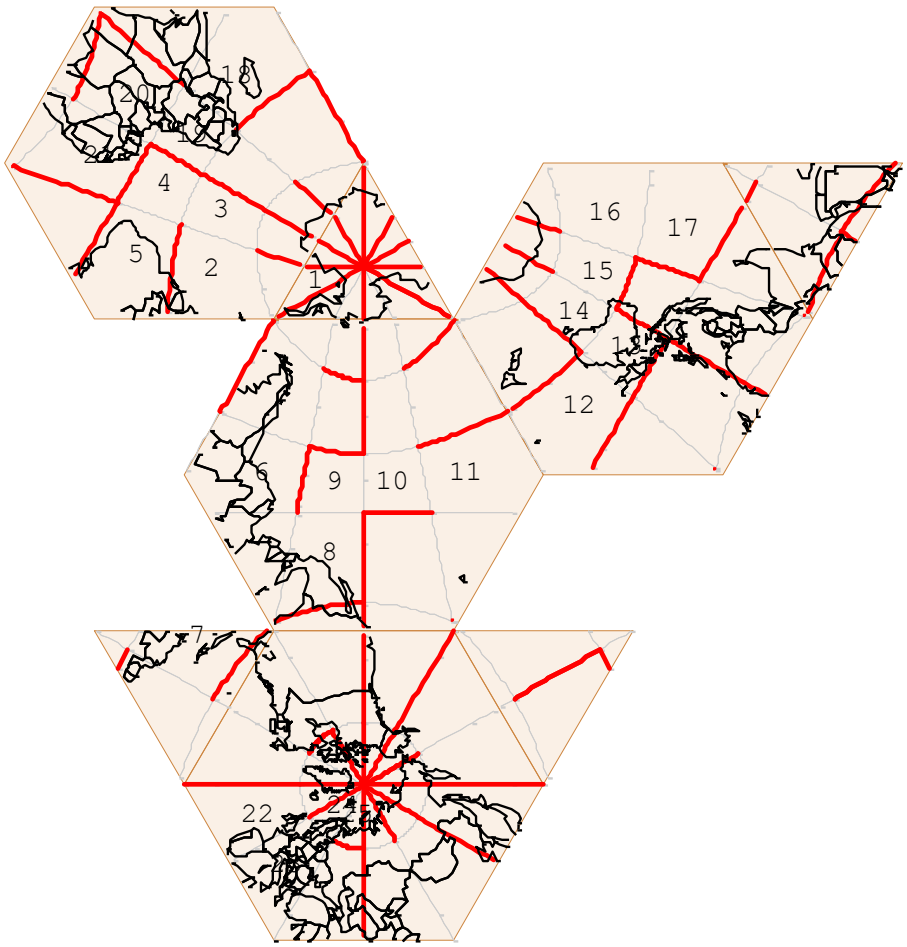
2.



3.



Labirint na zemljevidu



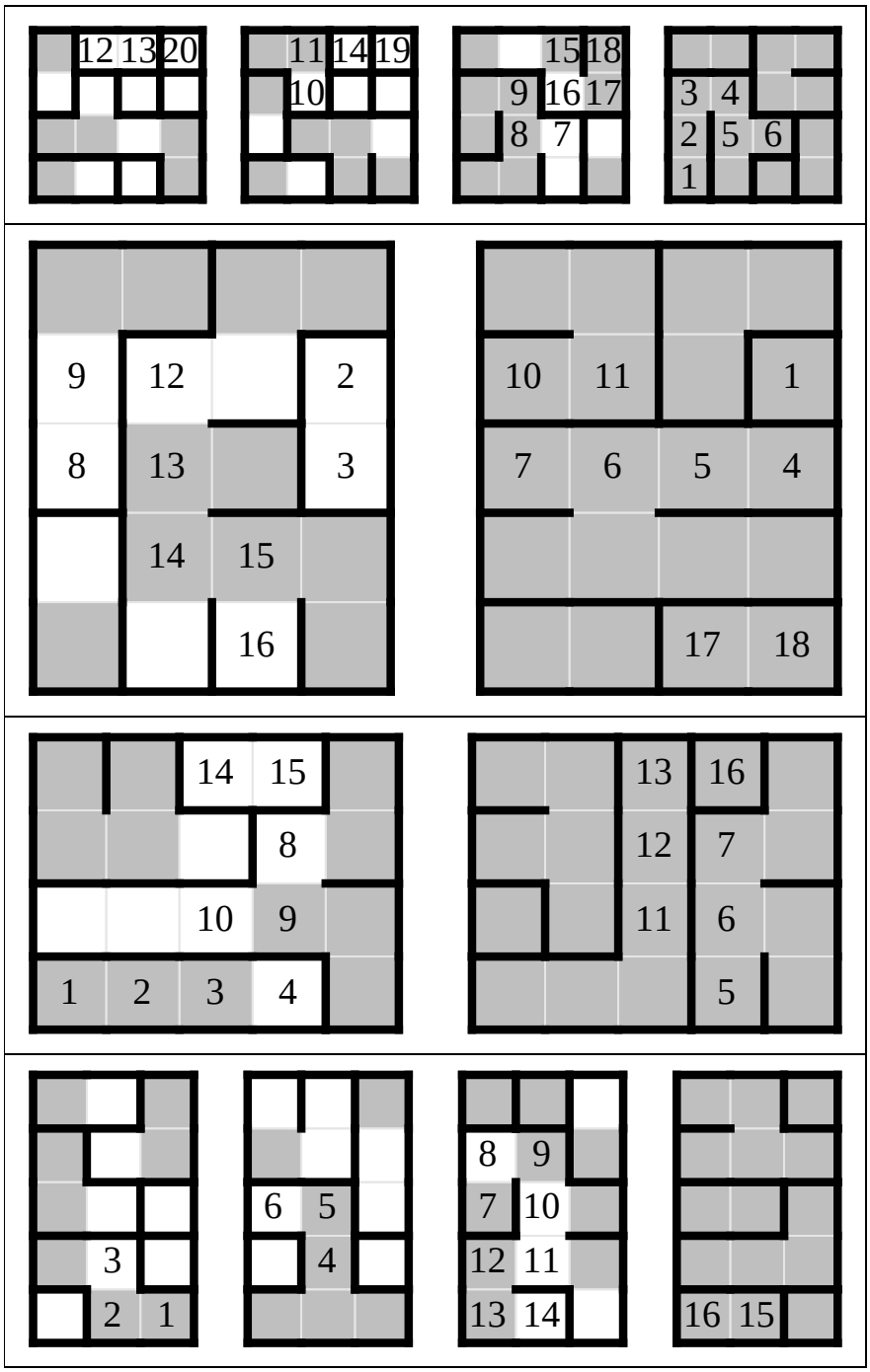
Odstranjene kocke

59 58 69
69 31 65
69 76 122
74 68 96

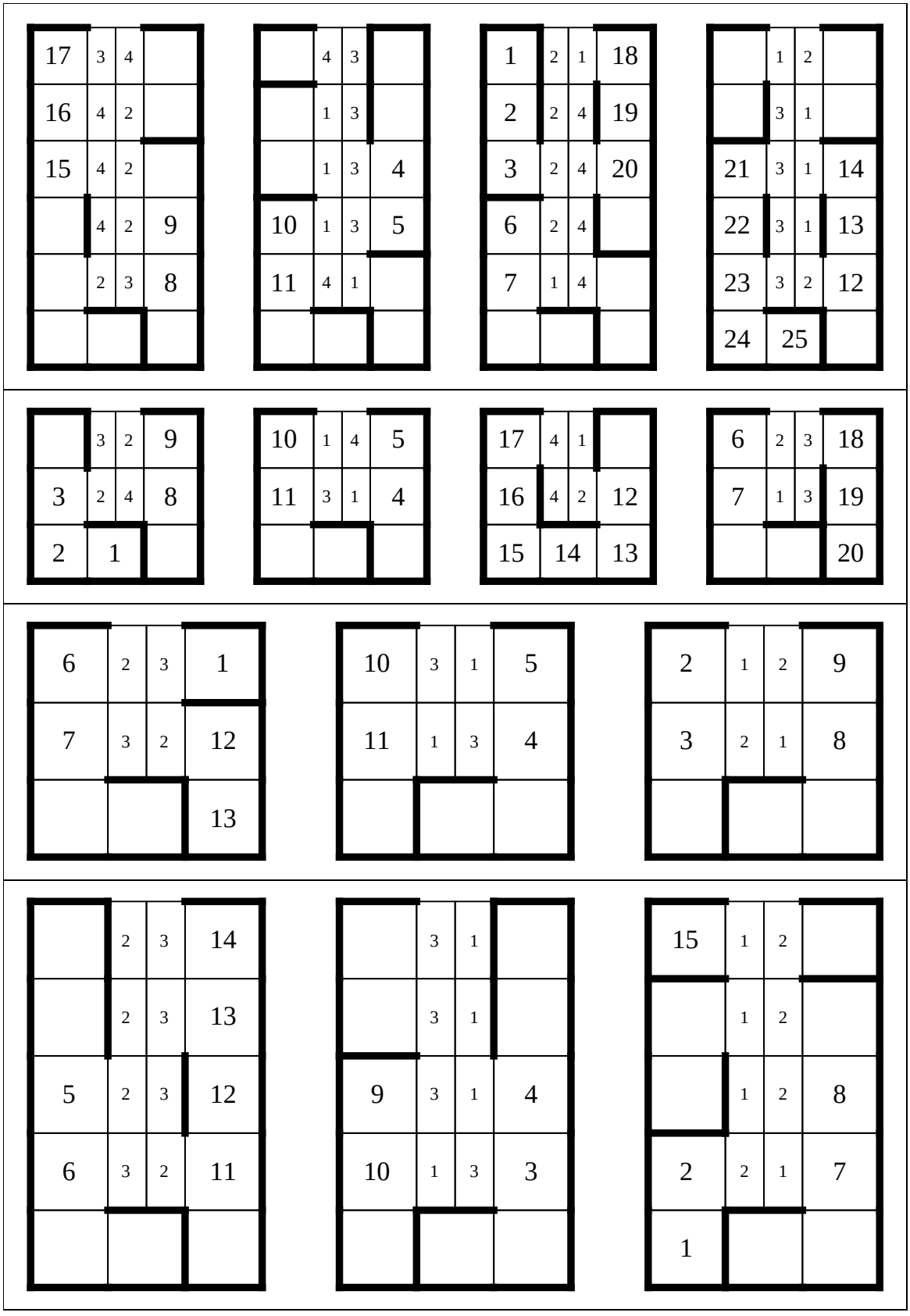
Kocki določi mrežo

{3, 1, 1, 1, 3, 4}

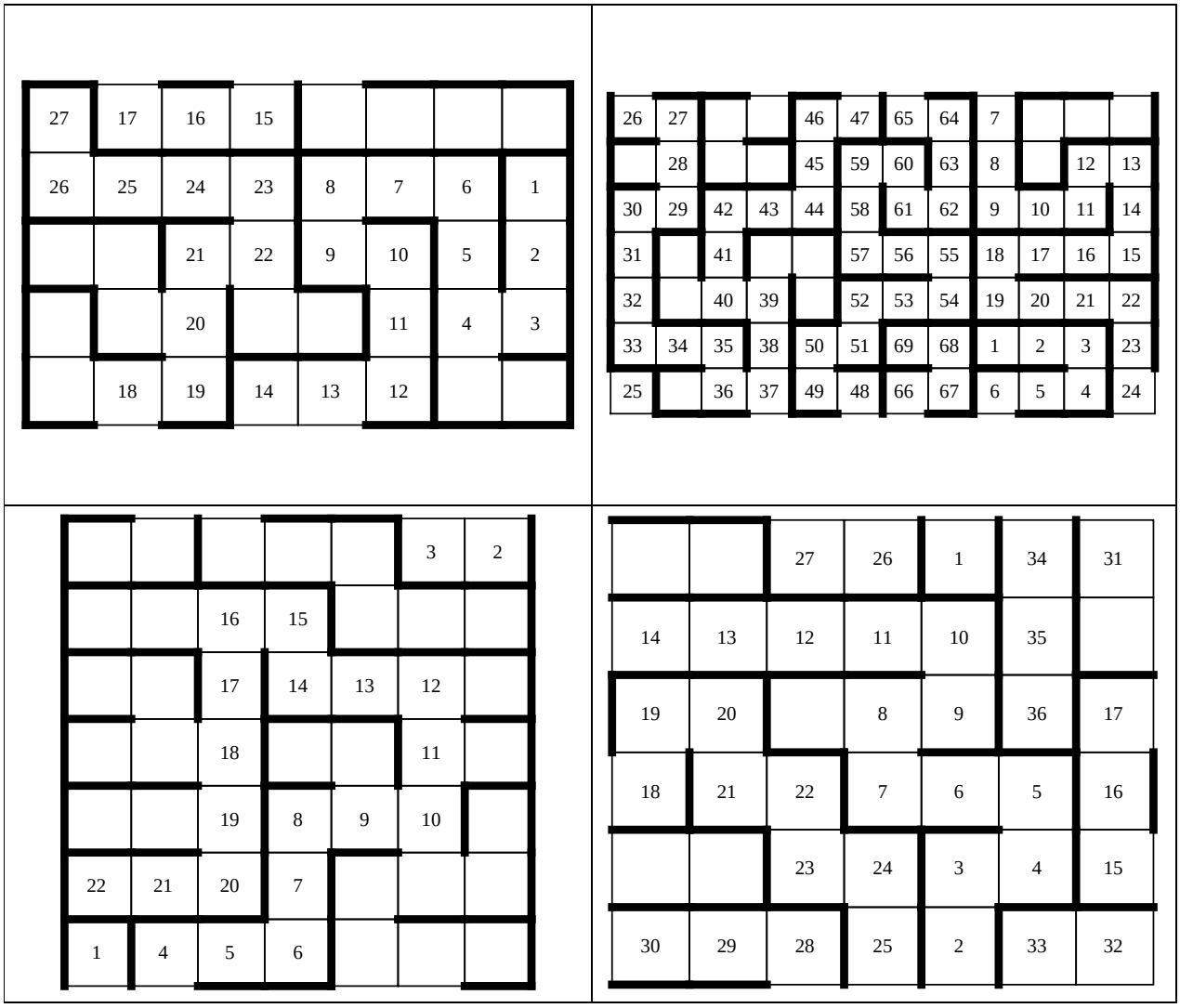
Labirint v kvadru



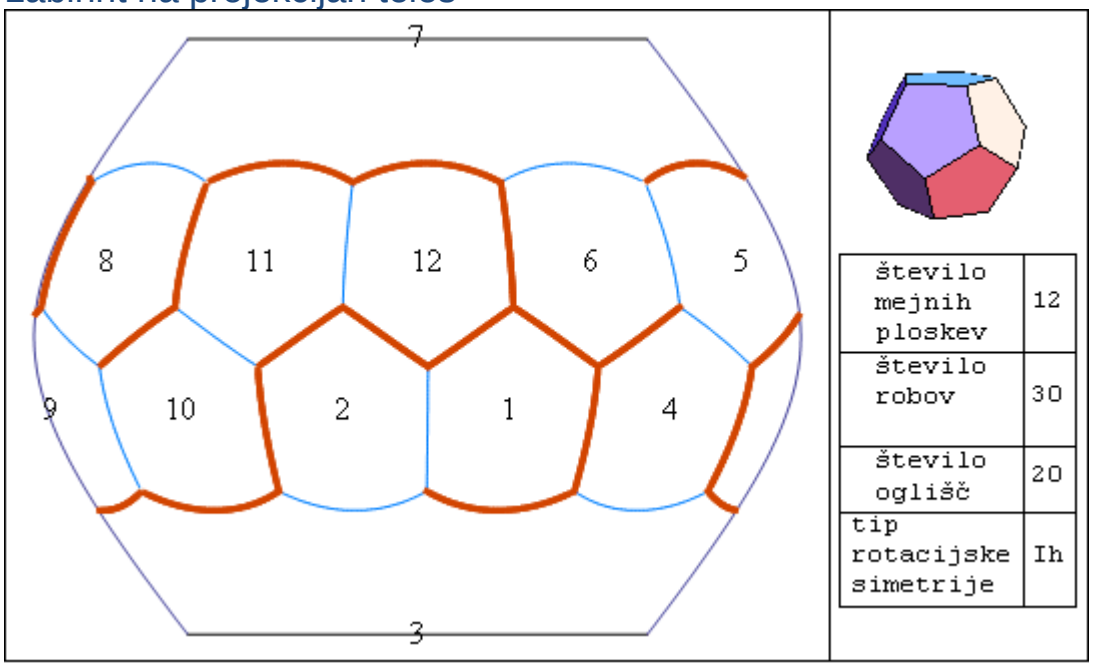
Labirint na Riemannovi ploskvi



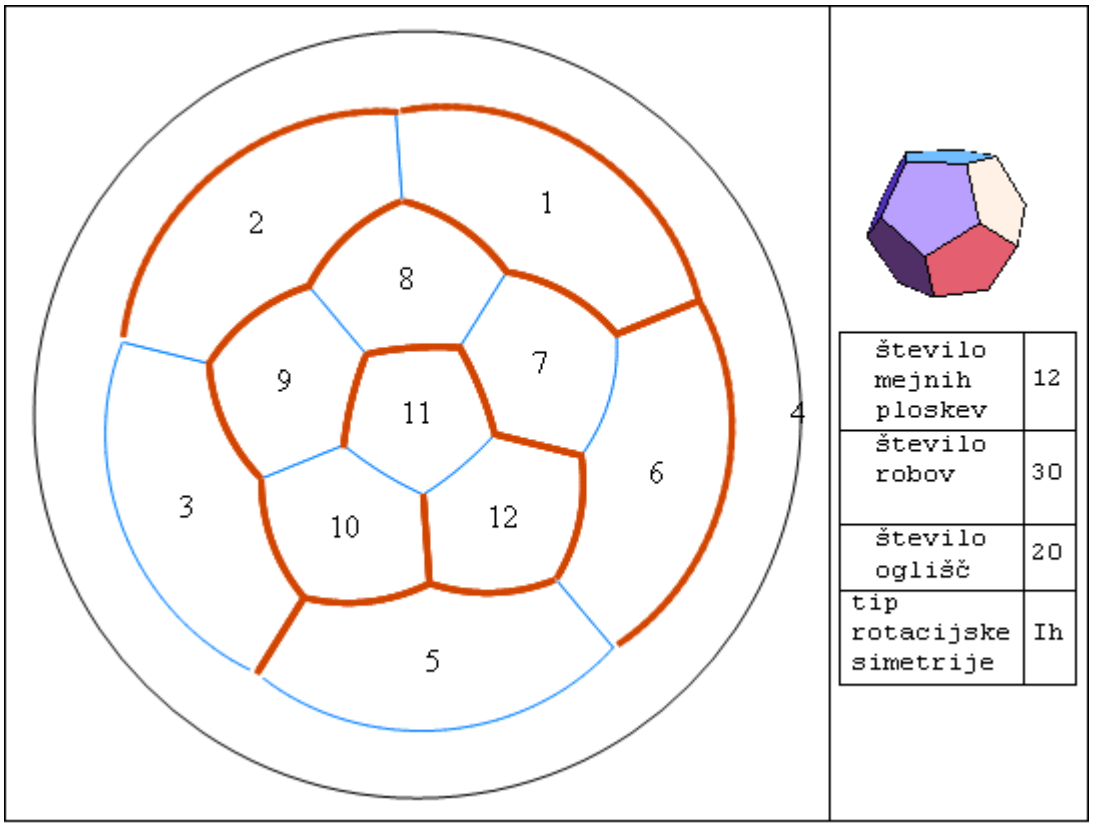
Labirint na ploskvah



Labirint na projekcijah teles



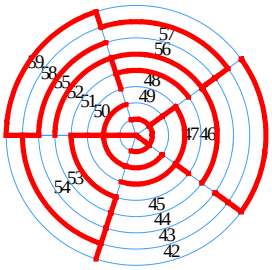
število mejnih ploskev	12
število robov	30
število oglišč	20
tip rotacijske simetrije	Ih

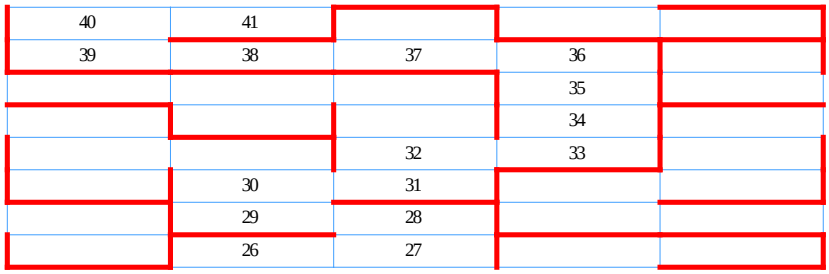


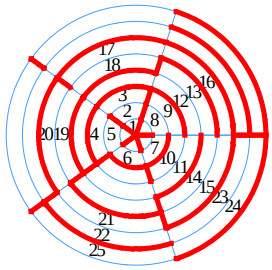
število mejnih ploskev	12
število robov	30
število oglišč	20
tip rotacijske simetrije	Ih

Labirinti na mreži valja in stožca

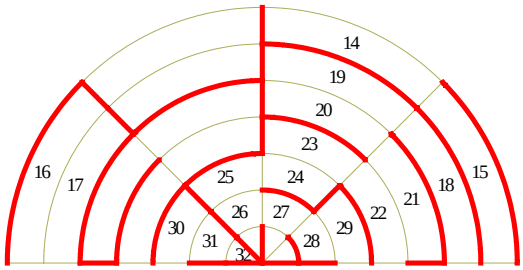
1.

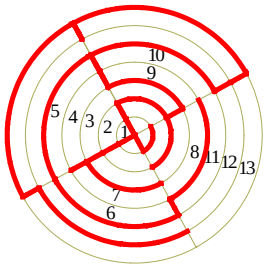




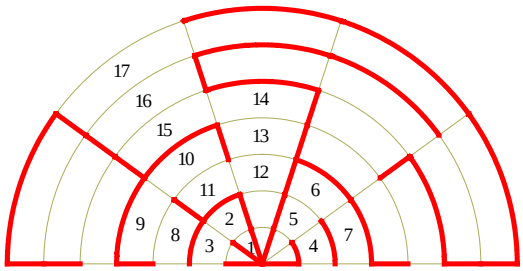


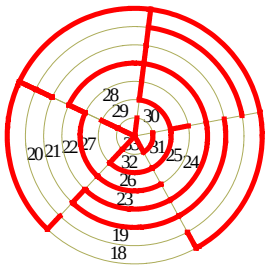
2.



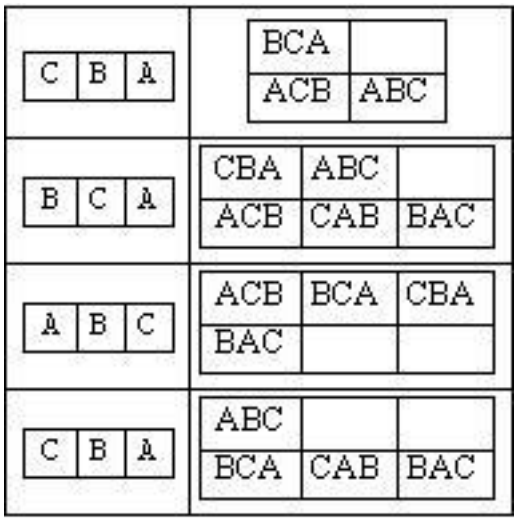


3.





Analiziraj pogoje nalog



Izdaja: Založniško podjetje **LOGIKA d.o.o., Svetčeva pot 11, 1241 Kamnik**. Poslovni račun pri NLB: 02312-0016592829. Davčna številka: SI56917309. Podjetje je zavezanec za DDV po zakonu o DDV.
Za izdajatelja*: Izidor Hafner*.
E-mail: **info@logika.si**
Spletna stran: **http://www.logika.si**.
Revija *Logika & razvedrilna matematika* je vpisana v register medijev pri Ministrstvu za kulturo pod številko 759. Strokovni pokrovitelj: *Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko - oddelek za teoretično računalništvo*.

Glavni in odgovorni urednik: *dr. Izidor Hafner* (**http://mat03.fe.uni-lj.si/html/people/izidor/homepage/**)
Člana časopisnega sveta: *prof. dr. Tomaž Pisanski in Darjo Felda, prof.*
Recenzent: *Vilko Domajnko, prof.*
Sodelavci: *mag. Urša Demšar, dr. Gregor Dolinar, Monika Kavalir, dr. Meta Lah, Boštjan Kuzman,Teja Oblak, Hiacinta Pintar, Maja Pohar, mag. Katka Šenk in dr. Aleš Vavpetič*.
Oblikovanje: *Ana Hafner*
Jezikovni pregled: *Besana*

Za objavljene prispevke ne plačujemo honorarjev.

© 2018 LOGIKA d.o.o.
ISSN 2350-532X
LOGIKA & RAZVEDRILNA MATEMATIKA, letnik XXVIII, št. 2 od 4, 2018/2019
Elektronska izdaja. Cena revije: 0 €.