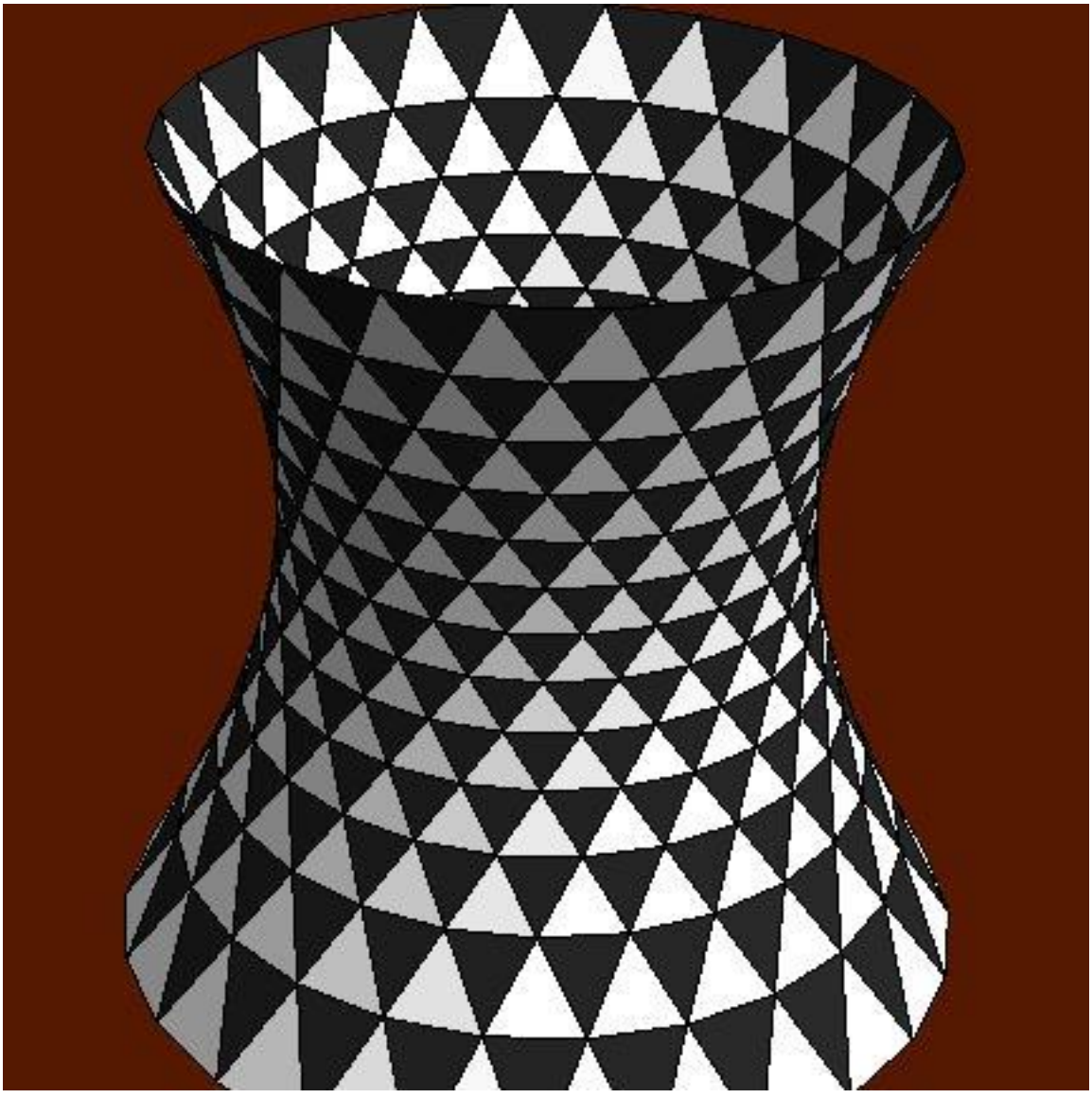
Spoštovani,

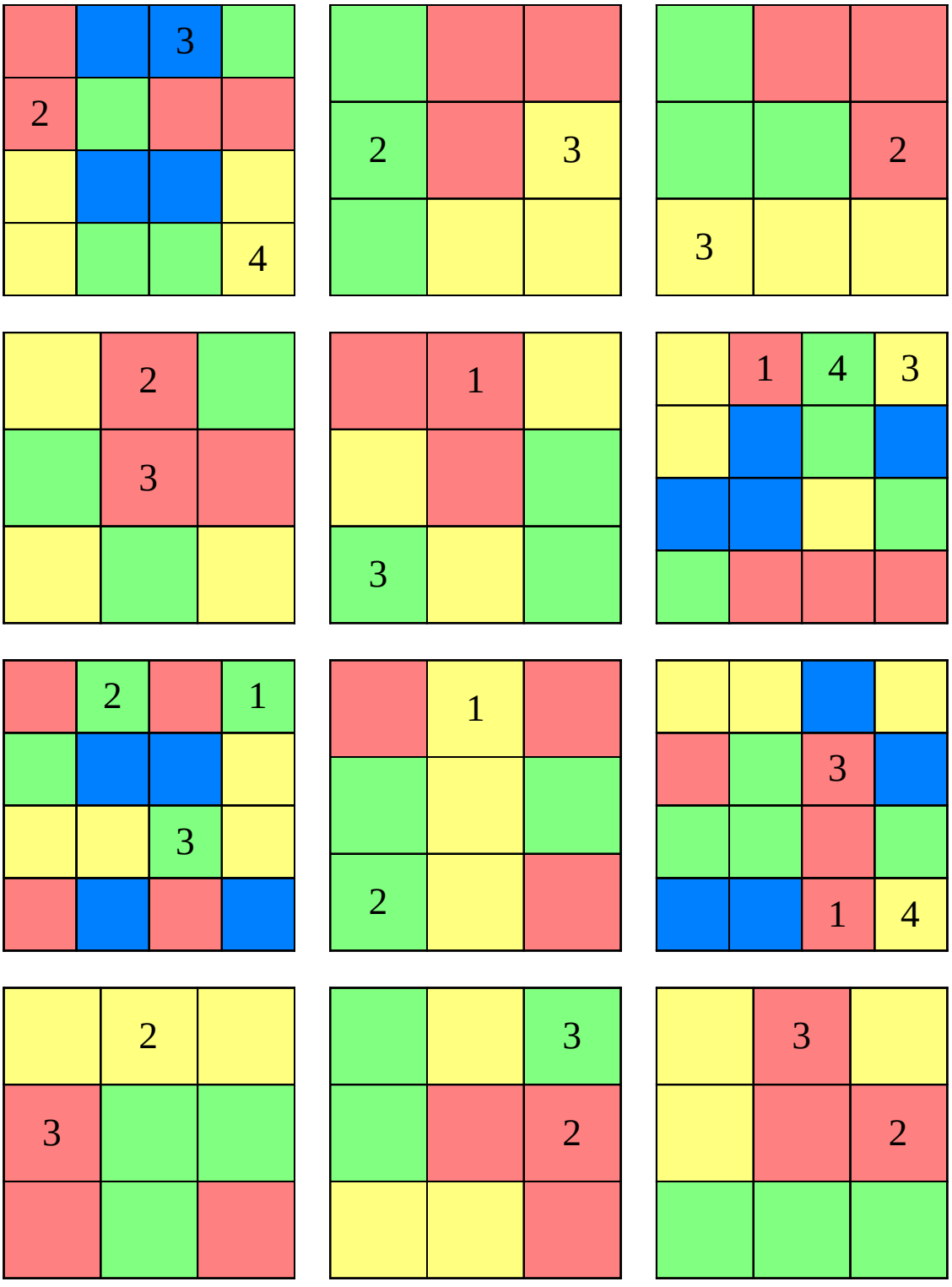
Pred vami je četrta številka 27. letnika revije Logika in razvedrilna matematika. Bolj kot na vsebino te številke, ki se ne razlikuje veliko od vsebin številk zadnjih nekaj let, bi vas radi opozorili na starejše številke revije, ki so zdaj dostopne na spletu, bodisi v celoti, bodisi le delno. Do teh številk pridete prek povezave: http://www.logika.si/revija/vsebine.htm
Na spletni strani http://www.logika.si/ smo pripravili štiri sklope nalog, ki bodo lahko služile za pripravo na tekmovanje iz logike (https://www.zotks.si/), iz razvedrilne matematike (https://www.dmfa.si/), na tekmovanje Matemček in na tekmovanje za priznanje logične pošasti (http://www.mathema.si/).
Še bolj so te naloge koristne za vsakdanje urjenje možganov, ki tako kot telo potrebujejo nekaj vsakdanje telovadbe, potrebujejo kakšno logično nalogo za jutranji zagon naših misli.
Na spletni strani logika.si boste našli še vrsto člankov iz preteklih številk revije, ki dajejo nekaj teoretičnih izhodišč in definicij, povezanih z logiko, ter več zbirk tipičnih logičnih nalog.
Naredili smo tudi prve korake sklopa *računanje*, kjer bomo objavljali naloge za utrjevanje osnovnih vsebin matematike v osnovni in srednji šoli.



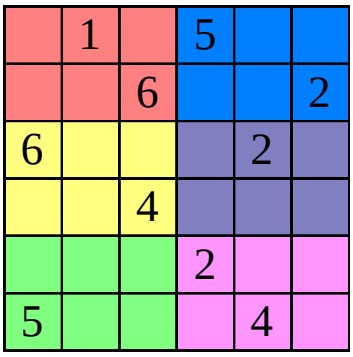
Barvni sudoku

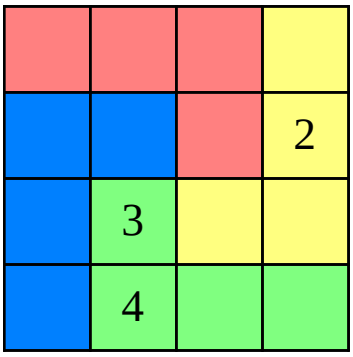
V n × n kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do n tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve nastopalo vseh n števil.

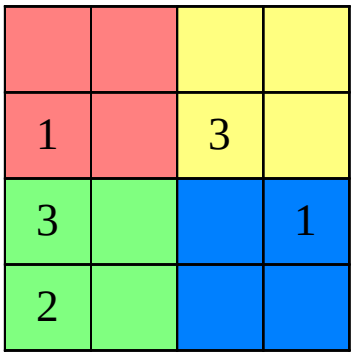
1.

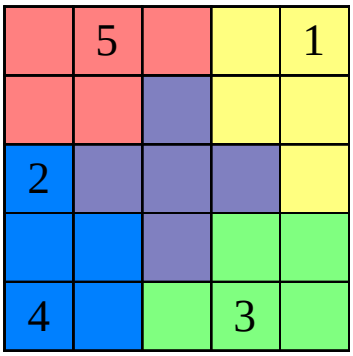


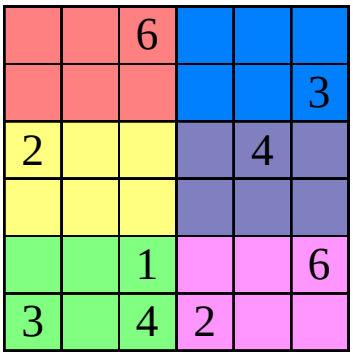
2.

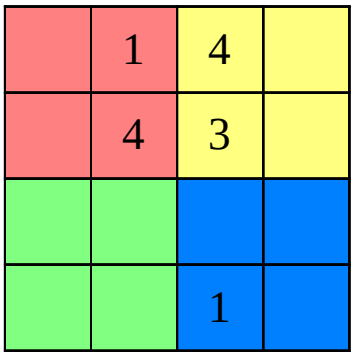

1 5
6 2
6 2
4
2
5 4

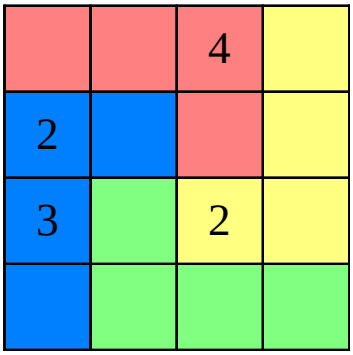

2
3
4

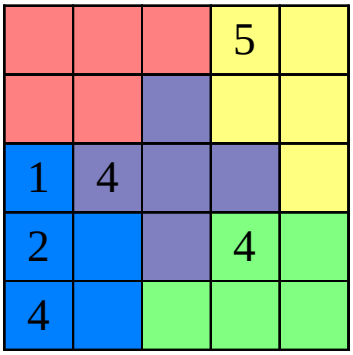

1 3
3 1
2

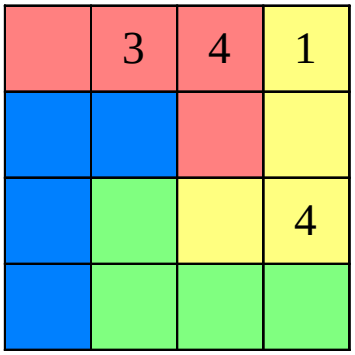

5 1
2
4 3

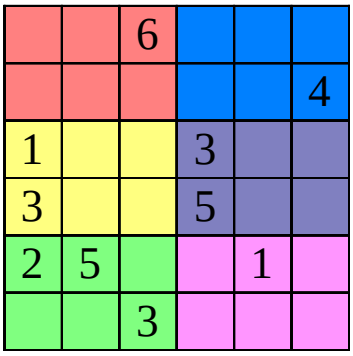

6
3
2 4
1 6
3 4 2

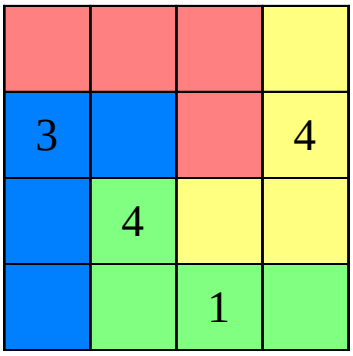

1 4
4 3
1

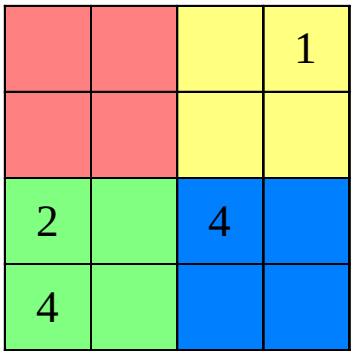

4
2
3 2


5
1 4
2 4
4


3 4 1
4


6
4
1 3
3 5
2 5 1
3


3 4
4
1


1
2 4
4

Latinski kvadrati

V n × n kvadratkov moraš vpisati začetne številke 1, 2, 3, … tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu nastopalo vseh n številk.

4	1		
3	4	1	
1			

2		1	
		4	1
	4	2	

	3	5		
				2
			3	
2	5			
4				

1	3			
			1	2
5		1		
3				4

		2	
3	1		
1			

		2	3
	4		
			2

			2	4
2		3	1	
		5		
5				3

		3		1
3				
		4		
1			5	
			2	3

	4		
2			1
1			

2				3
		5		2
	1	3		5
	3			1

3			
1		2	
	4		
	2	3	

		1	
1			4
	2	4	

Sudoku s črkami

V n × n kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do n tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih z isto črko nastopalo vseh n števil.

B	B	B	D 2
D	C 2	A	A
B	D	A	D
C 3	C	A	C 1

B	C	C	B
C	D	A	D 2
A	D 3	C	B
D	B	A	A 1

D	D	B 4	C
A	C	B	A
D 2	D	C	A
B 3	A	B	C

B	D 1	D 2	D
C	A	A	A
B	B	D 4	B
C	A	C	C

C	B	B	B
D	D	C	A 3
C	A	B	A
D	C 2	D	A 1

C	A 3	A	A
D	B 2	C	B
C 1	C	A	B
D	D	B	D

B	D	A	D
A	C	C	D
C 2	B	D	A
B 3	B	C 4	A

C	D	D	B
A 4	D	A	C
A 1	C	C	D
A 2	B	B	B

D	D	B	D 4
B	A	A 1	A
C 3	A	C	C
B	D	C	B

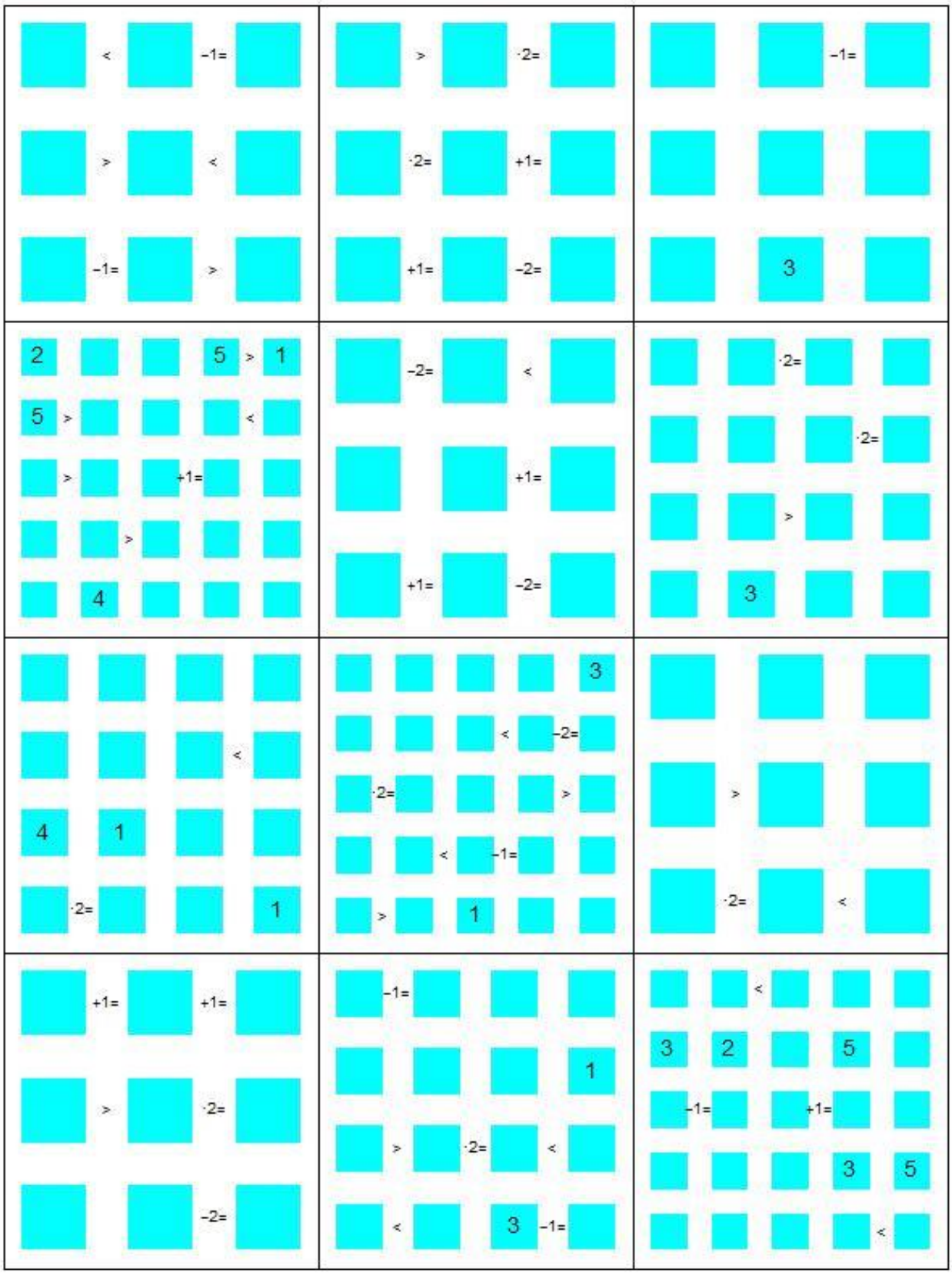
A	D 3	C 2	A
C	A	B	D
C	C	D	B
D	B 1	B	A

C	C	C	D
B 1	C	D	B
D 2	A	B	A
A 3	D	A	B

C	D 2	A 3	C
A 1	B	B	A
D	B	B 4	A
C	D	D	C

Futoshiki

V n × n kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do n tako, da bo v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu nastopalo vseh n števil ter da bodo izpolnjene vse relacije.



Lastnosti lika

Ugotoviti moramo lastnosti lika. Lik ima obliko (trikotnik, kvadrat, petkotnik), velikost (majhen, srednji, velik), barvo (rumen, oranžen, moder) in debelino (tanek, debel). Lahko si izberemo tudi le nekaj prvih lastnosti. Danih je nekaj stavkov v simbolni obliki in njihova resničnostna vrednost (R za resničen in N za neresničen). Stavki so lahko enostavni, na primer, "Rumen" pomeni, da je lik rumen, ali sestavljeni, na primer, "Velik $\wedge$ Moder" pomeni, da je lik velik in moder; "Petkotnik $\vee$ Tanek", pomeni, da je lik petkotnik ali tanek;
"Debel $\veebar$ Oranžen" pomeni, da je lik ali debel ali oranžen; "Tanek $\Rightarrow$ Rumen" pomeni: če je lik tanek, potem je rumen; "Moder $\Leftrightarrow$ Velik" pomeni: lik je moder, če in samo če je velik).

Velik	R
Kvadrat	R
Trikotnik $\Rightarrow$ Petkotnik	R

oblika	
velikost	

Kvadrat	N
Majhen $\barwedge$ Petkotnik	N
Trikotnik $\veebar$ Velik	R
Trikotnik $\veebar$ Velik	R

oblika	
velikost	

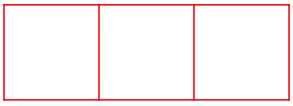
Petkotnik	N
Tanek	R
Trikotnik $\wedge$ Tanek	R
Srednji $\Leftrightarrow$ Tanek	N
Oranžen $\wedge$ Petkotnik	N
Velik $\Rightarrow$ Moder	N
Oranžen $\Leftrightarrow$ Srednji	N

oblika	
velikost	
barva	
debelina	

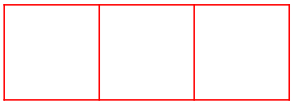
Oranžen $\Leftrightarrow$ Petkotnik	N
Oranžen $\barvee$ Srednji	N
Kvadrat $\Leftrightarrow$ Majhen	N
Kvadrat $\veebar$ Rumen	N

oblika	
velikost	
barva	

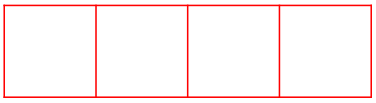
Določi razpored



A JE SOSEDA OD C.	R
A JE SOSEDA OD B.	R
B JE LEVO OD C.	R



B JE DESNO OD C.	N
A JE DESNO OD B.	N
B JE LEVO OD C.	R



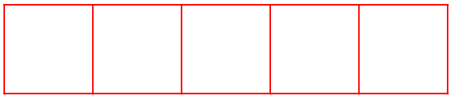
A JE SOSEDA OD D.	N
B JE SOSEDA OD D.	R
A JE LEVO OD D.	N
B JE DESNO OD C.	R



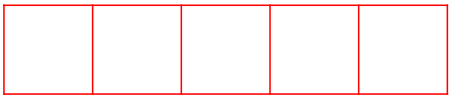
A JE SOSEDA OD D.	N
A JE DESNO OD C.	R
C JE DESNO OD D.	N
C JE SOSEDA OD D.	R



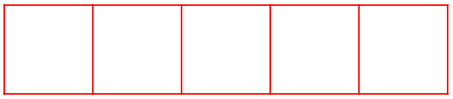
B JE SOSEDA OD E.	R
A JE LEVO OD B.	N
C JE DESNO OD E.	N
C JE LEVO OD D.	N
B JE DESNO OD E.	R



A JE DESNO OD B.	R
B JE SOSEDA OD C.	N
A JE SOSEDA OD B.	N
B JE LEVO OD C.	R
C JE DESNO OD D.	R
A JE DESNO OD D.	N



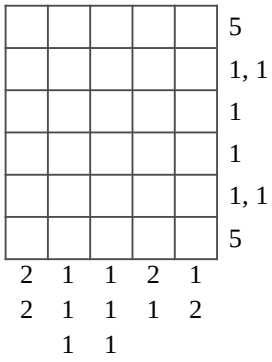
B JE DESNO OD C.	R
C JE DESNO OD D.	R
B JE LEVO OD E.	R
A JE LEVO OD D.	R
A JE SOSEDA OD B.	N

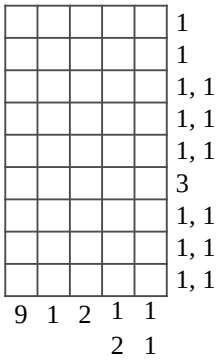


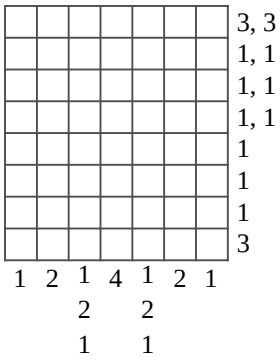
A JE DESNO OD B.	N
B JE DESNO OD C.	R
B JE LEVO OD D.	R
B JE DESNO OD D.	N
A JE LEVO OD E.	R
C JE LEVO OD E.	N

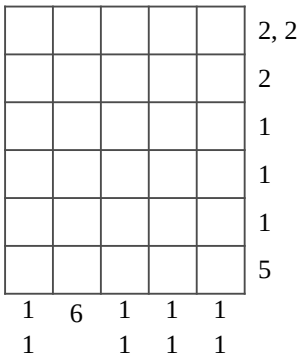
Gobelini

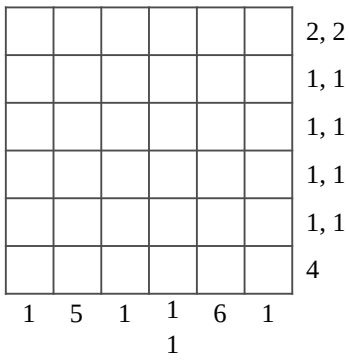
Kvadratke v razpredelnici moraš pobarvati sivo tako, da bo zaporedje sivih pasov v vrstici ustrezalo zaporedju števil na desni in da bo zaporedje sivih pasov v stolpcu ustrezalo zaporedju števil pod njim.

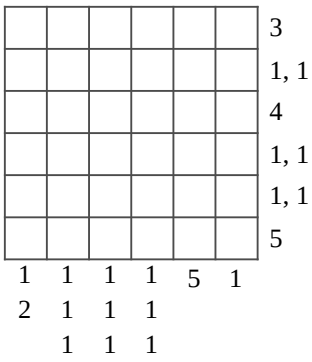


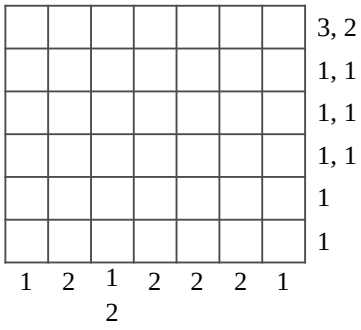


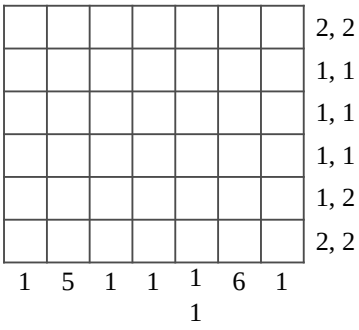


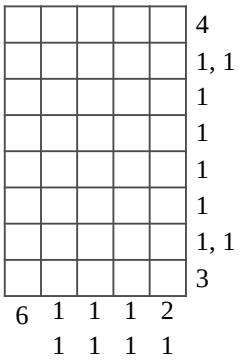


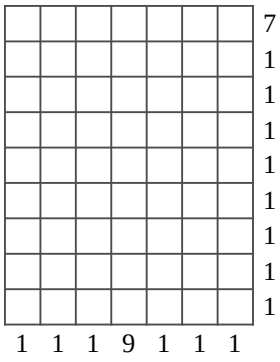


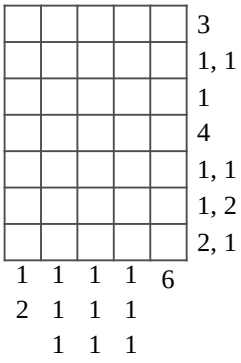


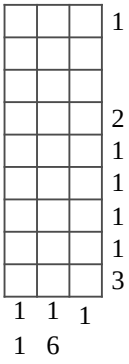






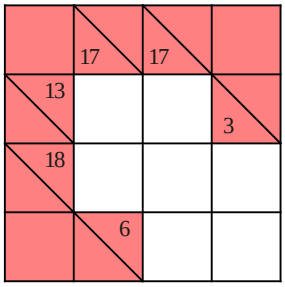


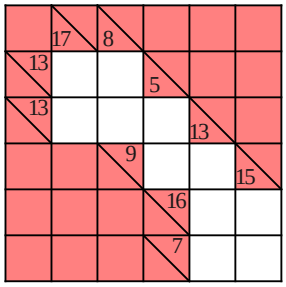


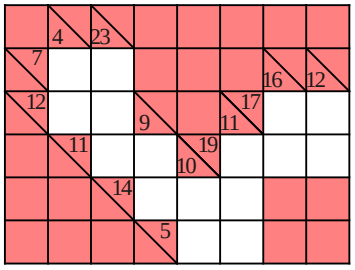


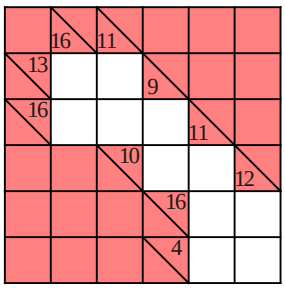
Križne vsote

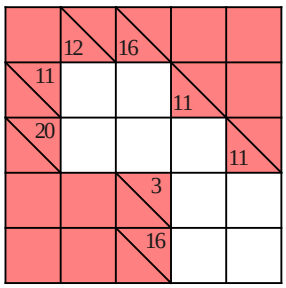
Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da je vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in stolpcih enaka številu, ki je zapisano v rdečem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem pa morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

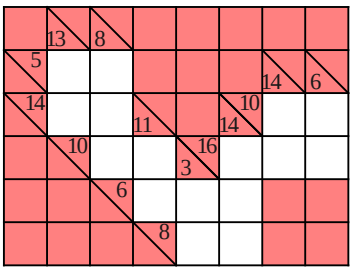


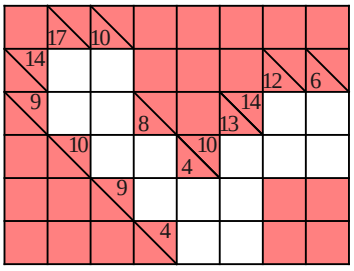


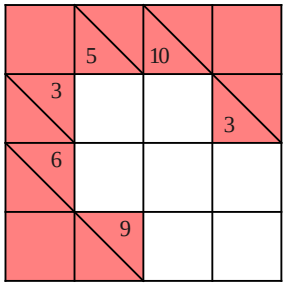


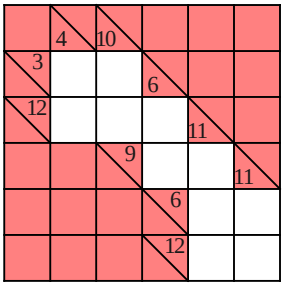


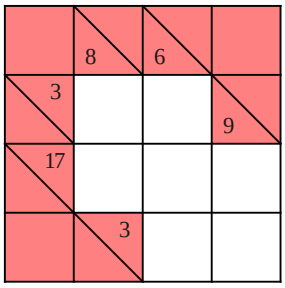


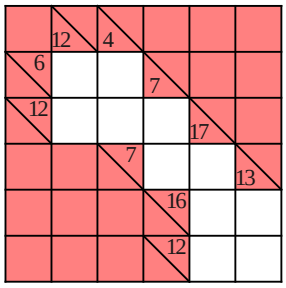


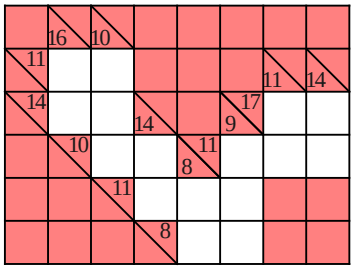






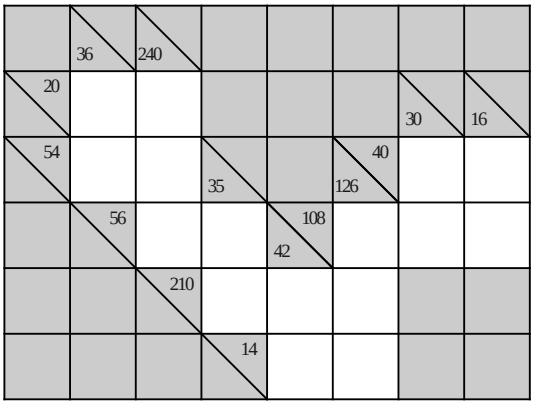


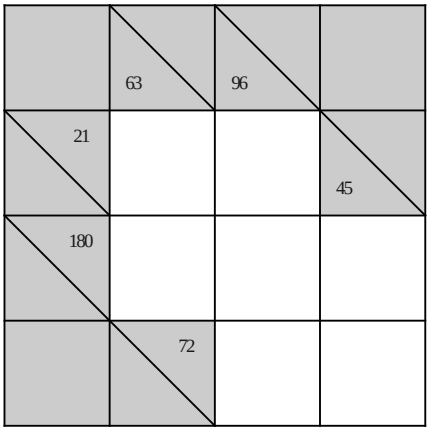


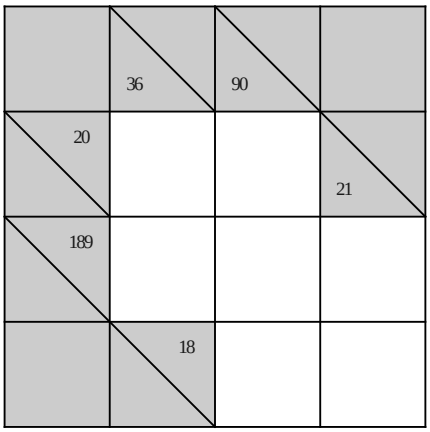


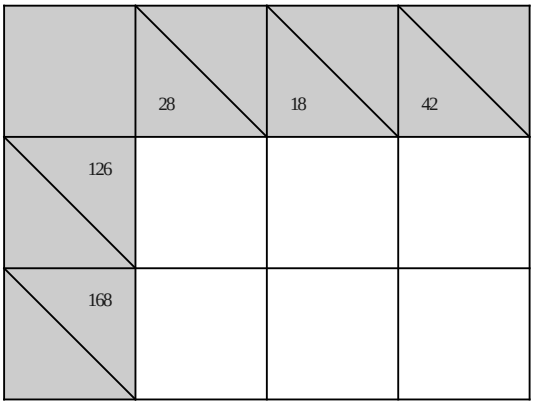
Križni produkti

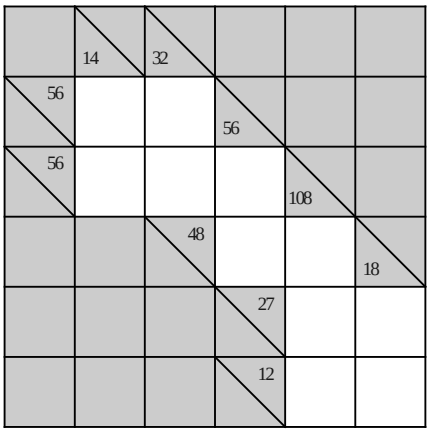
Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 2 do 9 tako, da bo zmnožek števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in stolpcih enak številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na zač□etku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem pa morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

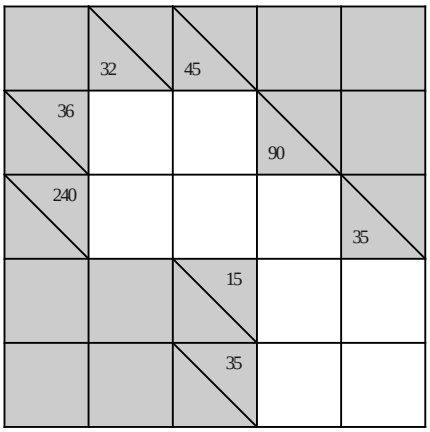






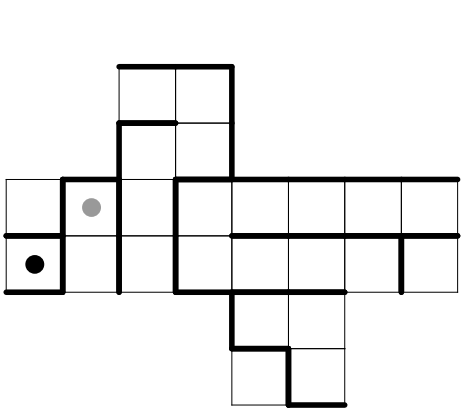


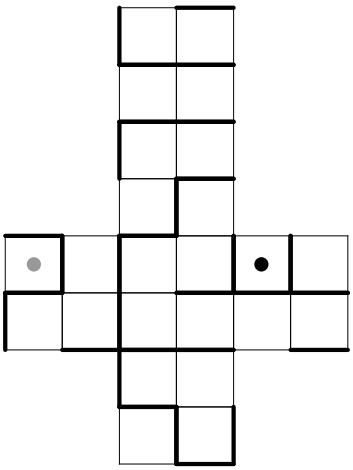


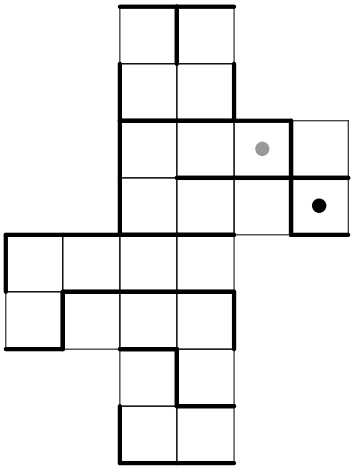


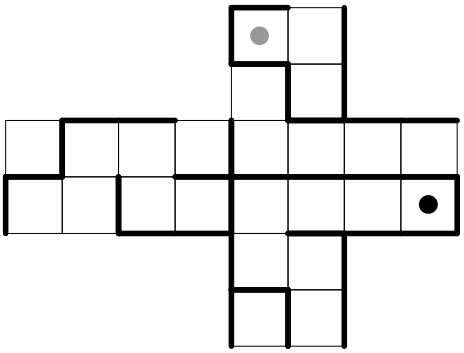
Labirint na kocki

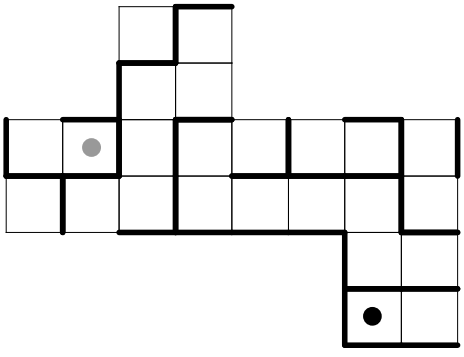
Poveži točki na kocki:

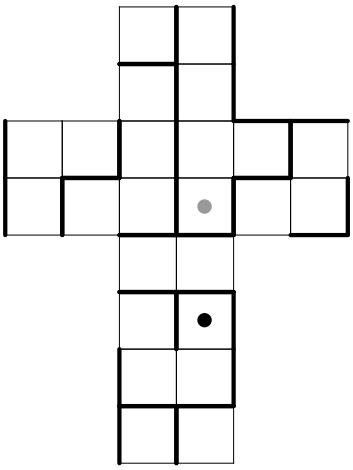






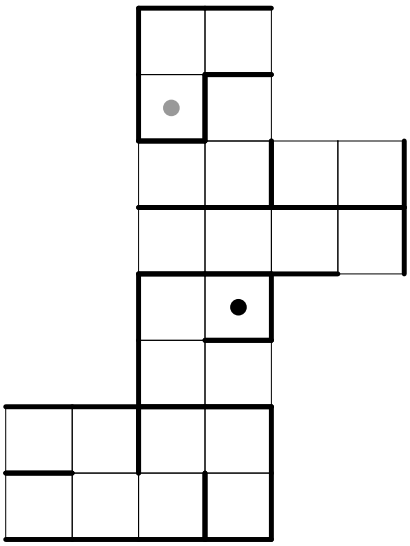


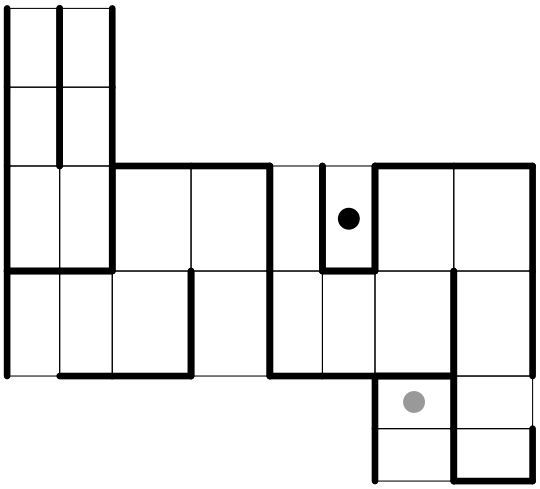


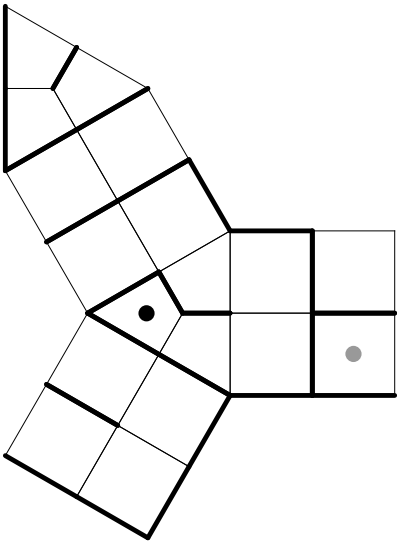


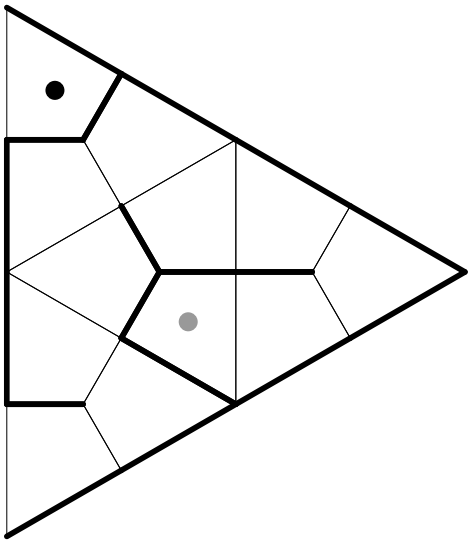
Labirinti na enostavnih poliedrih

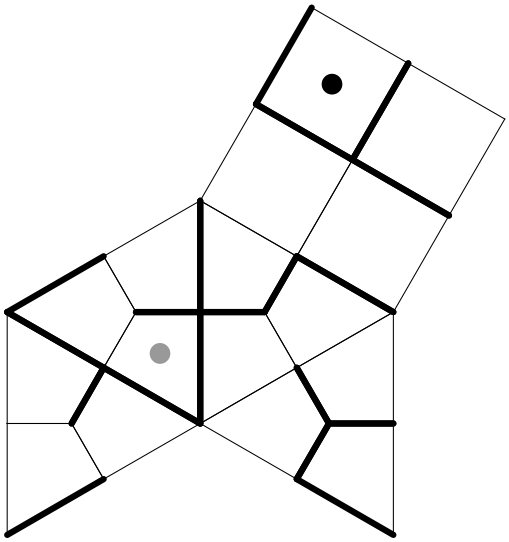
Poveži točki na poliedru:

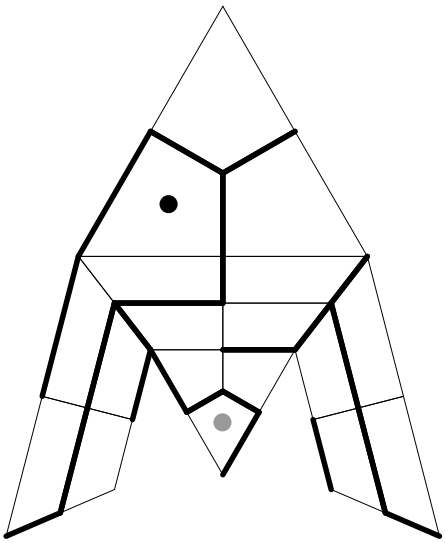




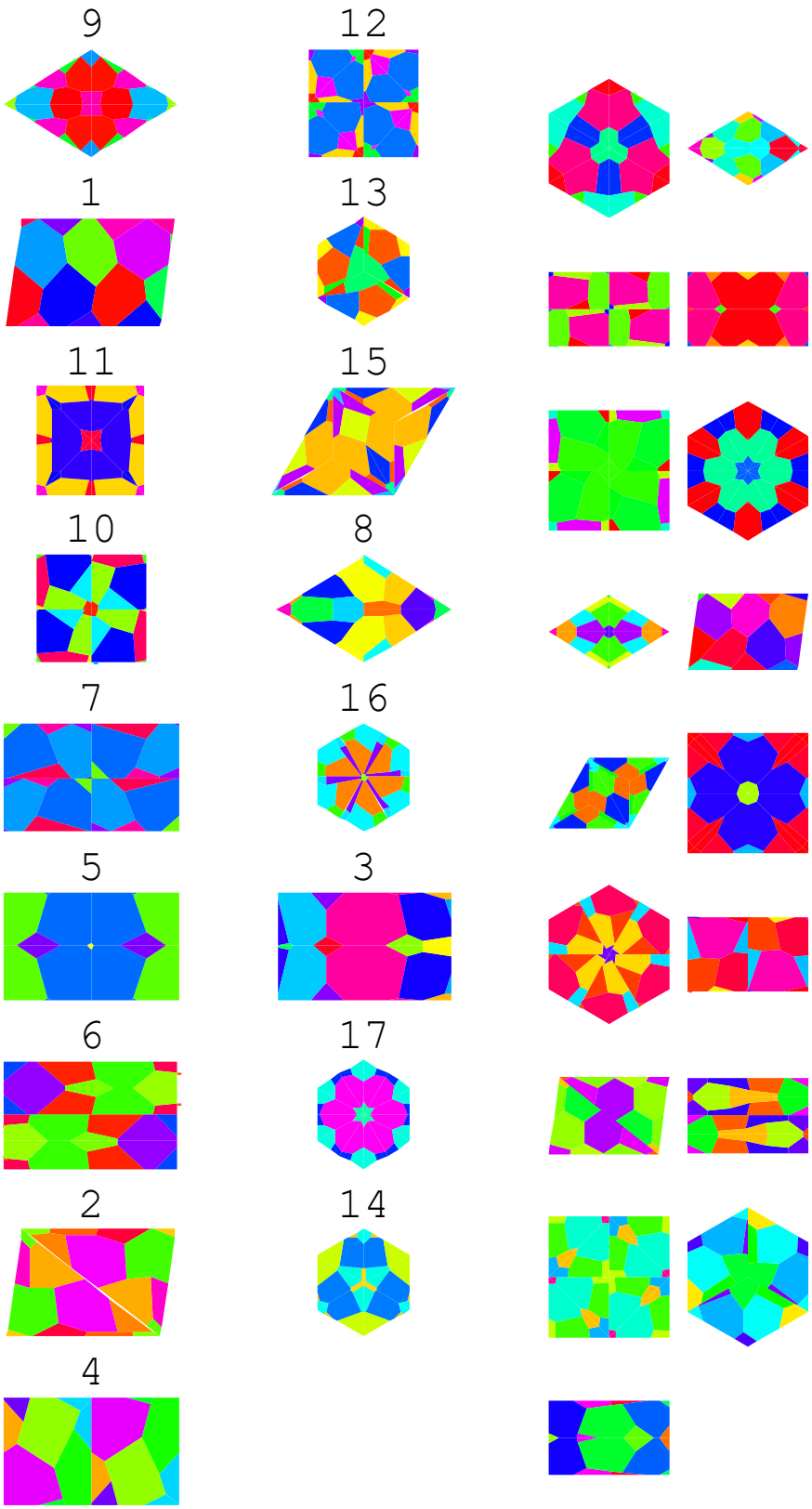






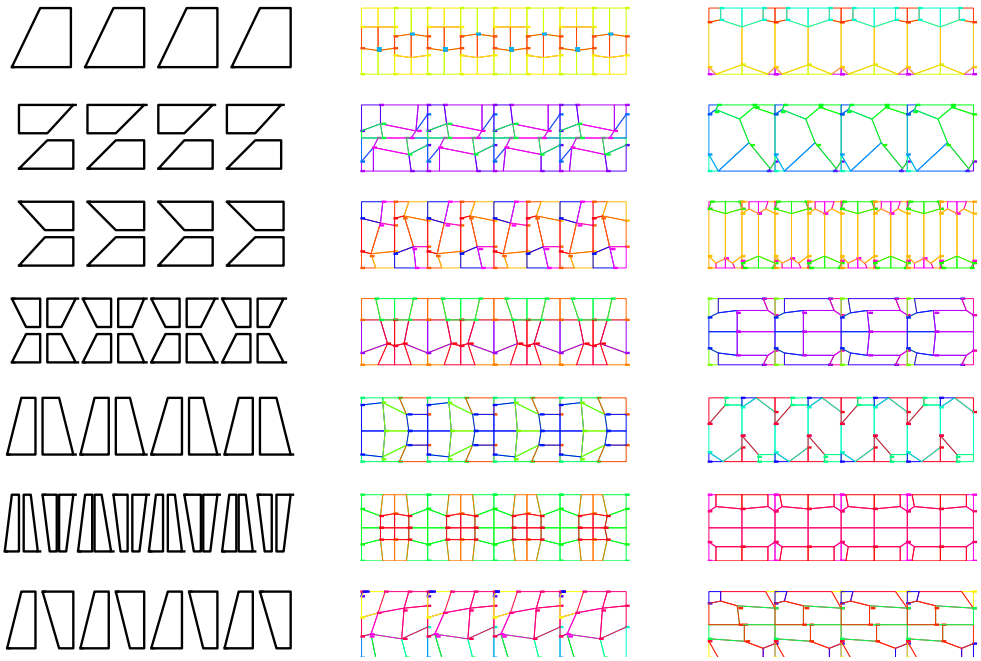


Poveži sličici, ki pripadata isti grupi

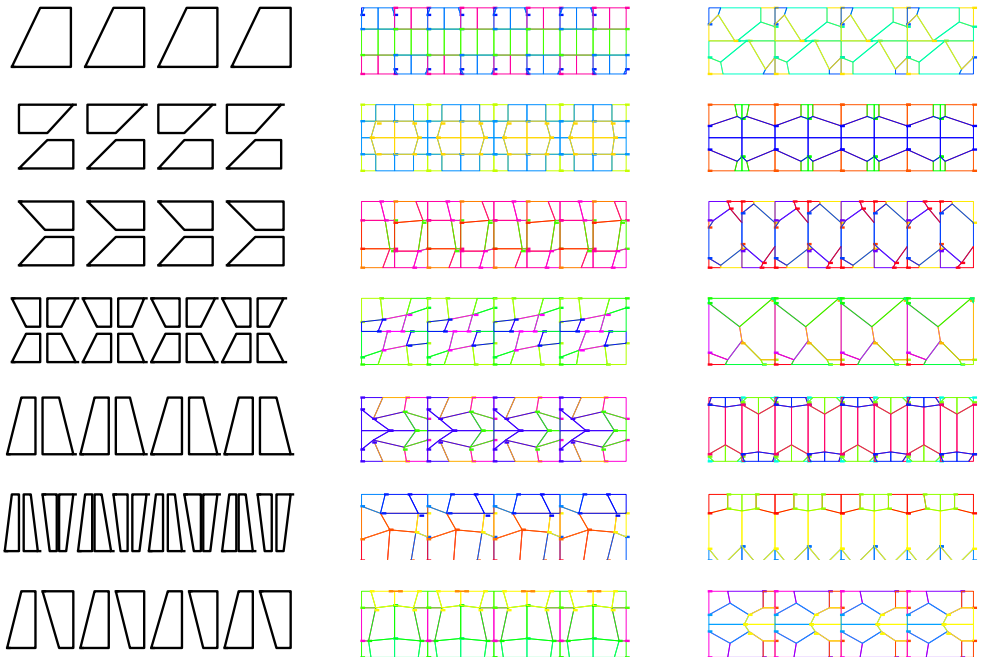


Poveži sličici, ki pripadata isti grupi

a)

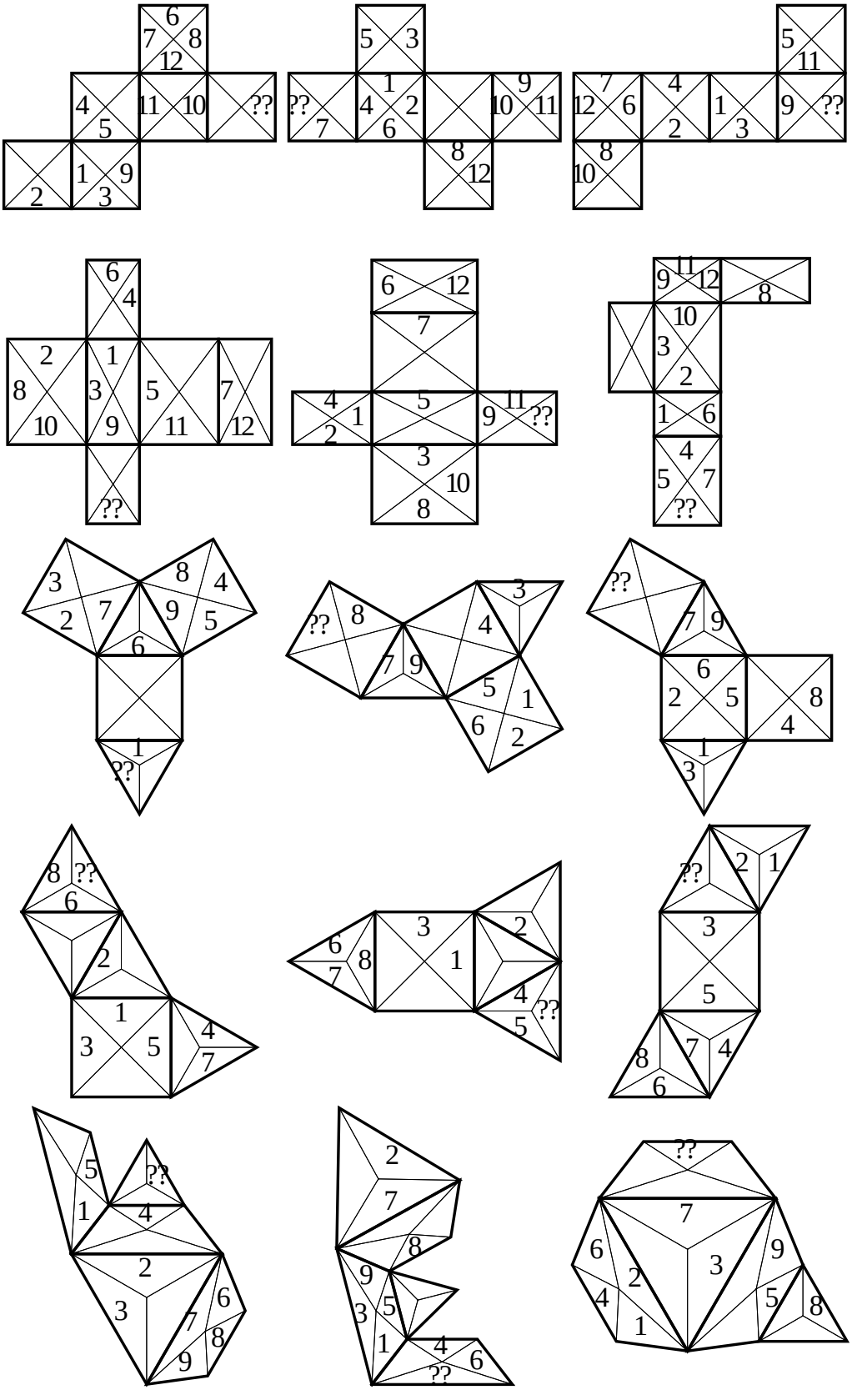


b)

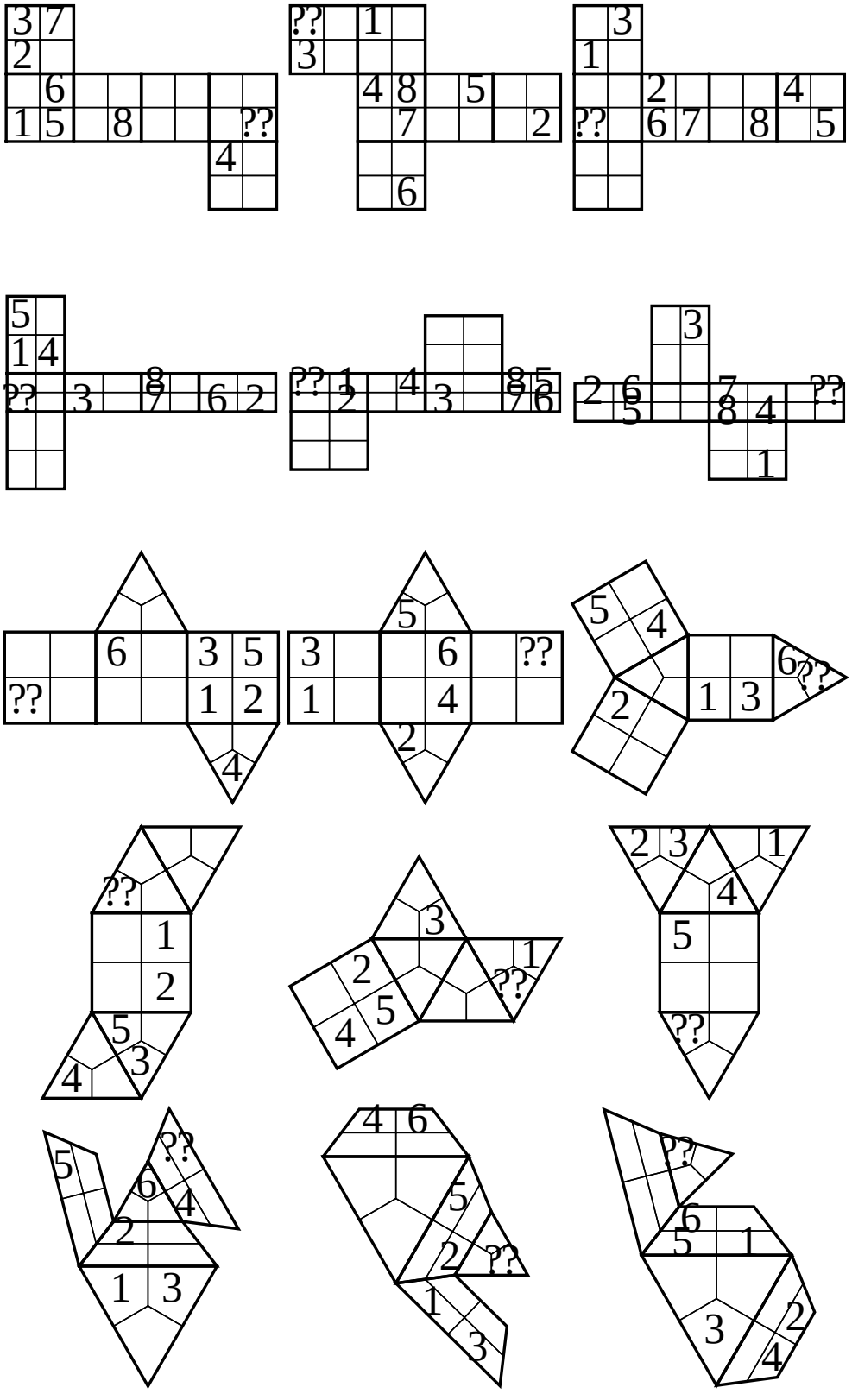


Prostorska predstavljivost

a) Katero število moramo vpisati na mesto znaka ??, da bosta stranici pripadali istemu robu poliedra?



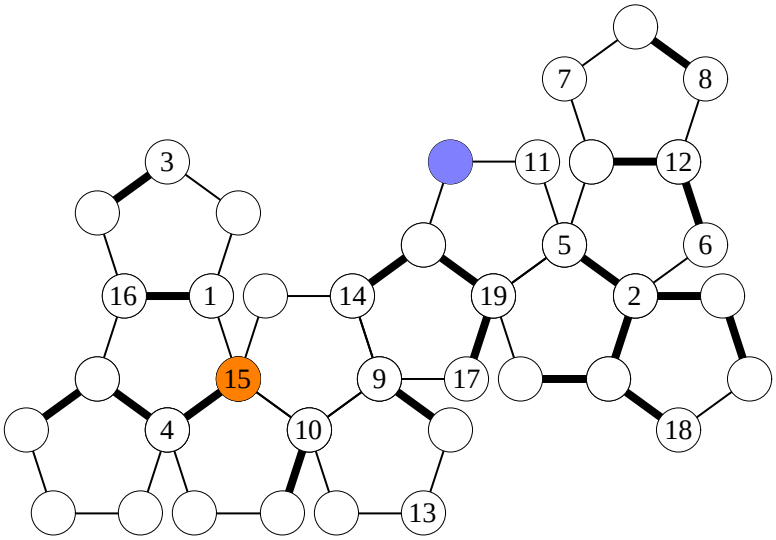
b) Katero številko moramo vpisati na mesto znaka ??, da bosta oglišči pripadali istemu oglišču poliedra?



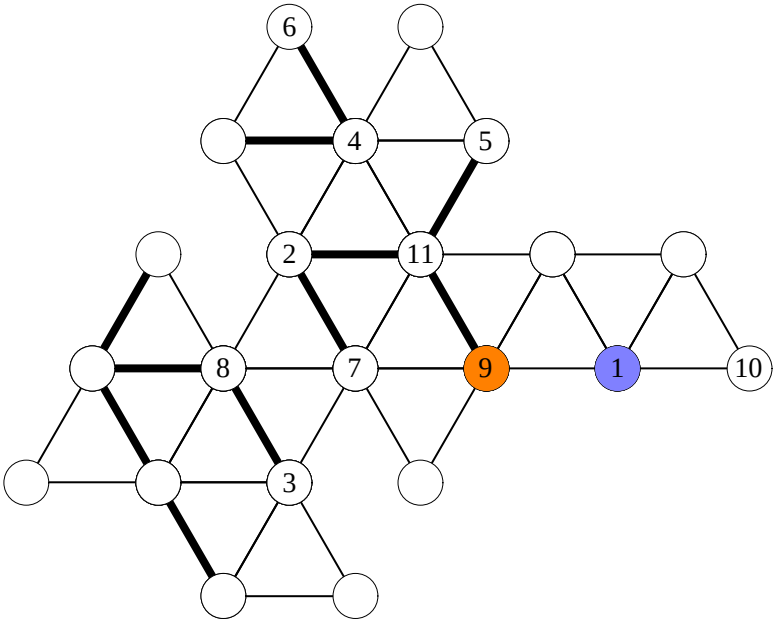
Labirinti na robovih poliedra

V naslednjih nalogah moramo povezati dve oglišči poliedra, ki je podan z mrežo. Poiskati moramo pot od oranžne do modre točke. Iz ene točke lahko gremo do druge točke, če je med njima debelejša črta ali pa točki predstavljata isto oglišče poliedra.

1.

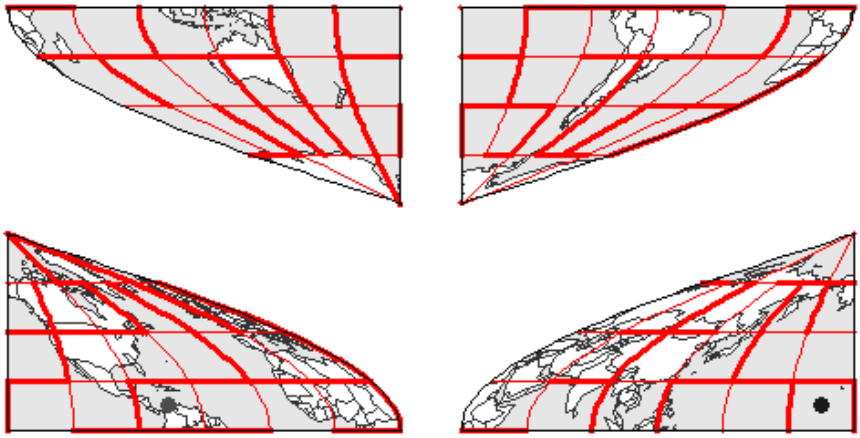


2.

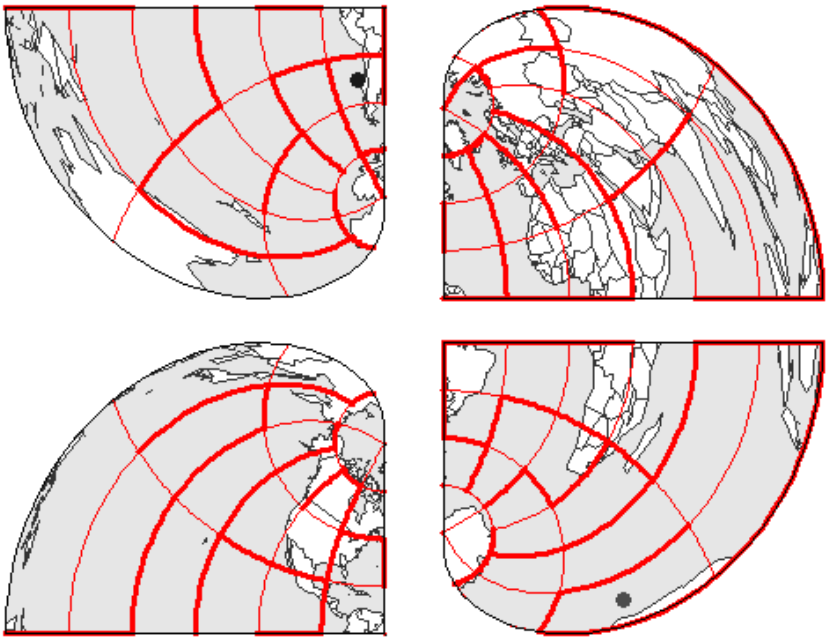


Večdelni labirinti na zemljevidu

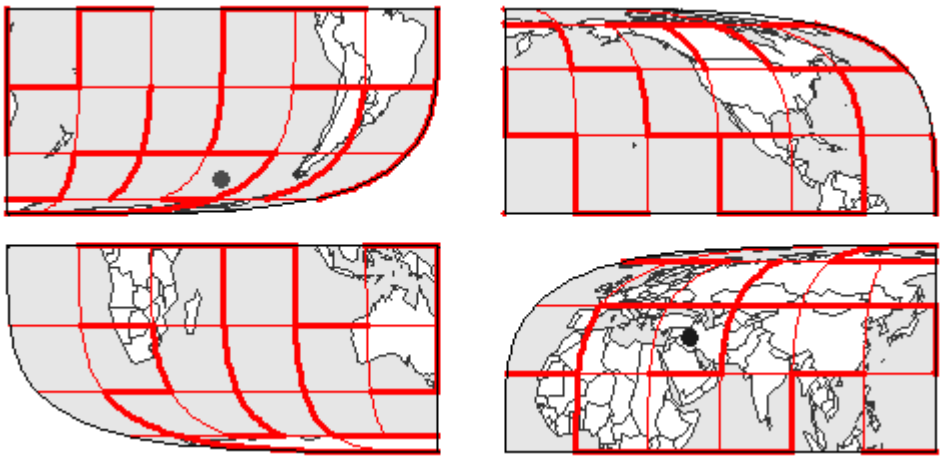
1.



2.

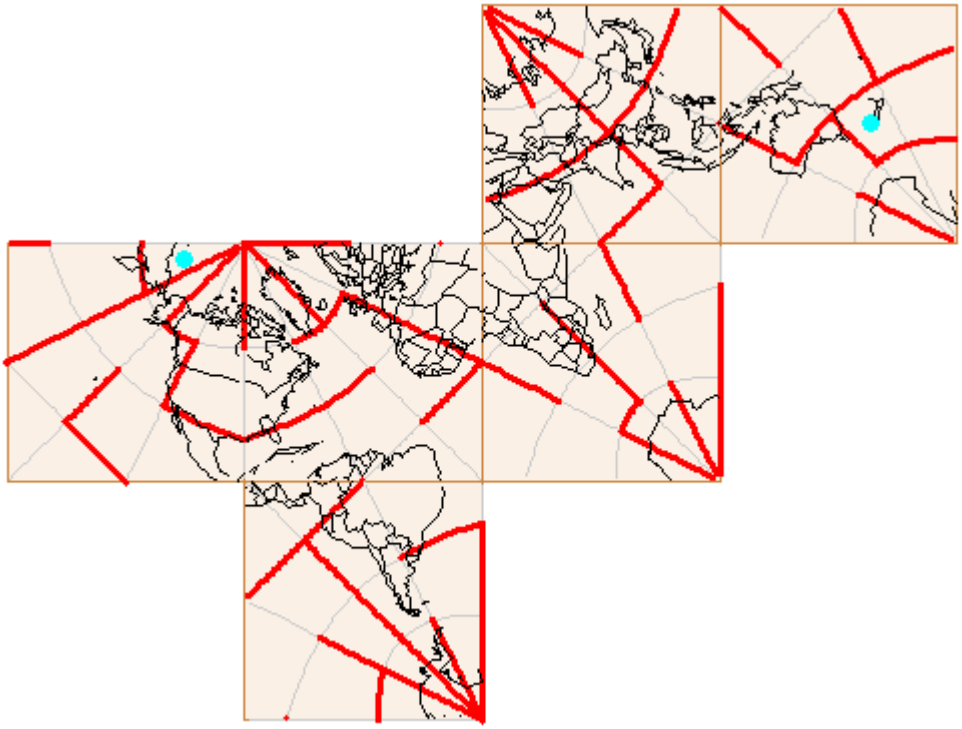


3.

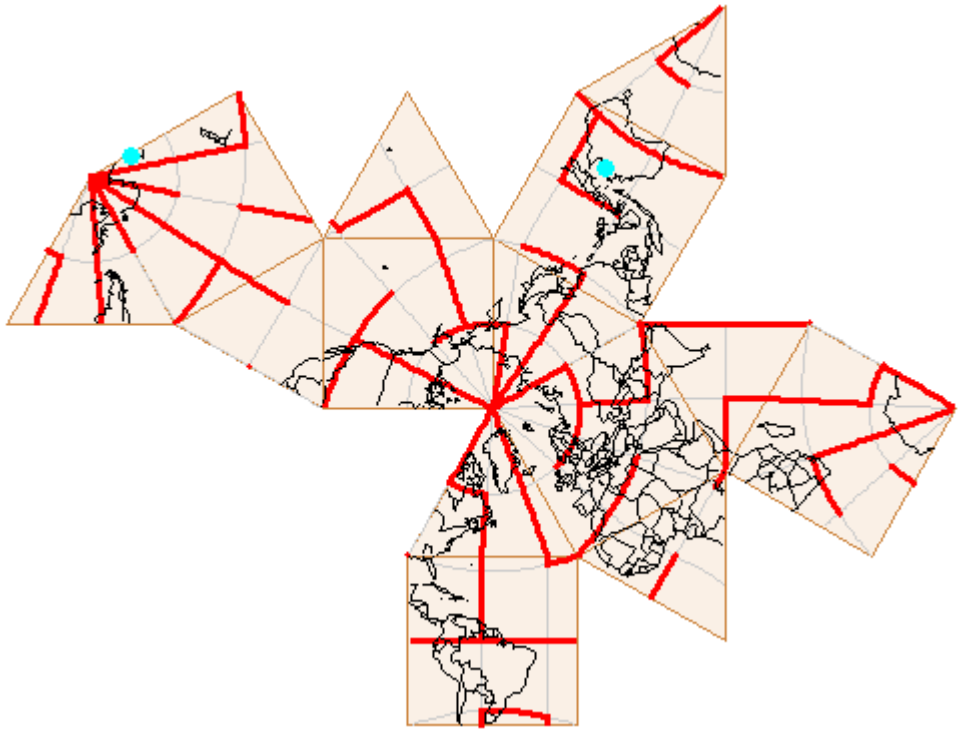


Labirinti na zemljevidu

1.

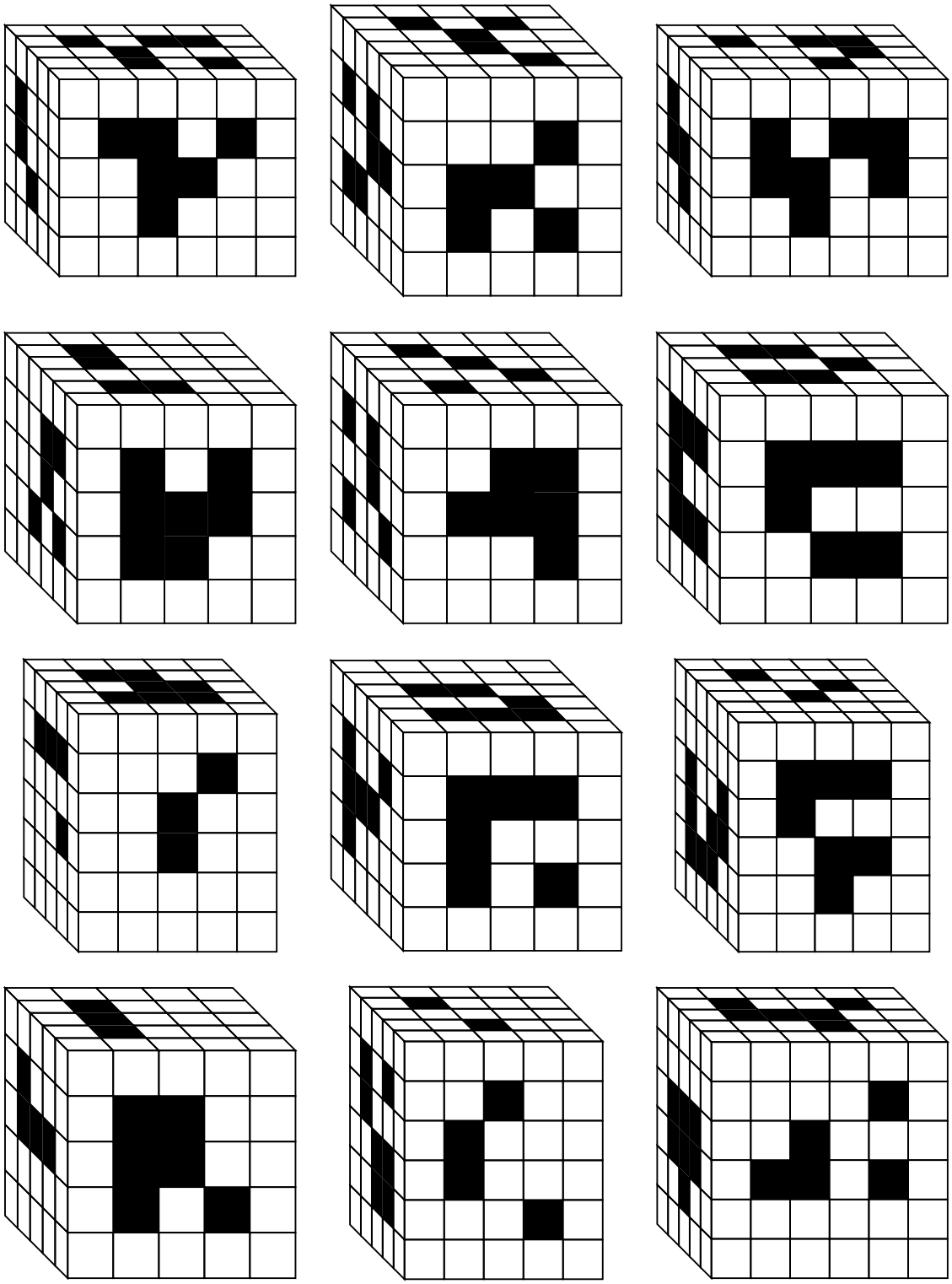


2.



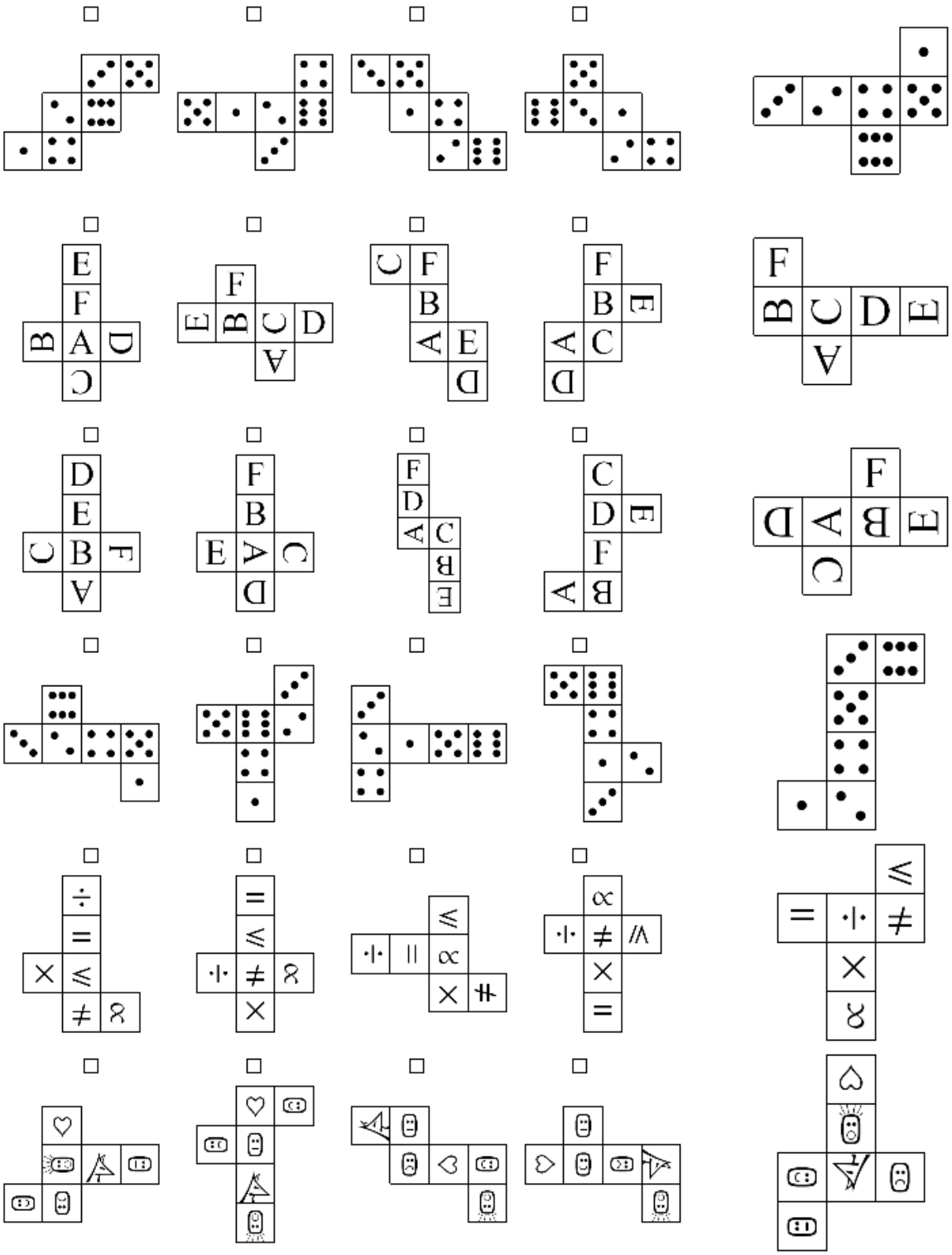
Odstranjene kocke

Dan je kvader, ki sestoji iz kockic. Odstranimo vse kocke, ki so zaznamovane črno od vrha do dna, od leve do desne in od spredaj do zadaj. Koliko kock smo odstranili?



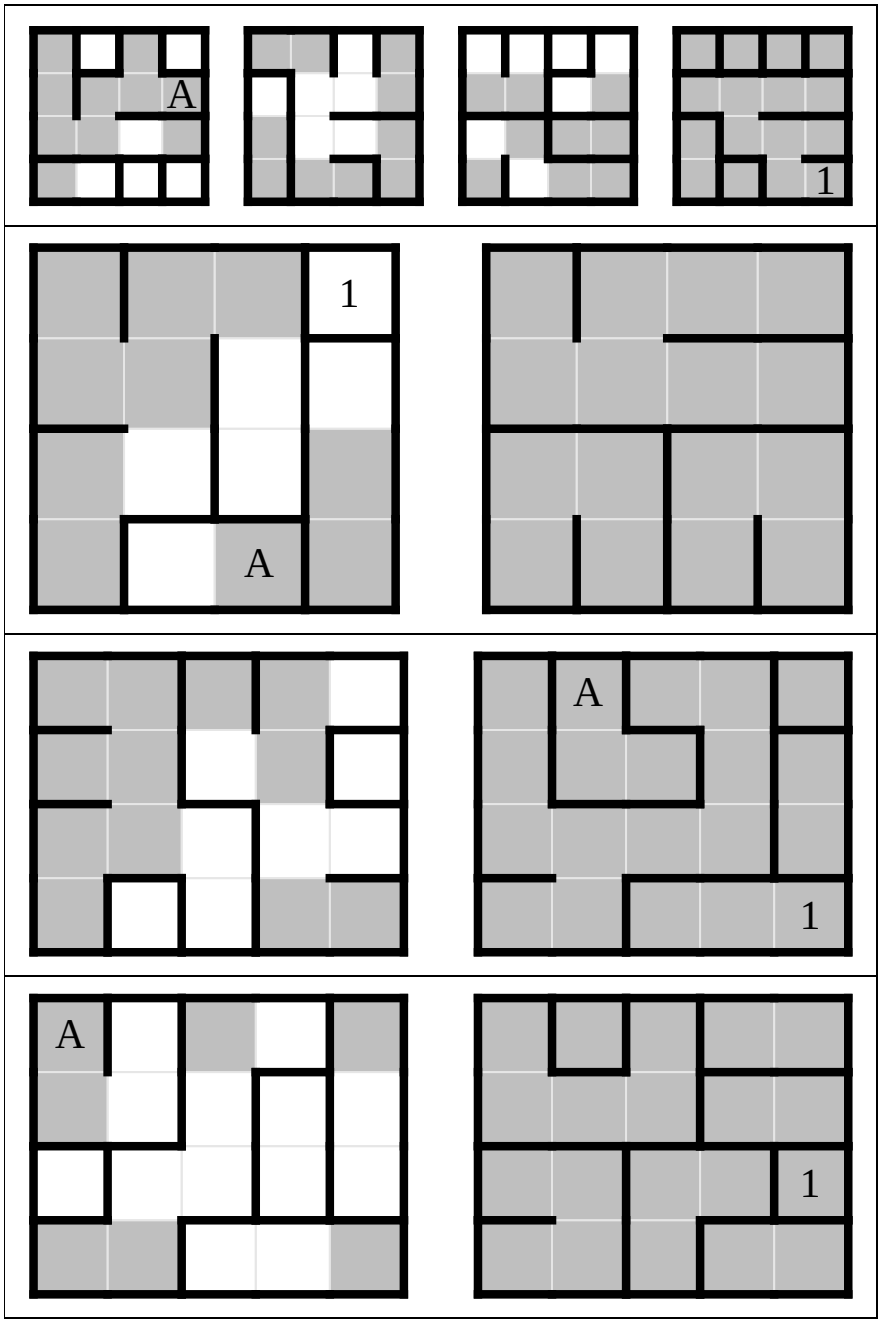
Kocki določi mrežo

Vsaki mreži na desni (večja mreža) določi mrežo iste kocke na levi.



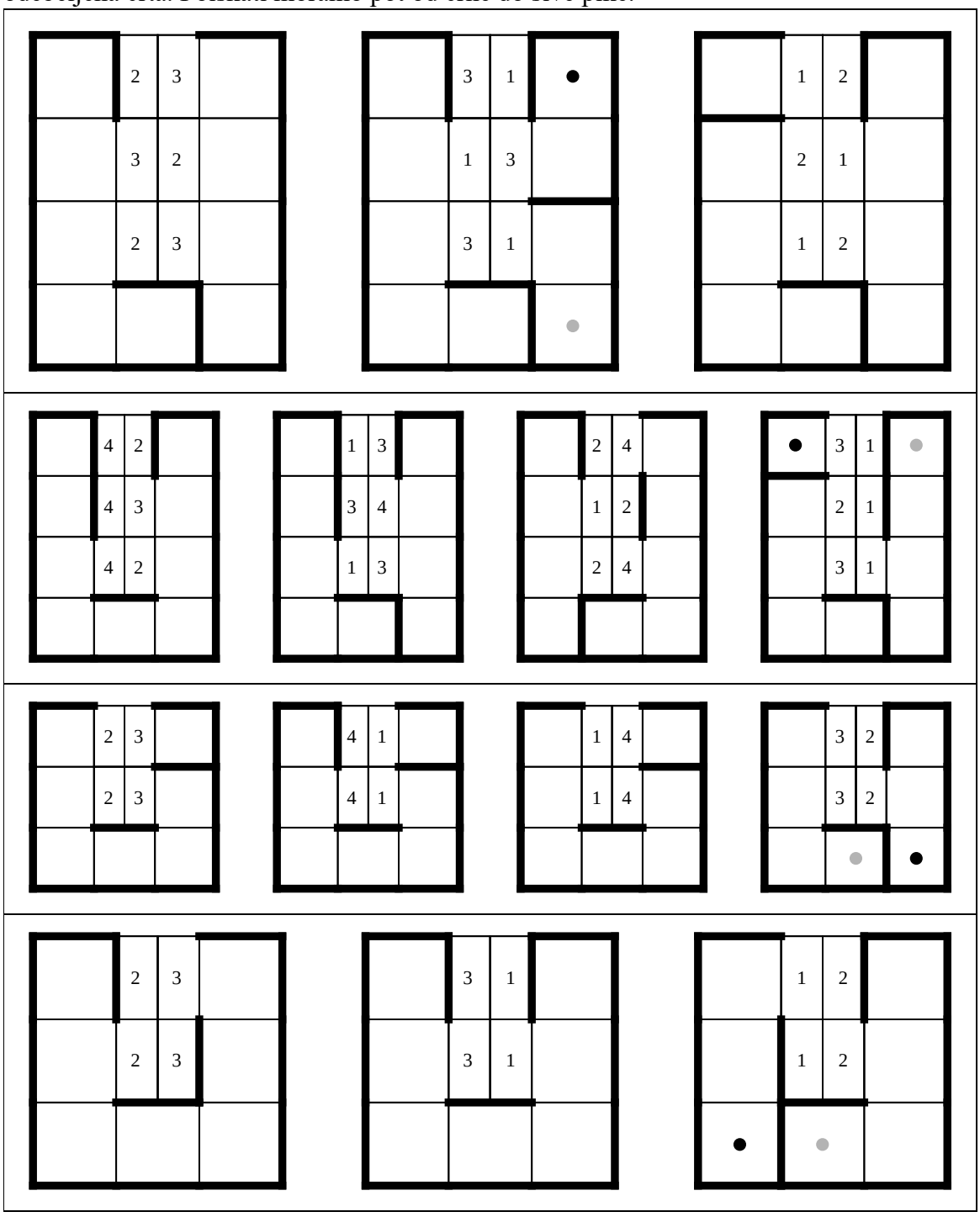
Labirint v kvadru

Kvader sestoji iz vodoravnih slojev kockastih oddelkov (zgornji, srednji in spodnji sloj so dani od leve proti desni). Odebeljene črte preprečujejo prehajanje med sosednjima oddelkoma istega sloja. Med oddelkom in oddelkom neposredno pod njim lahko prehajamo, če in samo če je prvi pobarvan belo.
Poišči najkrajšo pot od oddelka z 1 do oddelka z A! Pot označi z zaporednimi naravnimi števili. Prvi oddelek je že označen z 1, vsak naslednji sosednji oddelek (kocko) pa s številom, večjim za 1.

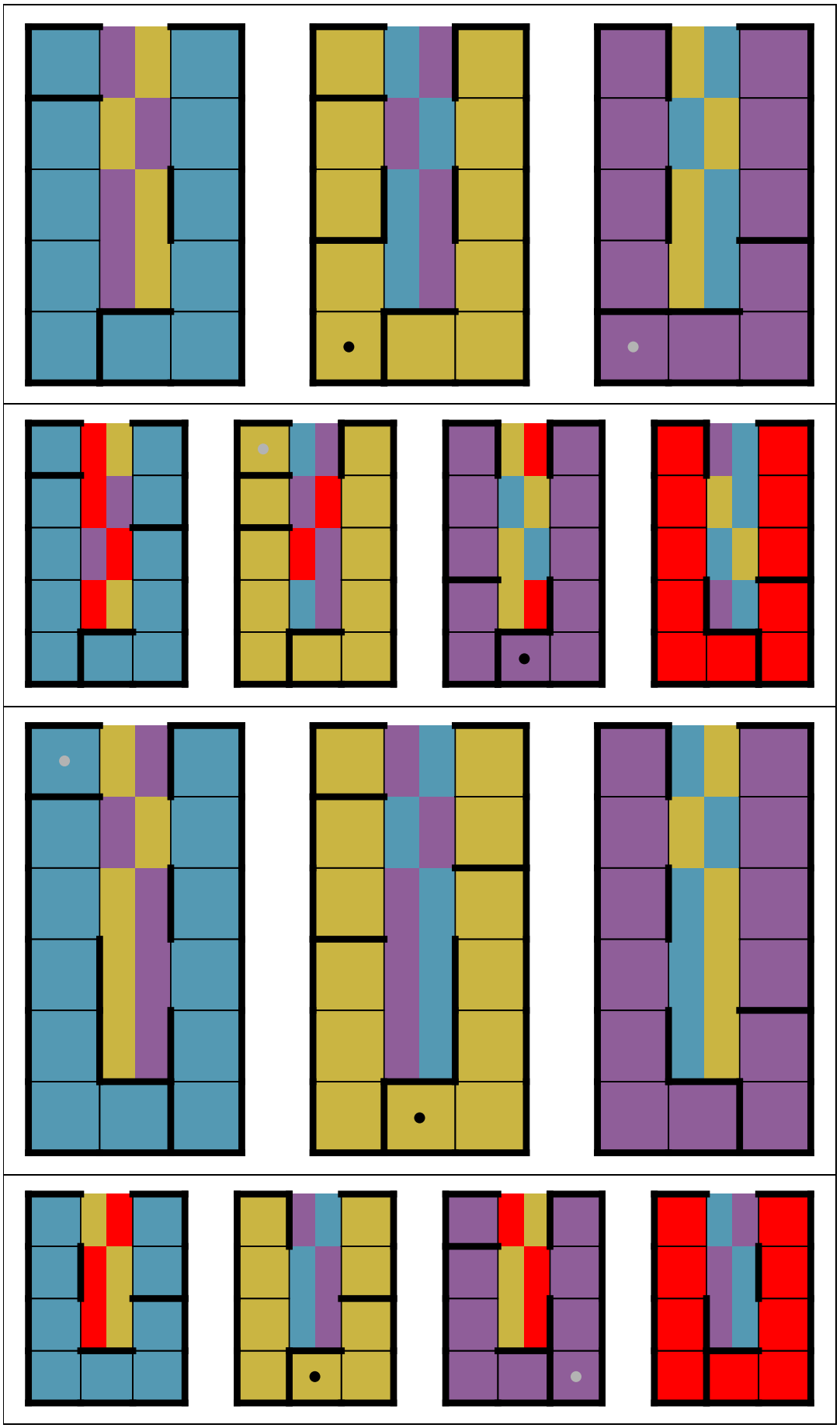


Labirint na Riemannovi ploskvi

Imamo več listov, ki jih razlikujemo po zaporedni številki od leve proti desni. Vsak list ima obliko podkve, sredina pa je razrez. Vsi kvadratki enega lista so povezani, prehod med njimi pa nam prepreči odebeljena črta. Kako je s prehajanjem z nekega lista na drugega? To so prehodi po horizontali. Recimo, da smo se znašli na desnem zgornjem kvadratku drugega lista. Oznaka sosednjega pravokotnika je 4 - to pomeni, da lahko nadaljujemo na levem zgornjem kvadratku četrtega lista. Tak prehod pa ni možen, če je med kvadratkom in sosednim pravokotnikom odebeljena črta. Poiskati moramo pot od črne do sive pike.

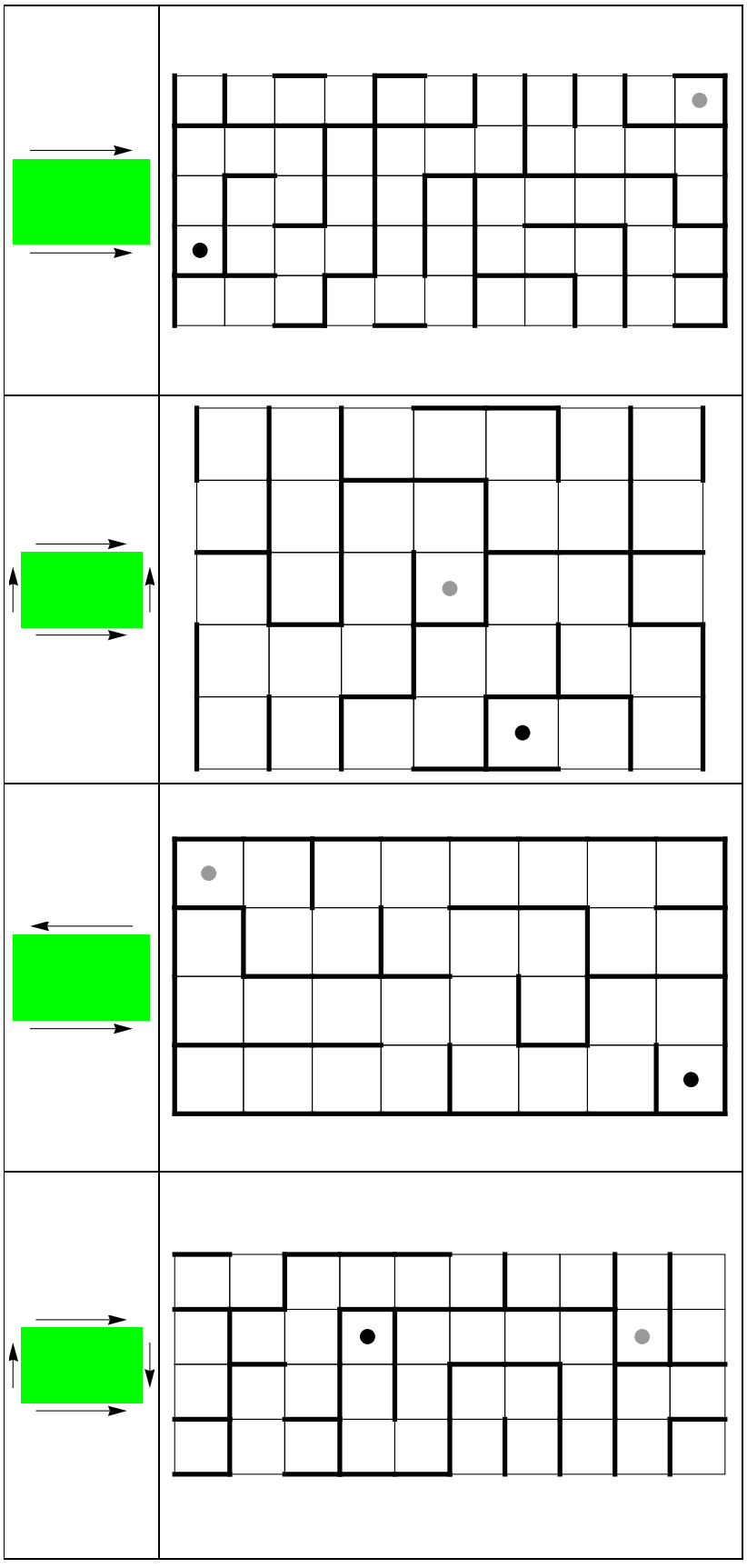


Pri barvnem labirintu so listi označeni z barvami.



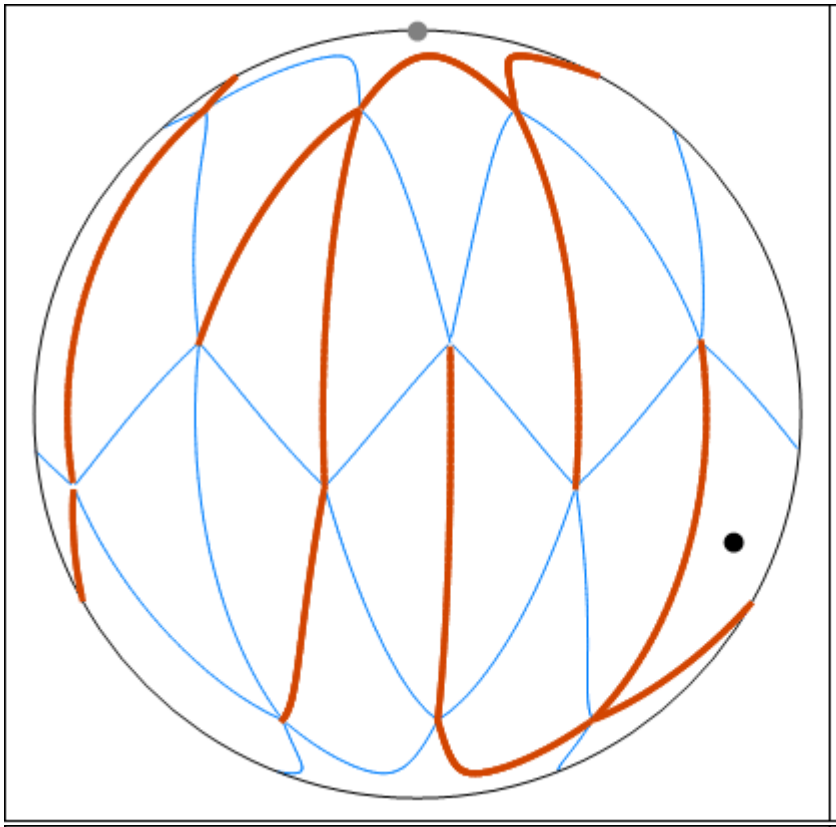
Labirinti na ploskvah

Podan je labirint na pravokotniku. Moramo poiskati pot od temnejše do svetlejše pike. Prehod med sosednimi kvadratki je možen, če med njima ni odebeljene črte. Skica na levi pomeni, kako sta nasprotni stranici pravokotnika povezani (miselno ju moramo zlepiti).



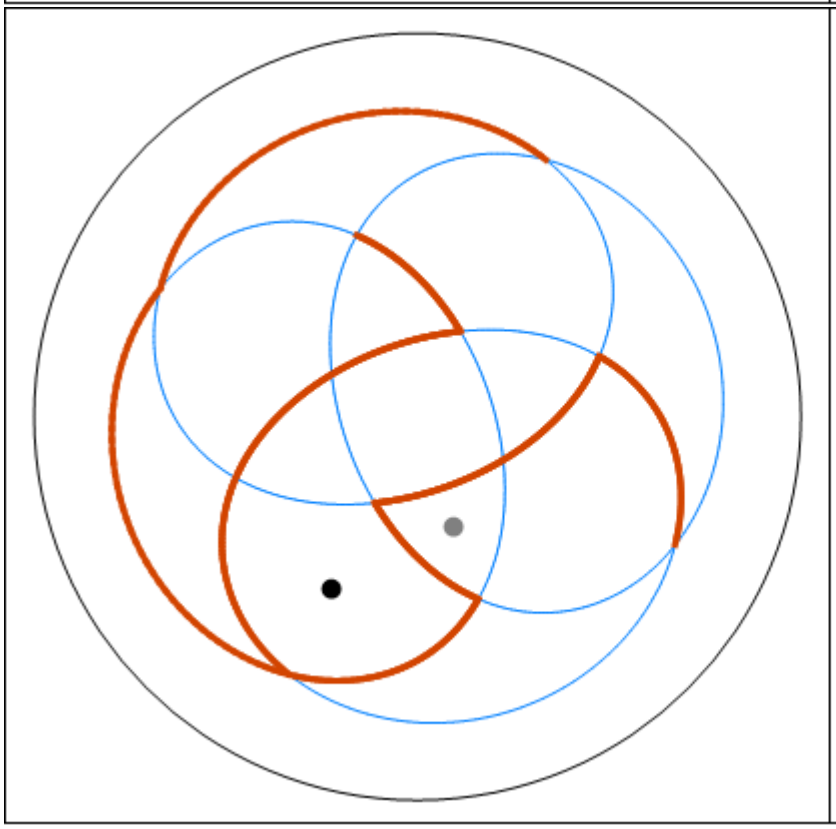
Labirinti na projekcijah teles

Telo je projicirano v ravnino. Na projekciji je podan labirint, kjer odebeljene črte preprečujejo prehod iz projekcije mejne ploskve na projekcijo sosedne mejne ploskve.





število mejnih ploskev	
število robov	
število oglišč	
tip rotacijske simetrije	

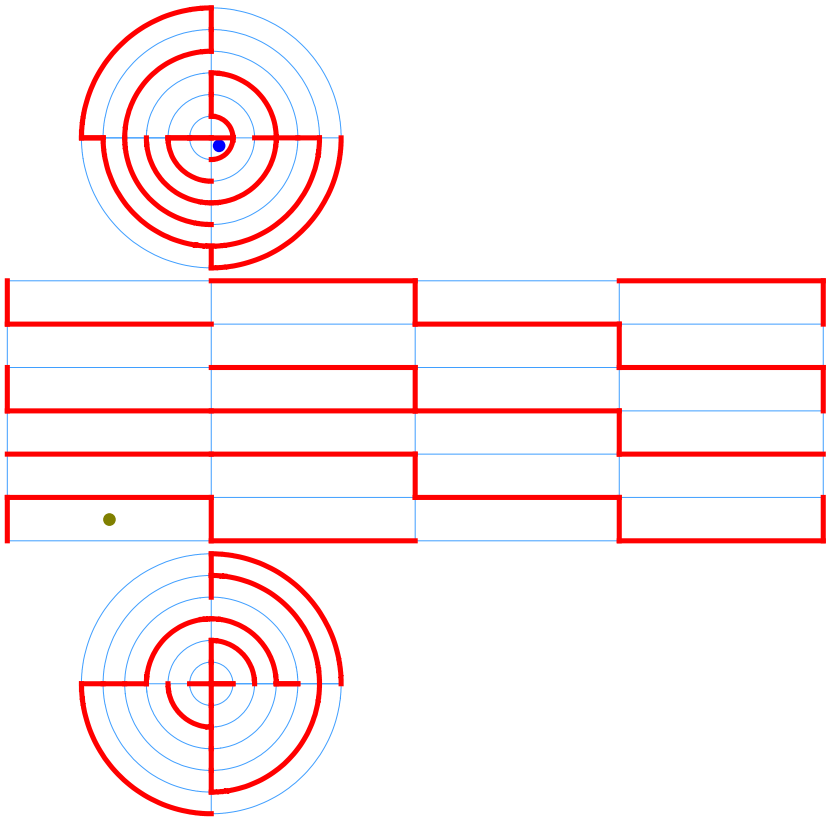




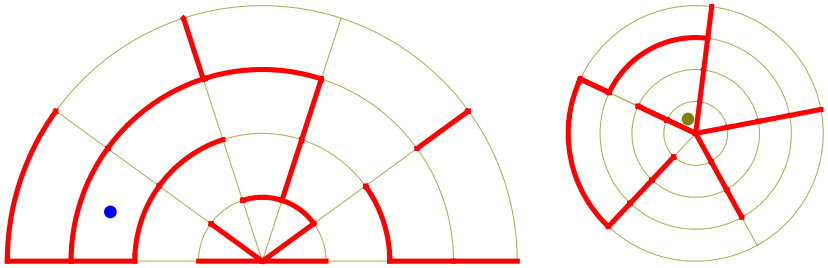
število mejnih ploskev	
število robov	
število oglišč	
tip rotacijske simetrije	

Labirinti na mreži valja in stožca

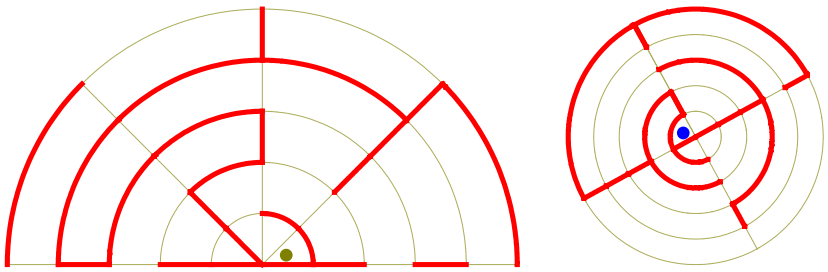
1.



2.

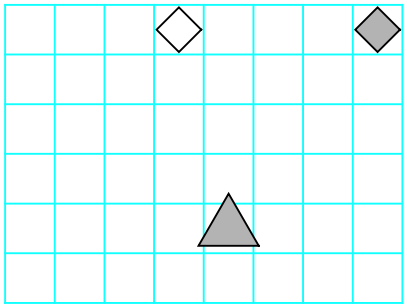


3.

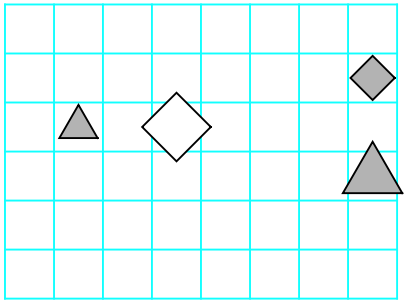


Poišči imena likov

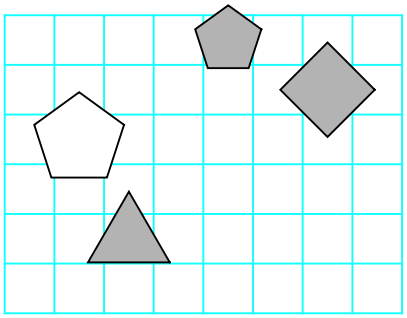
Poišči imena likov in analiziraj neodvisnost pogojev.



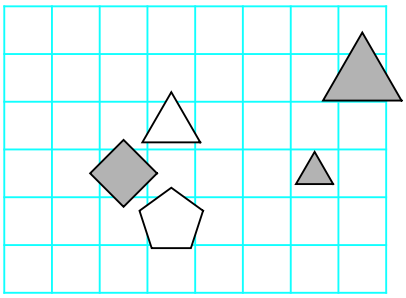
1. Lik B je nad C.	N
2. Lik A je desno od C.	N
3. Če lik A ni trikotnik, potem lik B ni siv.	R



1. Lik A je levo od D.	N
2. Lik A je večji kot D.	R
3. Ali lik B ni siv ali lik B ni bel.	R
4. Lik A je trikotnik ali je lik C srednje velikosti.	N



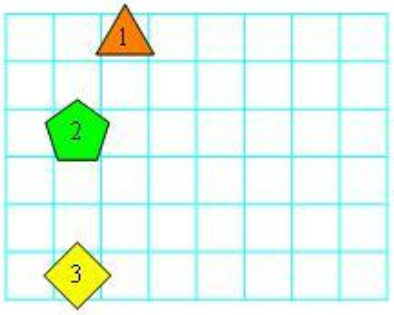
1. Lik C je nad D.	R
2. Lik A je manjši kot C.	N
3. Lik B je desno od C.	R
4. Lik B ni siv ali lik A ni siv.	R



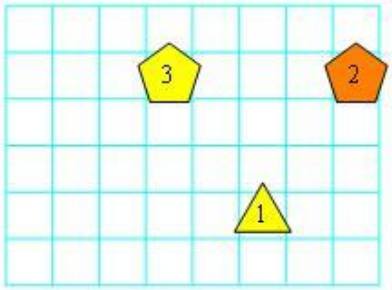
1. Lik A je nad D.	N
2. Lik C je desno od D.	R
3. Lik A je manjši kot B.	R
4. Ali lik D ni petkotnik ali lik E ni bel.	R
5. Lik D je trikotnik in lik A ni majhen.	R

Analiziraj pogoje nalog

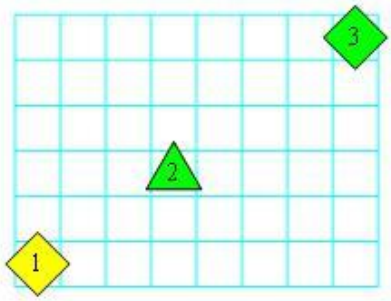
Dobro definirana naloga je naloga, pri kateri so njeni pogoji potrebni in zadostni za njeno rešitev. To pomeni, da noben pogoj ni odveč in da ima naloga enolično rešitev. Pri zastavljeni nalogi imamo lahko več možnosti:
Naloga nima rešitve, pogoji so protislovni.
Naloga ima več rešitev, to je, pogoji niso zadostni (za enolično rešitev).
Naloga ima enolično rešitev, vendar pogoji niso potrebni (vsaj en pogoj bi lahko izpustili in bi naloga še vedno imela enolično rešitev).
Naloga ima enolično rešitev in pogoji so potrebni (neodvisni) in seveda zadostni. Naloga je dobro definirana.
V naslednjih nalogah moramo ugotoviti, kako je s pogoji naloge.
Poiskati moramo imena A, B,C, … likov, ki so označeni z 1, 2, 3, …, če so izpolnjeni pogoji na desni strani slike. Ugotoviti moramo tudi, ali so pogoji neodvisni.



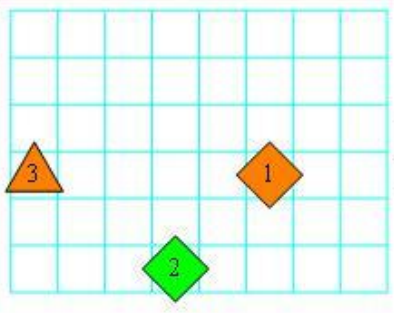
1. Lik B je kvadrat.	N
2. Lik C je petkotnik ali je lik C kvadrat.	N



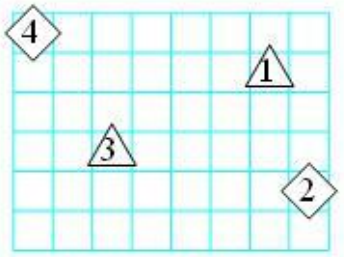
1. Lik A je trikotnik.	N
2. Lik B je oranžen, če in samo če je lik B petkotnik.	N



1. Lik A je pod C.	R
2. Če je lik A kvadrat, potem je lik A oranžen.	R



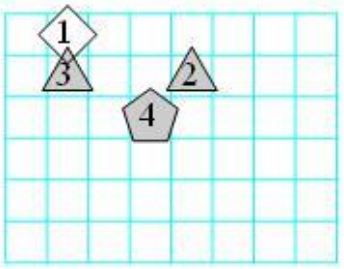
1. Lik B ni oranžen.	R
2. Lik A je levo od B.	R



1. Petkotnik (B) ∨ Trikotnik (C)	R
2. Kvadrat (C) ∨ Desno od (A, B)	R
3. Trikotnik (C) ⊻ Levo od (A, C)	N

1	2	3	4

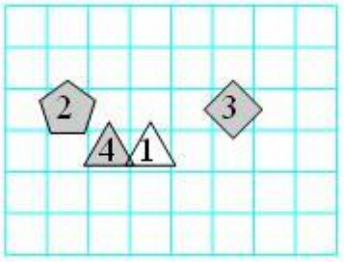
1. pogoj						
2. pogoj						
3. pogoj						



1. Siv (B) ⊻ Pod (C, D)	N
2. Bel (D) ⇔ Nad (A, C)	N
3. Petkotnik (C) ∧ Levo od (B, C)	R

1	2	3	4

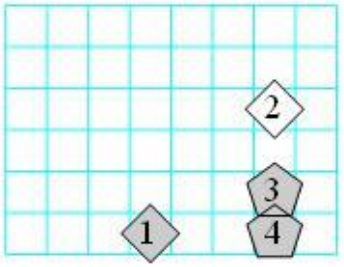
1. pogoj					
2. pogoj					
3. pogoj					



1. Pod (A, B)	R
2. Siv (A) ∨ Petkotnik (D)	N
3. Trikotnik (D) ⊻ Levo od (B, D)	N

1	2	3	4

1. pogoj			
2. pogoj			
3. pogoj			



1. Levo od (A, B)	R
2. Siv (C) ∨ Desno od (B, C)	N
3. Kvadrat (D) ⇔ Pod (A, B)	N

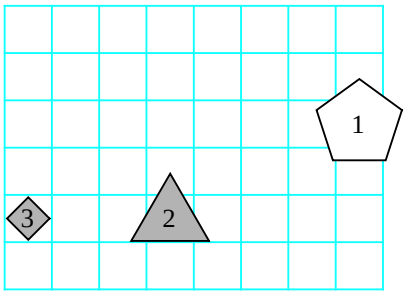
1	2	3	4

1. pogoj			
2. pogoj			
3. pogoj			

Protislovni pogoji

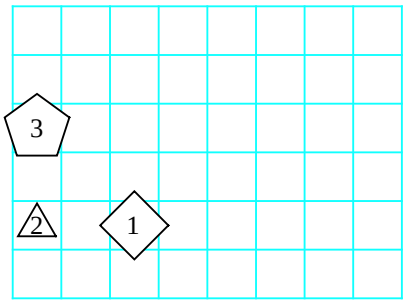
V naslednjih nalogah so pogoji protislovni. V rešitvah navajamo en pogoj, ki je v protislovju z ostalimi.

1.



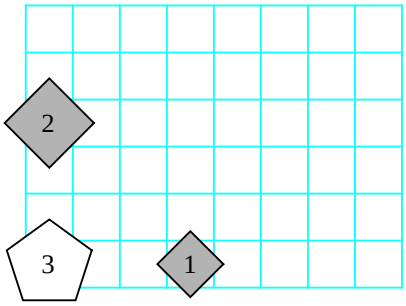
1. Lik A je večji kot C.	R
2. Lik B ni majhen in lik B ni trikotnik.	N
3. Če lik A ni petkotnik, potem lik B ni velik.	N

2.



1. Lik C ni majhen.	R
2. Lik A je pod B.	R
3. Lik B je desno od C.	R

3.



1. Lik C ni siv.	R
2. Lik A je levo od C.	R
3. Lik A je nad B.	N

Nagradna logična naloga

Štirje davkoplačevalci (Miha, Miran, Marko, Andrej), z različnimi priimki (Gorjanc, Rop, Gaber, Gorjup) so kupili različne, po zagotovilih, varne naložbe (obveznice NLB, delnice NLB, obveznice Abanke, delnice Abanke).
Za vsakega določi ime, priimek in naložbo.

1. Miha ni bil ne ob obveznice Abanke ne ob delnice NLB.
2. Marko se piše Rop.
3. Rop ni bil ne ob obveznice Abanke ne ob delnice NLB.
4. Gorjanc ni bil ne ob delnice Abanke ne ob obveznice Abanke.
5. Miran se ne piše Gaber.
6. Gorjup ni kupil obveznic Abanke.
7. Rop ni kupil delnic Abanke..

	Gorjanc	Rop	Gaber	Gorjup	obveznice NLB	delnice NLB	obveznice Abanke	delnice Abanke
Miha								
Miran								
Marko								
Andrej								
obveznice NLB								
delnice NLB								
obveznice Abanke								
delnice Abanke								

ime	priimek	prevara
Miha		
Miran		
Marko		
Andrej		

Rešitev nagradne uganke pošljite do 1.8..2018 na naslov Logika d.o.o., Svetčeva pot 11, 1241 Kamnik, s pripisom »Nagradna uganka«. Prosimo vas, da napišete domači in ne šolski naslov, da vam, če boste izžrebani, pošljemo nagrado.
Naslednji reševalci nagradne uganke iz 3. številke bodo prejeli poševno prizmo Polydron in Mercatorjevo vrtavko »Disney Frozen«: E.P. in T.K., LAŠKO; N.V., LJUBLJANA; B.O. in T.L., POLJANE NAD ŠKOFJO LOKO.

Naloga v esperantu

Tri amikinoj (Lana, Jana, Nina) havas tri hundojn (Mistralo, Kingo, Pongo) de diversaj bredoj (angla setero, dobermano, pudelo) kaj venas el diversaj urboj (Berlino, Kairo, Bagdado).
Divenu iliajn nomojn, la nomojn kaj bredojn de iliaj hundoj kaj la urbojn, el kiu la virinoj kaj iliaj hundoj venas.

1. Kingo ne estas angla setero.
2. La pudelo estas en Kairo.
3. La dobermano ne venas el Berlino.
4. Jana ne havas Pongon.
5. Lana ne havas pudelon.
6. Lana venas el Berlino.
7. Pongo ne estas dobermano.
8. Kingo ne venas el Bagdado.

	Mistralo	Kingo	Pongo	angla setero	dobermano	pudelo	Berlino	Kairo	Bagdado
Lana									
Jana									
Nina									
Berlino									
Kairo									
Bagdado									
angla setero									
dobermano									
pudelo									

nomo	hundo	bredo	urbo
Lana			
Jana			
Nina			

Simona Klemenčič

Algebra imen

V tem sestavku bomo obravnavali stavke oblike »A je x.«. Rekli jim bomo *singularni* stavki, »A« je *subjekt* stavka, »x« pa njegov *predikat*. Primer takšnega stavka je »Sokrat je človek.«. Subjekt in predikat veže kopula (vez) »je«. Poljski logik Leśnievski je zapisoval takšen stavek v obliki »A ε x«. Subjekt in predikat stavka sodita v kategorijo imen. Ime je *prazno*, če ne označuje nobene reči (ali bitja), je *singularno*, če označuje natanko eno reč in je obče ime, če označuje vsaj dve reči (bitji). Tako je »nič« prazno ime, »nekaj« pa označuje sploh vse reči in je zato obče ime. Ime »Sokrat« je singularno ime.
Dogovorimo se, da je stavek »A je x« resničen natanko tedaj, kadar je »A« singularno ime, »x« obče ime ali singularno ime, ki označuje isti objekt kot »A«, lahko pa tudi še kakšno drugo reč.
Tokrat bomo imeli opravka z likom, ki ima lahko naslednje lastnosti: obliko (trikotnik, kvadrat, petkotnik), velikost (majhen, srednji, velik), debelino (tanek, debel) in barvo (oranžen, moder, rumen).
Če lik A nima lastnosti »x«, potem ima lastnost »ne-x«, kar bomo pisali »A je ~x«. Oznaka »~« je negacija imena in ni stavčna negacija. Ni mi znano, da bi kakšen naravni jezik posedoval takšno negacijo. Stavek »A je x ∧ y« pravi, da je ima A lastnost x in y. Tu imamo opravka s konjunkcijo imen in ne stavkov. V slovenščini lahko rečemo »Lik A je rumen in velik.« ali pa »A je rumen ali velik«, kar bomo pisali v obliki »A je x ∪ y«. V tem primeru gre za imensko disjunkcijo. Če vsakemu imenu x priredimo množico reči X, ki jih ime označuje, potem imenu »x ∩ y« ustreza X ∩ Y, imenu »x ∨ y« ustreza množica X ∪ Y, imenu »nič« prazna množica ∅, imenu »nekaj« univerzalna množiva *U*, imenu »¬x« pa komplement množice X, to je CX=*U*-X. Trditev »A ε x« lahko v jeziku množic zapišemo na dva načina:
»{A}⊂ X« ali A∈ X.
Vse podmnožice množice *U* z operacijami C, ∩ in ∪ tvorijo algebro množic, zato lahko govorimo o ustreznih imenih, da tvorijo skupaj z operacijami ~, ∩ in ∪ *algebro imen*. V primeru našega lika pa bi lahko govorimo o algebri lastnosti.
V naslednjih nalogah bomo imeli seznam pogojev, ki jih bo izpolnjeval lik. Ugotoviti bo treba osnovne lastnosti lika. Pogojev bo zadosti za enolično rešitev, vendar se bo večkrat zgodilo, da je pogojev preveč, torej pogoji ne bodo nujno za enolično rešitev.

~Moder	R
~Kvadrat	R
~Petkotnik ⋃ Rumen	N
~Petkotnik ⋃ Majhen	R
~Kvadrat ⋃ Srednji	R

oblika	
velikost	
barva	

~Moder	R
~Kvadrat	R
~Petkotnik ⋃ Rumen	N
~Petkotnik ⋃ Majhen	R
~Kvadrat ⋃ Srednji	R

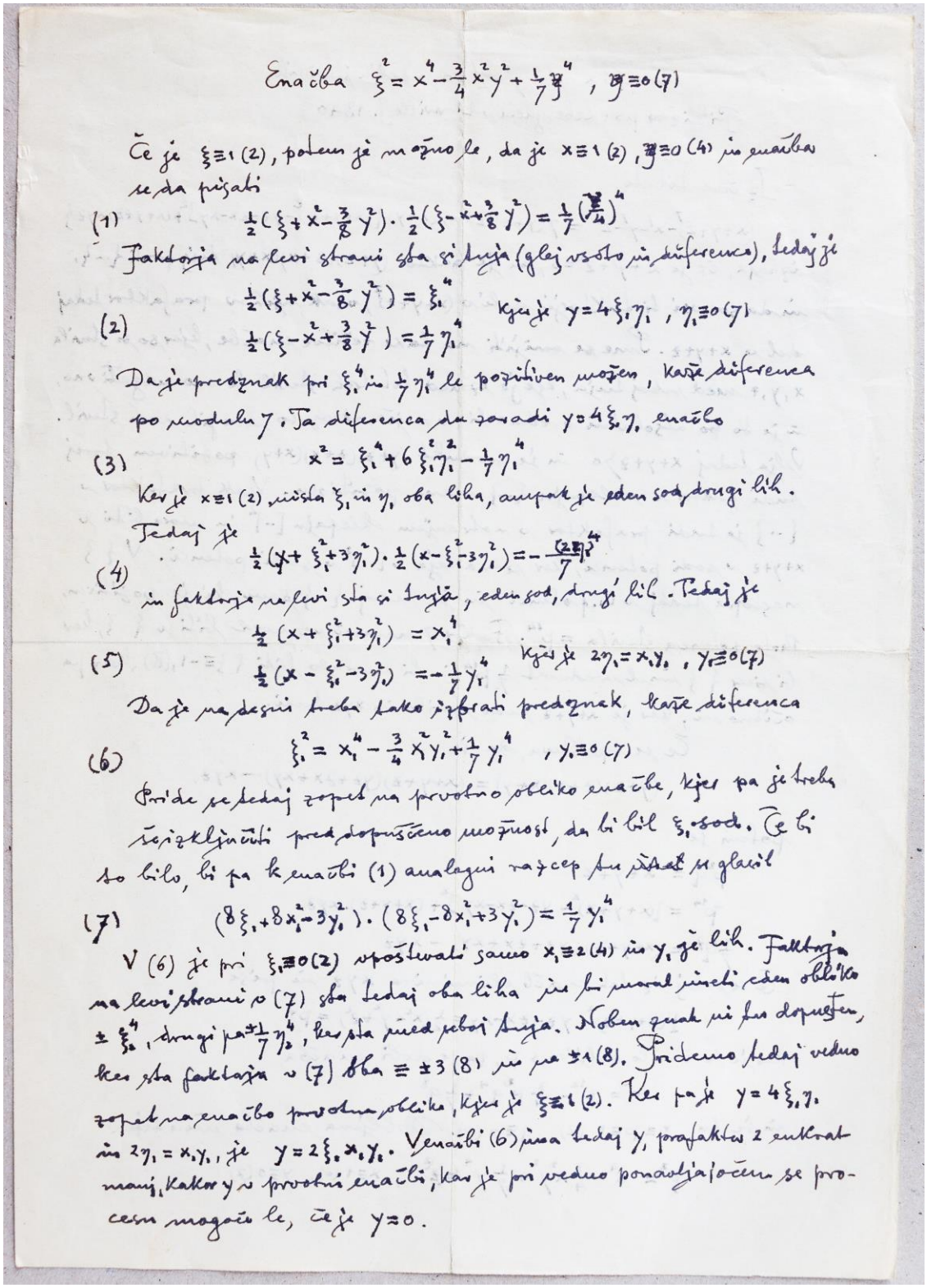
oblika	Petkotnik
velikost	Majhen
barva	Oranžen

Naloge


~Majhen R
~Majhen ∩ ~Velik N
~Kvadrat ∩ ~Srednji N
Majhen ∩ ~Velik N
oblika
velikost
Kvadrat R
~Trikotnik R
Majhen ∩ ~Petkotnik R
oblika
velikost
~Trikotnik R
~Kvadrat R
Oranžen ∩ Majhen R
~Majhen ∪ ~Petkotnik N
oblika
velikost
barva
~Trikotnik N
Velik ∪ ~Trikotnik N
Srednji ∪ Kvadrat R
Petkotnik ∪ ~Trikotnik N
oblika
velikost

Plemljevi matematični zapiski

V Arhivu Republike Slovenije, pod oznako AS 2013, Plemelj Josip, škatla 3, *Razni matematični zapiski in rokopisi*, najdemo večje število primerov reševanja enačb in različnih računov. Plemelj je porabil ves njemu razpoložljiv papir za računanje. Če je prejel kakšno obvestilo, napisano na eni strani, je drugo stran popisal z računi. Iz naslednjih dveh fotografij Petra Legiše lahko ugotovimo, da je bil Plemelj izjemno natančen in skrben človek.



Enačba $\xi^2 = x^4 - \frac{3}{4}x^2y^2 + \frac{1}{7}y^4$, $y \equiv 0 (7)$

Če je $\xi \equiv 1 (2)$, potem je možno le, da je $x \equiv 1 (2)$, $y \equiv 0 (4)$ in enačbo se da pisati

(1) $\frac{1}{2}(\xi + x^2 - \frac{3}{8}y^2) \cdot \frac{1}{2}(\xi - x^2 + \frac{3}{8}y^2) = \frac{1}{7}(\frac{y}{4})^4$

Faktorja na levi strani sta si tuja (glej vsoto in diferenco), tedaj je

(2) $\frac{1}{2}(\xi + x^2 - \frac{3}{8}y^2) = \xi_1^4$
$\frac{1}{2}(\xi - x^2 + \frac{3}{8}y^2) = \frac{1}{7}\eta_1^4$ kjer je $y = 4\xi_1\eta_1$, $\eta_1 \equiv 0 (7)$

Da je predznak pri ξ_1^4 in $\frac{1}{7}\eta_1^4$ le pozitiven možen, kaže diferenca po modulu 7. Ta diferenca da zaradi $y = 4\xi_1\eta_1$ enačbo

(3) $x^2 = \xi_1^4 + 6\xi_1^2\eta_1^2 - \frac{1}{7}\eta_1^4$

Ker je $x \equiv 1 (2)$ mora biti ξ_1 in η_1 oba liha, ampak je eden sod drugi lih. Tedaj je

(4) $\frac{1}{2}(x + \xi_1^2 + 3\eta_1^2) \cdot \frac{1}{2}(x - \xi_1^2 - 3\eta_1^2) = -\frac{(2\eta_1)^4}{7}$

in faktorja na levi sta si tuja, eden sod, drugi lih. Tedaj je

(5) $\frac{1}{2}(x + \xi_1^2 + 3\eta_1^2) = x_1^4$
$\frac{1}{2}(x - \xi_1^2 - 3\eta_1^2) = -\frac{1}{7}y_1^4$ kjer je $2\eta_1 = x_1y_1$, $y_1 \equiv 0 (7)$

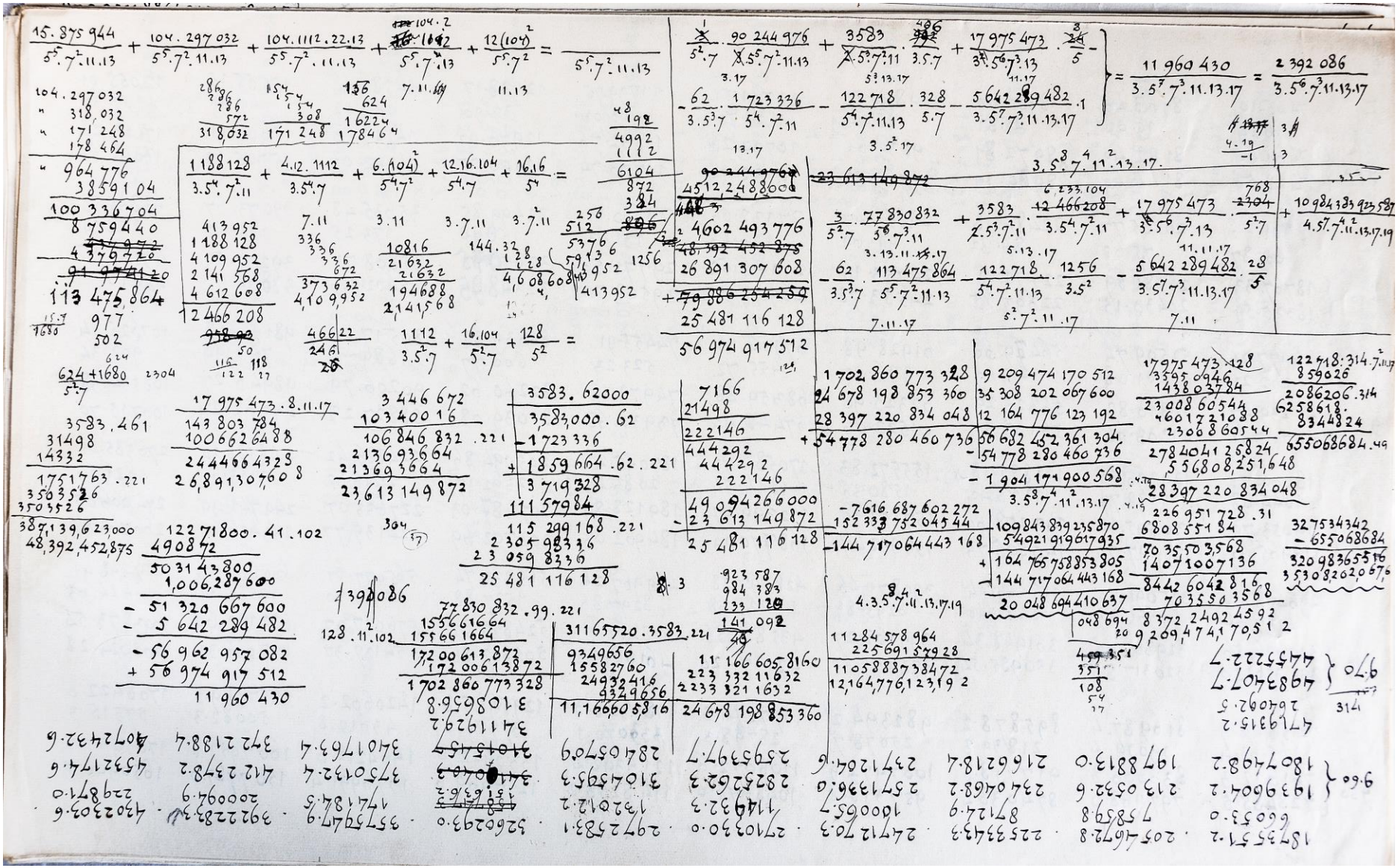
Da je na desni treba lahko izbrati predznak, kaže diferenca

(6) $\xi_1^2 = x_1^4 - \frac{3}{4}x_1^2y_1^2 + \frac{1}{7}y_1^4$, $y_1 \equiv 0 (7)$

Pride se tedaj zopet na prvotno obliko enačbe, kjer pa je treba še izključiti predpostavljeno možnost, da bi bil ξ_1 sod. Če bi to bilo, bi pa k enačbi (1) analogni razcep ne vodil do glavnih

(7) $(8\xi_1 + 8x_1^2 - 3y_1^2) \cdot (8\xi_1 - 8x_1^2 + 3y_1^2) = \frac{1}{7}y_1^4$

V (6) je pri $\xi_1 \equiv 0 (2)$ upoštevati samo $x_1 \equiv 2 (4)$ in y_1 je lih. Faktorja na levi strani v (7) sta tedaj oba liha in bi morali imeti eden obliko $\pm\xi_2^4$, drugi pa $\pm\frac{1}{7}\eta_2^4$, kar sta med seboj tuja. Noben znak ni bil dopusten, ker sta faktorja v (7) oba $\equiv \pm 3 (8)$ in ne $\pm 1 (8)$. Pridemo tedaj vedno zopet na enačbo prvotne oblike, kjer je $\xi \equiv 1 (2)$. Ker pa je $y = 4\xi_1\eta_1$ in $2\eta_1 = x_1y_1$, je $y = 2\xi_2x_1y_1$. V enačbi (6) ima tedaj y_1 prafaktor 2 enkrat manj, kakor y v prvotni enačbi, kar je pri vedno ponavljajočem se procesu mogoče le, če je $y = 0$.



Definicije v logiki prvega reda

V matematiki se razen z *izreki* srečujemo tudi s stavki, ki jim rečemo *definicije*. Z njimi uvajamo nove pojme s pomočjo začetnih pojmov in že vpeljanih pojmov.
Definicije v matematiki lahko delimo na dve skupini. V prvi so definicije *izjavnih* funkcij, v drugi pa so definicije *izraznih* funkcij. To je v skladu z delitvijo izrazov na *formule* (stavke) in *terme* (izraze v ožjem pomenu).
Enostaven primer izrazne definicije nastopi pogosto v nalogah:
Nariši graf funkcije $f(x) = x^2+2x-3$.
Ta definicija je v veljavi le v tej nalogi, torej gre za *začasno* definicijo, a ima obliko pravilne definicije. Njena oblika je *identiteta*. Takšni definiciji rečemo tudi *eksplicitna* definicija.
Primer za definicijo izjavne funkcije je naslednja definicija dvomestne relacije.
Vzemimo tale stavek, kjer število pomeni naravno število.
(1) Število *m deli* število *n*, če obstaja takšno število *k*, da je $n = km$.
Simbolično bi to zapisali takole:
$m|n \Leftarrow (\exists k)\ n = km$
V resnici moramo definicijo zapisati kot ekvivalenco, saj sklepamo v obeh smereh:
(2) $m|n \Leftrightarrow \exists k(n = km)$
Izrek:
(3) $k|m \wedge m|n \Rightarrow k|n$
Dokaz: Predpostavimo $k|m$ in $m|n$.
Po definiciji (2)(v smeri $\Rightarrow$) velja $\exists p(pk = m)$ in $\exists r(rm = n)$.
Potem za neki števili p_1 in r_1 velja $p_1k = m$ in $r_1m = n$.
Iz obeh enakosti sledi $r_1p_1k = n$, torej res obstaja tak h_1 (namreč r_1p_1),
da velja $\exists h(hk = n)$. Po definiciji (1)(v smeri $\Leftarrow$) velja $k|n$.
Glavni razlog za okrajšavo je, da je pravilna definicija, izražena v običajnem jeziku, preveč dolgovezna:
(4) Število *m deli* število *n* natanko takrat, kadar obstaja takšno število *k*, da je $n = km$.
Stavek (1) moramo razumeti kot okrajšavo za stavek (4).
To je tipična definicija, ki uvaja novo dvomestno relacijo. Ima obliko ekvivalence. Levo stran imenujemo *definiendum* (del, ki se definira, *določenec*), desno pa *definiens* (del, s katerim definiramo, *določevalec*).
Izraz (2) ni stavek, ampak je formula. V resnici bi moralo biti
$(\forall mn)(\ m|n \Leftrightarrow (\exists k)\ n = km)$
Vendar je običajen dogovor, da se univerzalni kvantifikatorji, ki se nanašajo na celoten izraz, ne pišejo.
Definicija je v nekem smislu pravilo o zamenjavi določenega izraza z nekim drugim, po svoji naravi ekvivalentnim izrazom. Pri tem morajo veljati neki pogoji:
Najprej zapišimo dva pogoja, ki jih mora izpolnjevati definicija, ki uvaja v teorijo nov znak.
1) Nov simbol mora biti *odpravljiv* iz vsakega stavka teorije. To pomeni, da v teoriji, za vsak stavek, ki vsebuje nov simbol, obstaja ekvivalenten stavek, ki tega simbola ne vsebuje.
2) Definicija mora biti *nekreativna*. To pomeni, da z uporabo definicije ne moremo izpeljati izrekov, ki jih ne bi mogli izpeljati brez uporabe definicije. Pri tem smo mislili na izreke, ki novega simbola ne vsebujejo.
Ta dva pogoja sta tudi zadostna, da je novi izraz samo zamenjava za določen izraz. Čemu potem sploh definicije?
Vsako teorijo začnemo z nekimi začetnimi pojmi, katerih lastnosti so implicitno izražene z aksiomi. Aksiomi morajo biti neodvisni. Z uvajanjem definicij lahko vpeljujemo nove relacije. Trditve, ki vsebujejo nove relacije, bi postale nepregledne, če bi odpravili vse definirane pojme.

Na primer, Evklidovo ravninsko geometrijo lahko aksiomatiziramo z enim samim začetnim pojmom. To je lahko trimestna relacija $\tau(A, B,C)$, ki pravi, da točke A, B in C tvorijo pravi kot z vrhom v B.
Kako bi samo z τ in logično simboliko zapisali Pitagorov izrek? Praktično neizvedljiva naloga. Definicije so zgolj teoretično nepotrebne, medtem ko so za dejansko razvijanje teorije nenadomestljive.

Vpeljava novega[+] znaka za relacijo

[+]Občajno na mesto novega znaka vzamemo novo kombinacijo črk, ki je povezana s smislom definiranega pojma.

Definicija, s katero vpeljemo nov znak za *n*-mestno relacijo, ima obliko
$\alpha(x_1, x_2,\ldots, x_n) \Leftrightarrow A(x_1, x_2,\ldots, x_n)$
Znak α mora biti nov znak, $A(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ je formula jezika, ki ima za proste spremenljivke samo vse ali nekatere izmed $x_1, x_2,\ldots, x_n$. V izrazu $\alpha(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ je x_i i-ti argument.
Če imamo opravka z dvomestno relacijo, znak za relacijo največkrat pišemo med argumenta: $p \perp q$, $x \geq y$, $a \neq b$.
Recimo, da imamo na razpolago relaciji $\beta(A, B, C)$, ki pravi, da točka B leži med točkama A in C, ter štirimestno relacijo $\delta(A, B, C, D)$, ki pravi, da je točka A oddaljena od B enako, kot je C od D. Želimo definirati relacijo $\lambda(A, B,C)$, ki pravi, da te tri točke ležijo na isti premici. Definicija je naslednja:
$\lambda(A, B,C) \Leftrightarrow \beta(A, B, C) \vee \beta(A, C, B) \vee \beta(B, A, C)$
Kaj pa relacija $\pi(A, B, C, D)$, ki pravi, da točki A in B ter C in D ležita na vzporednih premicah:
$\pi(A, B, C, D) \Leftrightarrow \neg(\exists X)(\lambda(A, B, X) \wedge \lambda(C, D, X))$
Kaj pravi naslednja definicija?
$\kappa(A, B, C, D) \Leftrightarrow \delta(A, B, B, C) \wedge \delta(B, C, C, D) \wedge \delta(C, D, D, A) \wedge \delta(A, C, B, D)$
Točke A, B, C in D so oglišča kvadrata.

Vpeljava novega funkcijskega znaka

Imenom objektov osnovne množice rečemo *individualne konstante*, na primer 1, število e, število π.
Recimo, da obravnavamo naravna števila in da n' pomeni naslednika naravnega števila n.
Potem lahko definiramo:
$2 = 1'$,
$3 = 2'$,
$4 = 3'$.
Podobno lahko definiramo funkcije nad realnimi števili:
$f(x) = x^2+2x-1$
$p(a, b) = ab$
Splošna oblika teh definicij je:
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tau(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
Znak f je nov, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pa so vse spremenljivke, ki so proste v izrazu $\tau(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Ni pa nujno, da vse v le-tem nastopajo.
Tako lahko definiramo konstantno funkcijo $h(x) = 2$.
Zdaj pa želimo definirati *inverzno* funkcijo k funkciji x^3 in recimo, da ne poznamo potence z racionalnim eksponentom. Definicija je naslednja:
$y = g(x) \Leftrightarrow x = y^3$
V logiki prvega reda morajo izrazi, kot je g(x), vedno zaznamovati določen objekt, v tem primeru realno število. To je mogoče v našem primeru, samo če je prvotna funkcija bijektivna preslikava iz **R** v **R**. To je v tem primeru izpolnjeno.

Splošna oblika definiranja funkcijskega znaka je takšna:

$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$

Pri tem je x_i $(0< i <n+1)$ i-ti argument funkcije *f*.
Da bi bila ta definicija pravilna, morata biti izpolnjena dva pogoja:
1) $(\forall x_1, x_2, \ldots, x_n)(\exists y)\ \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ (eksistenčni pogoj)
2) $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \wedge \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) \Rightarrow y = z$ (pogoj enoličnosti)
Včasih se takšni definiciji reče tudi *implicitna* definicija
Pogoji so potrebni, ker v logiki prvega reda ne sme biti t.i. nedefiniranih in nedoločenih izrazov, kot sta 1/0 ali 0/0.
V geometriji bi lahko definirali razpolovišče točk A in B takole:
$C = r(A, B) \Leftrightarrow \delta(A, C, C, B) \wedge \beta(A, C, B)$
Najbolj znana definicija te vrste je opredelitev *absolutne* vrednosti realnega števila:
$y = |x| \Leftrightarrow (x < 0 \Rightarrow y = -x) \wedge (x \geq 0 \Rightarrow y = x)$
Matematična praksa je glede na zapisovanja funkcij precej raznovrstna. Pogosto je težko ugotoviti, kaj so oklepaji, kaj je znak za funkcijo, kakšen je vrstni red argumentov:
$x^y, |x|, \log_a x, xy, \ldots$

Sestavljene funkcije

V matematiki je najbolj znana definicija takšne funkcije

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Gre za definicijo funkcije, kjer imamo na različnih delih definicijskega področja različne izraze. Če želimo to definicijo zapisati v jeziku prvega reda, moramo to formulo spraviti v enodimenzionalni zapis.
V večini programskih jezikov imamo na razpolago ukaz oblike:

Če p(x), potem f(x), drugače g(x).

To lahko zapišemo v simbolni logiki kot definicijo funkcije k(x) na dva načina:

$y = k(x) \Leftrightarrow (p(x) \Rightarrow y = f(x)) \wedge (\neg p(x) \Rightarrow y = f(x))$
$y = k(x) \Leftrightarrow (p(x) \wedge y = f(x)) \vee (\neg p(x) \wedge y = f(x))$

Ne moremo pa napisati definicije v eksplicitni obliki kot pri absolutni vrednosti.
V splošnem imamo lahko *popolno* množico *izključujočih* pogojev $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ (pogoji se paroma izključujejo, je pa vedno eden izpolnjen) in množico izrazov $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$.
Zdaj lahko definiramo funkcijo g(x) na enega od načinov:
$y = g(x) \Leftrightarrow (p_1(x) \Rightarrow y = f_1(x)) \wedge (p_2(x) \Rightarrow y = f_2(x)) \wedge \ldots \wedge (p_n(x) \Rightarrow y = f_n(x))$,
$y = g(x) \Leftrightarrow (p_1(x) \wedge y = f_1(x)) \vee (p_2(x) \wedge y = f_2(x)) \vee \ldots \vee (p_n(x) \wedge y = f_n(x))$.
V programskih jezikih ni nujno, da se pogoji izključujejo, ker ustrezen ukaz deluje, tako da se poišče prvi pogoj, ki je izpolnjen in nato izračuna vrednost ustreznega izraza.

Pogojne definicije

Zdaj pa želimo definirati operacijo deljenja za realna števila. Definicija je:
$z = x/y \Leftrightarrow x = zy$

Vendar pa ta definicija pri $y = 0$ in $x = 1$ ne zadošča eksistenčnemu pogoju, pri $y = 0$ in $x=0$ pa ne velja pogoj o enoličnosti. V tem primeru uporabimo pogojno definicijo:
$y \neq 0 \Rightarrow (z = x/y \Leftrightarrow x = zy)$
V ravninski geometriji lahko vpeljemo izraz **pr**(A, B), ki pomeni premico skozi točki A in B. Toda, če je A=B, imamo šop premic, ki gredo skozi A. Uporabimo pogojno definicijo:
$A \neq B \Rightarrow (q = \mathbf{pr}(A,B) \Leftrightarrow (\forall X)(\lambda(A, B, X) \Rightarrow X \in p))$
Tu smo predpostavili dve vrsti spremenljivk: A, B , X, … za točke in p, q, … za premice, ter dodatno še pojme o množicah. Izraz $\lambda(A, B, X)$ pa je pomenil, da so točke A, B in X kolinearne.

Rekurzivne definicije

Najbolj znan primer teh definicij je opredelitev Fibonaccijevega zaporedja, kjer je n naravno število:
$f(1) = 1$; $f(2) = 1$, $n>2 \Rightarrow f(n) = f(n\text{-}1)+f(n\text{-}2)$
Če imamo v naravnih številih na začetku samo operacijo naslednika ', lahko vsoto opredelimo rekurzivno:
$x + 1 = x'$,
$x+ y' = (x+y)'$
Največkrat na mesto x' pišemo kar $x+1$.
Znana je tudi definicija fakultete:
$1! = 1$,
$(n+1)!=(n+1)\ n!$

Definicije v teoriji množic

Večina matematikov uporablja jezik prvega reda skupaj z osnovnimi pojmi teorije množic.
Tako lahko definiramo prazno množico:
$x = \varnothing \Leftrightarrow (\forall y)(\neg y \in x)$
Vendar moramo dokazati pravilnost te definicije. Eksistenčni pogoj mora biti zagotovljen z aksiomi, pogoj enoličnosti pa je posledica aksioma *ekstenzionalnosti*:
$x = y \Leftrightarrow (\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)$
To ni definicija znaka =, saj je ta že del teorije (logike prvega reda z identiteto) in ni nov znak.
V resnici je dovolj, če bi za aksiom vzeli samo:
$(\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y$
Obratna implikacija je logični zakon.

Aksiom o podmnožicah nam zagotavlja obstoj podmnožic
$(\exists z)\ (\forall x)(\ x \in z \Leftrightarrow x \in y \wedge A)$, kjer y in z ne nastopata v formuli A.
Če bi bil ta aksiom oblike
$(\exists z)\ (\forall x)(\ x \in z \Leftrightarrow A)$
bi hitro prišli do Russellovega paradoksa.
Naslednja definicija
$y = \{z;\ z \in x \Leftrightarrow A(z)\} \Leftrightarrow (\forall z)(z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge A(z))$
uvaja operator *združevanja* $\{\ldots\}$. Gre v resnici za neskončno mnogo definicij.
Zdaj lahko definiramo presek na dva načina:
$x \cap y = \{z;\ z \in x \wedge z \in y\}$ (eksplicitno)
$z \in x \cap y \Leftrightarrow z \in x \wedge z \in y$ (implicitno)
Definicija unije:
$x \cup y = \{z;\ z \in x \vee z \in y\}$ ali $z \in x \cup y \Leftrightarrow z \in x \vee z \in y$
Vendar za dokaz eksistence potrebujemo nov aksiom (o uniji).

Definicija po rodu in vrsti

Najbolj znana takšna definicija je
Človek je razumno živo bitje.
To je opredelitev z določitvijo najbližjega roda (*genus proximum*, živo bitje) in specifično razliko (*differentia specifica*, razumno).
To definicijo bi v jeziku množic zapisali
$x \in č \Leftrightarrow x \in žb \wedge x \in r$

Definicije v ontologiji Lesniewskega

Prejšnjo definicijo bi lahko izrazili takole:
X je človek, če in samo če je X živo bitje in je razumno.
Simbolično je takole:
$X\ \varepsilon\ č \Leftrightarrow X\ \varepsilon\ žb \wedge X\ \varepsilon\ r$
Tu ε (epsilon) zamenjuje znak pripadnosti $\in$.
Formalno je videti enako kot pri množicah. Gre pa za vsebinsko razliko.
Stavek $X\ \varepsilon\ a$ je resničen, če in samo če »*X*« pomeni neko bitje, »*a*« pa je obče ime za bitja, med katerimi je tudi *X*. Takim stavkom včasih rečemo tudi *singularni* stavki.
V matematiki so takšne definicije precej pogoste:
Pravokotnik je štirikotnik, ki ima vse notranje kote enake.
Kvadrat je pravokotnik, ki ima vse stranice enake.
Razpolovišče daljice je točka na tej daljici, ki je enako oddaljena od krajišč.

Grupiranje argumentov

Običajna oznaka za izrazni ali izjavni izraz je $f(x, y, z, \ldots)$, kjer je *f* znak za funkcijo (nekateri rečejo temu *funktor*), ki mu sledijo argumenti (v tem primeru spremenljivke), ločeni z vejico. Možno je vejice izpustiti in uporabiti presledke $f(x\ y\ z\ \ldots)$. Število argumentov je za vsako funkcijo natančno določeno. Včasih pa bi radi argumente nekoliko grupirati.
Recimo, da želimo vpeljati relacijo med štirimi točkami, ki pravi, da sta točki X in Y enako oddaljeni kot U in V. Da bi poudarili para, bi lahko vpeljali oznako d(X, Y; U, V), torej smo poudarili ločevanje s podpičjem. V strokovni literaturi pa najdemo oznako XY = UZ. To je majhna nedoslednost, ker enakost ni nov simbol. Za relacijo, da je točka Y med X in Z najdemo oznako X-Y-Z. Krožnica s središčem v S in polmerom, enakim razdalji med točkama X in Y, ima oznako S_{XY}.
Tudi v absolutni vrednosti $|x|$ ni funkcijskega znaka, kot tudi ne v x^n.
V zadnjem primeru bi veljalo ločiti spremenljivki *x* in *n* na spremenljivko *x* in parameter *n*.
V izrazu $kx+n$ imamo dva parametra in eno spremenljivko. Splošno linearno funkcijo bi bilo smiselno definirati z $⌊_[k, n](x) = kx+n$ in ne z $⌊_(k, n, x) = kx+n$. Obakrat gre za pravilno definicijo.
V prvem primeru govorimo o *povezovalni funkciji* (many-link function, večkrat povezani funkciji), v drugem pa o *enostavni funkciji*, oziroma kar *funkciji*.
Spomnimo se še, da pogosto govorimo o funkciji $f(x)$ čeprav gre za vrednost funkcije pri nedoločeni vrednosti *x*. Bolj natančni bi bili, če bi govorili o funkciji *f*. Natančnost je potrebna pri programiranju, saj gre za bistveno razliko. V t.i. lambda računu iz aritmetičnega izraza x^2+2x dobimo enomestno funkcijo $f = \lambda x.x^2+2x$. Če to ni na razpolago, moramo definirati $f(x) = x^2+2x$.
V splošnem bi lahko imeli več vrst parametrov:
G<p, q, r,…>[a, b, c,..](x, y, z,…)
Skupinam bi od desne proti levi rekli: parametri 0-te vrste (x, y, z, …, spremenljivke), parametri prve vrste (a, b, c, …), parametri druge vrste (p, q, r, …).
Formula $R[\omega, \alpha](r) = (r.\omega)\omega+(r-(r.\omega)\omega)\cos(\alpha)+(\omega\times r)\sin(\alpha)$

pomeni rotacijo vektorja r za kot α okoli enotskega vektorja ω. Torej sam izraz R[ω , α] pomeni rotacijo okoli ω za kot α.

Funkcije s poljubnim številom argumentov

V logiki prvega reda ima vsaka izjavna ali izrazna funkcija natančno določeno število argumentov, ki je razvidno iz definicije funkcije. V matematiki, posebej še pri programiranju, pa imamo funkcije, ki imajo poljubno število argumentov. Na primer: 1 = min[1, 2], 2= min[4, 5, 6, 2]. V mathematici je cel niz takšnih funkcij: Max, Min, … V matematiki pa jih običajno opredelimo tako, da je argument neprazna množica in so takšne funkcije enomestne.

Logika in eksistenca

Zamislimo si pogovorno področje, ki sestoji iz dveh reči **a** in **b**. Imejmo še predikat F. Zdaj lahko izjavi v predikatnem računu (logiki prvega reda)
$(\exists x)F(x)$ in $(\forall x)F(x)$ zapišemo zaporedoma $F(\mathbf{a}) \vee F(\mathbf{b})$, $F(\mathbf{a}) \wedge F(\mathbf{b})$.
Imejmo še dve imeni. Ime **e** naj bo prazno (sinonim za *nič*), ime **d** pa naj pomeni *nekaj*, to je **a** ali **b**.
Če upoštevamo novi imeni, bomo $(\exists x)F(x)$ in $(\forall x)F(x)$ razumeli kot
$F(\mathbf{a}) \vee F(\mathbf{b}) \vee F(\mathbf{e}) \vee F(\mathbf{d})$,
$F(\mathbf{a}) \wedge F(\mathbf{b}) \wedge F(\mathbf{e}) \wedge F(\mathbf{d})$,
Gre za popolnoma drugačno interpretacijo kvantifikacije. V logiki prvega reda imamo samo lastna imena, ki jim rečemo *individualne konstante*. V drugem primeru imamo tudi *prazno* ime in *občа* imena, ki označujejo več reči.
Prvo interpretacijo bomo imenovali *omejena kvantifikacija*, drugo pa *neomejena kvantifikacija*.
Zdaj pa vzemimo predikat $E(x) \Leftrightarrow x = x$ v omejeni kvantifikaciji. Potem velja $(\exists x)E(x)$ in tudi $(\forall x)E(x)$. Kako ga razširiti na neomejeno kvantifikacijo. Ena možnost je, da E(x) pomeni »x je vsaj eden«. Potem velja
$E(\mathbf{a}) \wedge E(\mathbf{b}) \wedge E(\mathbf{d})$, ne pa $E(\mathbf{e})$,
Za drugo interpretacijo velja $(\exists x)E(x)$, ne pa tudi $(\forall x)E(x)$.
Pri drugi pa velja $(\exists x)\neg E(x)$, namreč $\neg E(\mathbf{e})$,
Zato $\exists x$ ne smemo v drugi interpretaciji brati »obstaja tak x, da«, saj bi veljalo, da obstaja tak x, ki ne obstaja.
V tem primeru $\exists$ ni eksistenčni kvantifikator, ampak delni(partikularni) kvantifikator.
V običajnem jeziku lahko rečemo »Vse pa res ne obstaja.« ali pa »Pegaz ne obstaja.«
Zato v primeru neomejene kvantifikacije beremo:
$(\exists x)F(x)$ kot »Za kakšen x velja F(x).«
Sistem logike, ki ima tudi prazno ime in občа imena, je razvil poljski logik Lesniewski. Imenoval ga je *ontologija*.
Edini izven logični pojem je dvomestna relacija med imeni ε (beremo »je«).
Stavek A ε x je resničen, če je A lastno ime, x pa lastno ali občе ime, ki označuje tudi tisto, kar označuje A. Na primer:
Sokrat ε človek (Sokrat je človek.)
1 ε N (1 je naravno število.)
V tej teoriji lahko definiramo:
$ob(x) \Leftrightarrow x \varepsilon x$ (x je objekt, reč, …)
$x \varepsilon U \Leftrightarrow x \varepsilon x \vee \neg\, x \varepsilon x$ (x je karkoli, kar je vedno res)
$x \varepsilon 0 \Leftrightarrow x \varepsilon x \wedge \neg\, x \varepsilon x$ (x je nič, kar je vedno neresnično)
$x \varepsilon a \cap b \Leftrightarrow x \varepsilon a \wedge x \varepsilon b$ (x je a in b)

$x \varepsilon a \cup b \Leftrightarrow x \varepsilon x \wedge (x \varepsilon a \vee x \varepsilon b)$ (x je a ali b)
$x \varepsilon \sim a \Leftrightarrow x \varepsilon x \wedge \neg x \varepsilon a$ (x je ne-a, negacija imena)
V tej logiki lahko izrazimo omejeno kvantifikacijo, tako da se omejimo na objekte.
Stavek $(\exists x)F(x)$ omejene kvantifikacije moramo prevesti v neomejeno kot $(\exists x)(ob(x) \wedge F(x))$.
Stavek $(\forall x)F(x)$ omejene kvantifikacije moramo prevesti v neomejeno kot $(\forall x)(ob(x) \Rightarrow F(x))$.

Referenca:
C. Lejewski, Logic and Existence, Lesniewski's Systems, Martinus Nijhoff Publishers, 1984.

Definicije v sistemih Lesniewskega

V teorijah Lesniewskega definicij ne smemo vzeti kot okrajšave. Njihova vloga je razširitev slovarja in uvajanje novih semantičnih kategorij v sistemu, ki se razvija. Na ta način so definicije podobne aksiomom. V nadaljevanju nam *teza* pomeni aksiom, izrek ali definicijo. Prvo pravilo bo podobno uvajanju novega *relacijskega* znaka v logiki prvega reda. Drugo pravilo, to je pravilo uvajanja *nominalne* definicije, pa je najboljši približek temu, kar pravimo *definicija po najbližjem rodu in vrstni razliki*. (Človek je razumno živo bitje).. Imamo torej dve pravili uvajanja definicij.
1. Pri predpostavki, da je teza T, v danem trenutku, zadnja teza v sistemu, pravilo uvedbe *izjavne* definicije dovoljuje, da dodamo k sistemu novo tezo oblike
(1) $[\ldots](\alpha \Leftrightarrow \beta(\ldots))$,
pri predpostavki, da so izpolnjeni naslednji pogoji: *Definiens* (del, s katerim definiramo) je v sistemih Lesniewskega zapisan na levi strani definicijske ekvivalence in je v (1) zaznamovan z α, je smiseln izjavni izraz glede na T, to je, vsak konstanten termin, ki nastopa v α, nastopa v T ali pa v kakšni tezi pred T. Vsaka spremenljivka, ki nastopa v α, pripada že vpeljani semantični kategoriji. *Definiendum* (del, ki ga definiramo), je v (1) označen z $\beta(\ldots)$, in je ali (i) konstantna izjava, ki ne nastopa ne v T ne v nobeni tezi pred T ali (ii) enostavna ali povezovalna izjavna funkcija. Njen konstantni funktor, ki je označen z β, ne nastopa v T in tudi ne v nobeni tezi pred T. Argumenti funkcije so samo spremenljivke, nobena v definiendumu ne nastopa več kot enkrat in vsaka spremenljivka v definiendumu nastopa v definiensu kot prosta spremenjivka. Vsaka prosta spremenjivka v definiensu nastopa v definiedumu. Univerzalin kvantifikator (v (1) označen […]) veže vse proste spremenljivke v definicijski ekvivalenci.

Preden vpeljemo drugi tip definicije, povejmo, da *singularen* je stavek $A \varepsilon b$ resničen, če je »A« lastno ime (to je, zaznamuje natanko en objekt), »b« pa lastno ali občne ime, ki zaznamuje tudi objekt, ki ga zaznamuje »A«. Zgledi: $1 \varepsilon \mathbf{N}$ (1 je naravno število). Sokrat je človek (S ε človek). Znak »ε« beremo »je«.

2. Pri predpostavki, da je T zadnja teza sistema, pravilo nominalne definicije dovoljuje, da k sistemu dodamo novo tezo oblike
(2) $[A \ldots](\alpha(A \varepsilon \beta) \Leftrightarrow A \varepsilon \gamma(\ldots))$,
pri predpostavki, da so izpolnjeni naslednji pogoji: Definiens, ki je v (2) zaznamovan z $\alpha(A \varepsilon \beta)$, je smiseln izjavni izraz. Lahko je ali (i) oblike $A \varepsilon \beta$, kjer je β nominalni izraz ali (ii) je konjunkcija, katere en argument je omenjene oblike ali (iii) je konjunkcija prej opisane oblike, ki ji predhodi partikularni kvantifikator. Vsak konstantni termin, ki nastopa v definiensu, mora nastopati v T ali v kakšni predhodni tezi. Vsaka spremenljivka, ki nastopa v definiensu, mora pripadati že uvedeni semantični kategoriji. Izraz, ki je v (2) označen z $\gamma(\ldots)$, je ali (i) konstantno ime, ki ne nastopa ne v T ne v tezah pred T, ali (ii) enostavna ali povezovalna funkcija, katere konstantni funktor γ ne

nastopa ne v T ne v tezah pred T, in argumenti katere so spremenljivke, ki nastopajo v $\gamma(\ldots)$ samo enkrat. Vsaka spremenljivka ki nastopa v $A\ \varepsilon\ \gamma(\ldots)$, nastopa v $\alpha(A\ \varepsilon\ \beta)$ prosto in vsaka prosta spremenljivka v definiensu nastopa v definiendumu. Te spremenjivke veže univerzalni kvantifikator [A …].

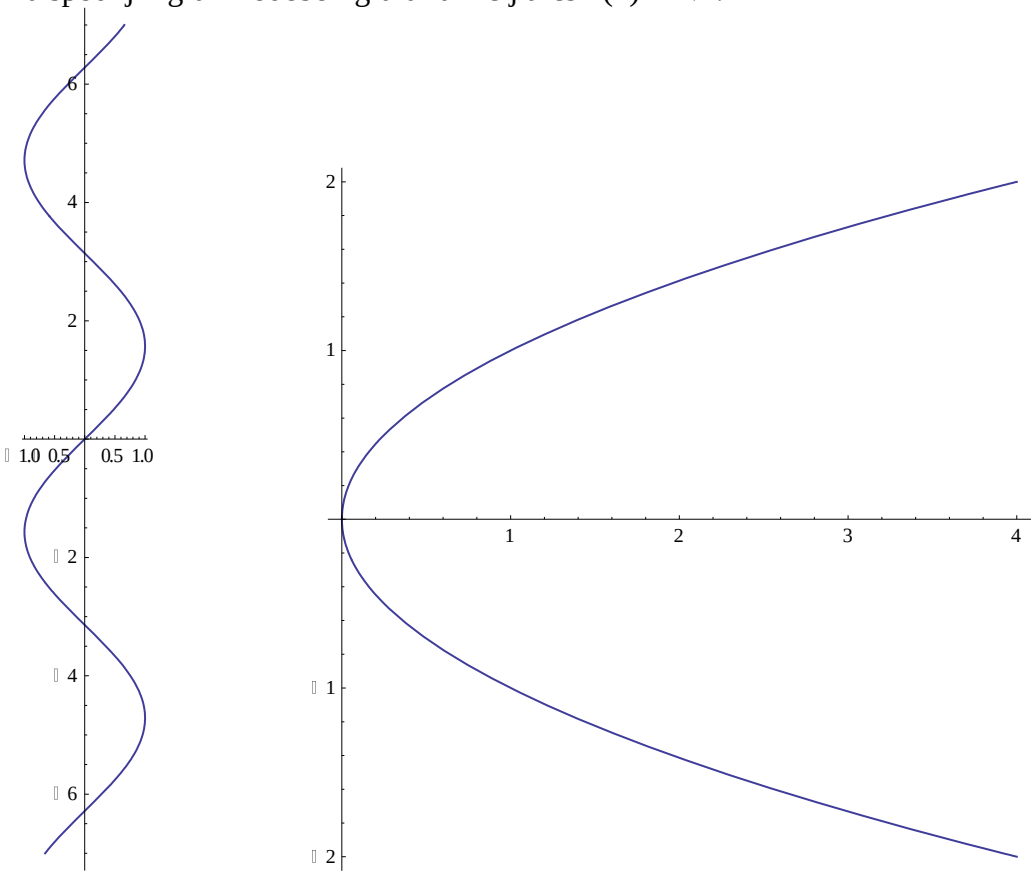
Nekoliko bolj restriktivna je naslednja shema nominalne definicije:
$[A\ \ldots](A\ \varepsilon\ \gamma(\ldots) \Leftrightarrow A\ \varepsilon\ A \wedge \Psi)$
Tu spremenljvke A …, nastopajo vse v definiendumu in prosto v definiensu, ki je tokrat na desni.

Če nekoliko poenostavimo zadevo: Znak, ki ga vpeljuje definicija, mora biti nov znak. Proste spremenljivke v definiensu so natanko tiste, ki nastopajo v definiendumu. Povezovalna funkcija je izraz oblike f{a b..}[p q](x y…), kjer z zaporedjem oklepajev ločimo spremenljivke na običajne spremenljivke x y … in parametre a, b, p, q,…Pri običajni funkciji imamo samo en oklepaj.
Znaku za funkcijo rečemo funktor.
Seveda bomo lahko pisali tudi definicije, kjer je, kot je običajno, definiendum na levi strani ekvivalence.
Zgledi nominalnih definicij (glavni univerzalni kvantifikator opuščamo, definiens je na desni, znak za nominalno dvomestno funkcijo pa pišemo med argumenta):
$A\ \varepsilon\ x \cap \mathbf{y} \Leftrightarrow A\ \varepsilon\ x \wedge B\ \varepsilon\ x$ (A je x in y)
$A\ \varepsilon\ x \cup \mathbf{y} \Leftrightarrow A\ \varepsilon\ A \wedge (A\ \varepsilon\ x \vee B\ \varepsilon\ x)$ (A je x ali y)
$A\ \varepsilon\ \lambda \Leftrightarrow A\ \varepsilon\ A \wedge \neg A\ \varepsilon\ A$ (A je nič)
$A\ \varepsilon\ \mathbf{U} \Leftrightarrow A\ \varepsilon\ A$ (A je objekt, A je nekaj)
$A\ \varepsilon\ -\mathbf{x} \Leftrightarrow A\ \varepsilon\ A \wedge \neg(A\ \varepsilon\ x)$ (A je ne-x $\Leftrightarrow$ A je objekt, ki ni x)
»U« pomeni »stvar ali bitje« ali »objekt« (tudi »nekaj«).
»λ« je prazno ime, po slovensko nič.
Stavek oblike $A\ \varepsilon\ \lambda$ je vedno neresničen. V matematiki je prazno ime 1/0.
Definicijo oblike $A\ \varepsilon\ \gamma(\ldots) \Leftrightarrow A\ \varepsilon\ A \wedge \Psi$, bi lahko brali tudi $A\ \varepsilon\ \gamma(\ldots) \Leftrightarrow A\ \varepsilon\ U \wedge \Psi$ in natanko ustreza definiciji oblike $A \in \gamma(\ldots) \Leftrightarrow A \in U \wedge \Psi$ pri množicah (z uporabo aksioma o podmnožicah). Eksplicitna definicija bi bila $\gamma(\ldots) = \{A; A \in U \wedge \Psi\}$.

Identičnost objekta definiramo z izjavno definicijo: $X = Y \Leftrightarrow \mathbf{X}\ \varepsilon\ Y \wedge \mathbf{Y}\ \varepsilon\ X$
Recimo, da je »U« »naravno število, vključno z 0«.
Zdaj definiramo deljenje (predpostavimo, da množenje že imamo):.
$X\ \varepsilon\ Y/Z \Leftrightarrow X\ \varepsilon\ N \wedge Y = X.Z$
Navidezna, oziroma prazna imena, so 3/2, 5/2. Singularna (lastna) imena so 6/2, 3, 10/5, … Kaj pa 0/0?
$X\ \varepsilon\ 0/0 \Leftrightarrow 0 = X.0$
Vidimo da je »0/0« po pomenu isto kot N.
Prednost nominalnih definicij v sistemih Lesniewskega v primerjavi z definicijami funkcijskega znaka v logiki prvega reda je ta, da ni potrebno dokazovati eksistenčnega pogoja in pogoja enoličnosti. Imamo pa zato lastna, obča in prazna imena.
Tu tudi ne moremo govoriti o eksistenčnemu kvantifikatorju, saj spremenljivke lahko nadomestimo tudi s praznim imenom.
Da obstaja vsaj en *a* lahko definiramo takole:
$ex(a) \Leftrightarrow [\exists X]\ X\ \varepsilon\ a$ (za kak X, X je a)
Da je *a* en sam:
$ob(a) \Leftrightarrow [\exists b]\ a\ \varepsilon\ b$
Da je *a* največ eden pa
$sol(a) \Leftrightarrow [YZ](Y\varepsilon\ a \wedge Z\ \varepsilon\ a \Rightarrow Y\ \varepsilon\ Z)$

Definicije inverznih funkcij

Funkcija y = sin(x) je preslikava R->[-1,1]. V sistemih Lesniewskega bi lahko definirali:
$y \varepsilon \text{Arcsin}(x) \Leftrightarrow x = \sin(y)$
Potem velja $0 \varepsilon \text{Arcsin}(0)$, $\pi \varepsilon \text{Arcsin}(0)$, $-\pi \varepsilon \text{Arcsin}(0)$, $2\pi \varepsilon \text{Arcsin}(0)$. Vse so to koti, ki imajo sinus enak 0.
Včasih so govorili o večlični funkciji Arcsin.
Po današnjih dogovorih v okviru logike prvega reda naslednja definicija ni mogoča:
$y = \text{Arcsin}(x) \Leftrightarrow x = \sin(y)$
Nista izpolnjena pogoja o eksistenci (na primer za x=2) in enoličnosti y=0, y=π,…).
Zato bi morali zapisati pogojno definicijo
$y \in [-\pi/2, \pi/2] \wedge x \in [-1, 1] \Rightarrow (y = \arcsin(x) \Leftrightarrow x = \sin(y))$
Definicija kvadratnega korena:
$y \varepsilon \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2$ ali
$y \geq 0 \wedge x \geq 0 \Rightarrow (y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2)$
Je pa tu določena razlika. Po prvi definiciji je √4 obče ime za -2 in 2 (±2); po drugi pa je to samo 2.
Definicija naravnega logaritma:
$y \varepsilon \log(x) \Leftrightarrow x = e^y$ ali
$x > 0 \Rightarrow (y = \log(x) \Leftrightarrow x = e^y)$
V prvem primeru je izraz log(-1) definiran, a je prazno ime; v drugem primeru pa ni definiran.
Na spodnjih grafih odebeli grafa funkcij arcsin(x) in √x.



Peanova aritmetika

G. Peano (1858-1932, slika spodaj desno) je prvi predstavil aksiome za naravna števila. V predikatnem računu prvega reda z enakostjo se najpogosteje vzamejo naslednji aksiomi. Spet velja dogovor, da univerzalnih kvantifikatorjev, ki se nanašajo na celotno formulo, ne napišemo.

P1 $x+1=y+1 \Rightarrow x=y$
P2 $x+1 \neq 0$
P3 $0+1=1$
P4 $x+0=x$
P5 $x+(y+1)=(x+y)+1$
P6 $x \times 0=0$
P7 $x \times (y+1)=(x \times y)+x$
P8 $(Q(0) \wedge (\forall x)(Q(x) \Rightarrow Q(x+1))) \Rightarrow (\forall x)Q(x)$

P8 je v resnici aksiomska shema. Q(x) je lahko poljubna formula s prosto spremenljivko x.
Če bi vzeli samo aksiome P1-P5, bi imeli aritmetiko s seštevanjem in brez množenja (Presburgerjeva aritmetika), ki je odločljiva teorija. To je dokazal Presburger (1904-1943, slika levo). Če pa vzamemo aksiome P1-P7, pa dobimo Robinsonovo aritmetiko, ki pa je neodločljiva teorija (R. M.Robinson (1911-1995), slika v sredini).





Teorija je odločljiva, če obstaja postopek (algoritem), ki ugotavlja, ali je formula izpeljiva ali ni. Za Presburgerjevo aritmetiko se da dokazati, da je super-eksponentno težavna.

Dokažimo, da velja x+1=1+x. Najprej moramo dokazati 0+1=1+0.
Po P3 je 0+1=1, po P4 je 1+0=1. Sledi 0+1=1+0 (lastnost identitete).
Predpostavimo zdaj, da velja n +1 = 1+ n, potem je (n + 1)+ 1=(1+n)+1 [dodamo 1],(1+n)+1=1+(n+1) [P5]. Po P8 je $(\forall x)(x+1=1+x)$.

Definicije v aritmetiki

Nekaj preprostih definicij konstant, funkcij in relacij:
2=1+1
3=1+1+1 ali 3=2+1
x' = x+1 (x' je naslednik naravnega števila x)
$x|y \Leftrightarrow (\exists z)(y = zx)$ (število x deli število y, znak × izpuščamo)
Po tej definiciji velja x|0 za vsak x, saj je 0=0x za vsak x.
$Pr(x) \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge (\forall y)(y|x \Rightarrow y=1 \vee y = x)$ (x je praštevilo)
$x \leq y \Leftrightarrow (\exists z)\ y = x+z$
$x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$
$x \neq 0 \wedge y \neq 0 \Rightarrow (z = D(x,y) \Leftrightarrow z|x \wedge z|y \wedge (\forall w)(w|x \wedge w|y \Rightarrow w \leq z))$ (definicija največjega skupnega delitelja je smiselna le za cela števila >0)
$z = v(x,y) \Leftrightarrow x|z \wedge y|z \wedge (\forall w)(\ x|w \wedge y|w \Rightarrow z \leq w)$ (definicija najmanjšega skupnega večkratnika)

Recimo, da velja $(\forall \mathbf{a})(\exists z)G(\mathbf{a},x)$, potem lahko definiramo

f(a) = μxG(**a**,x), kjer desno stran beremo: najmanjši tak x, da je G(**a**,x). Tu nam **a** označuje vse spremenljivke, ki nastopajo prosto v G(**a**,x) razen spremenljivke x.

Enoličnost izhaja iz dejstva, da ima vsaka neprazna množica naravnih števil najmanjše število.
$z = \mu x Q(\mathbf{a}, x) \Leftrightarrow Q(\mathbf{a}, z) \wedge (\forall w)(Q(\mathbf{a}, w) \Rightarrow z \leq w)$
Strogo gledano je pogoj o eksistenci $(\forall \mathbf{a})(\exists z)(Q(\mathbf{a}, z) \wedge (\forall w)(Q(\mathbf{a}, w) \Rightarrow z \leq w))$, vendar ta sledi iz $(\forall \mathbf{a})(\exists z)Q(\mathbf{a}, z)$ in dejstva, da ima vsaka neprazna množica naravnih števil najmanjši element.
Podobno je z definicijo natančne spodnje meje za neko množico realnih števil:
Število x je natančna (najmanjša) spodnja meja množice $M \Leftrightarrow (\forall y \in M)x \leq y \wedge (\forall \varepsilon > 0)(\exists\, y \in M)x-\varepsilon > y$
Prvi del desne strani pravi, da je M spodnja meja, drugi pa, da x-ε ni več spodnja meja.
Seveda pa ni nujno, da ima množica natančno spodnjo mejo. Toda, če jo ima, ima tudi natančno spodnjo mejo.
Aksioma P4 in P5 (podobno tudi P6 in P7) se včasih imenujeta tudi rekurzivna definicija vsote (produkta). Vzemimo definicijo fakultete:
0!=1
(n+1)!=(n+1)n!
Slabost te definicije je, da na levi strani druge formule nastopa izraz n+1 in ne samo spremenljivka n. To lahko popravimo:
0!=1
n!=n(n-1)!
Vendar moramo ta dva stavka tolmačiti kot:
$(n=0 \Rightarrow n!=1) \wedge (n>0 \Rightarrow n!=n(n-1)!)$
Moti nas n-1, ki za n=0 ni definiran, če smo razliko definirali z
$x > y \Rightarrow (z = x-y \Leftrightarrow x = y+z)$.
Lahko pa bi naredili tudi z definicijo omejene razlike (»odvzemi, kar lahko«)
$z=x-y \Leftrightarrow (x \leq y \Rightarrow z=0 \wedge x > y \Rightarrow x=y+z)$

Pri n! je znak za funkcijo zadaj. Dogovor je tudi, da funkcijski znak veže bolj kot znak za operacijo množenja.
O tem, kako pisati funkcijski izraz f(x,y,z) imamo v matematiki precej nesistematično prakso.
Oglejmo si nekaj rekurzivnih definicij.
$x^0=1$
$x^n=xx^{n-1}$
Spomnimo se na običajne funkcije in zaporedja: $|x|$, $\sin x$, $\log_a x$, Re z, x^2, a_n,
Povsod definirano funkcijo predhodnika lahko definiramo:
$y = 'x \Leftrightarrow (x=0 \Rightarrow y=0) \wedge (x>0 \Rightarrow y'=x)$
Včasih je jezikovno bližja formulacija:
$y = 'x \Leftrightarrow (y=0 \Leftarrow x=0) \wedge (y'=x \Leftarrow x>0)$
Možno je tudi:
$y = 'x \Leftrightarrow (x=0 \wedge y=0) \vee (x>0 \wedge y'=x)$
ali (jezikovno bolj nepraktično)
$y = 'x \Leftrightarrow (y=0 \vee x \neq 0) \wedge (y' = x \vee x = 0)$
Običajno izraza 'x ne uporabljamo in pišemo x-1.

Rekurzija z dvojno osnovo
Primer, Fibbonaccijevo zaporedje:
F(0)=1;
F(1)=1;
F(n)=F(n-1)+F(n-2).
Izračunaj F(4), F(5).
Bolj splošno bi lahko imeli odvisnost od n-1, n-2, n-3, …

Hkratna rekurzija
$\varphi(1)=1$,
$\psi(1)=2$;
$\varphi(n)= \varphi(1)+ \psi(1)+3$;
$\psi(n)= \varphi(n-1)\psi(n-1)$.
Izračunaj: $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, $\psi(2)$.

Regresivna rekurzija
$p=G(n) \Leftrightarrow ((\exists m)(n=2^m \wedge p=n^2+2) \vee (\neg (\exists m)(n=2^m \wedge p=2G(n+1)-1)$
Izračunaj G(1),G(2),…
$G(1)=G(2^0)=3$;
G(0)=2G(1)=5,
G(4)=6,
G(3)=11.
Tu imamo eksplicitno definicijo za vrednosti neodvisne spremenljivke 1, 2, 4, 8,…
Nato pa računamo nazaj za 7, 6, 5.

Dvojna rekurzija
Matematika dopušča tudi naslednjo rekurzivno definicijo:
$\alpha(n,a)=(0 \Leftarrow n=0) \wedge (1 \Leftarrow n=1) \wedge (a \Leftarrow \neg(n=0 \vee n=1))$
To običajno povemo takole:
$\alpha(n,a)=(0$, če je $n=0) \wedge (1$, če je $n=1) \wedge (a$, drugače)
Zdaj pa definirajmo trimestno funkcijo:
$\xi(n, b, a) = (a+b \Leftarrow n=0) \wedge (\alpha(n-1,a) \Leftarrow b=0) \wedge (\xi (n-1, \xi(n, b, a), a) \Leftarrow \neg(n=0 \vee b=0))$
Izračunaj $\xi(1, 1, 1)$.

Nekoliko bolj enostaven je naslednji primer *dvojne* rekurzije, kjer sta α in β dani 4 in 3 mestni funkciji
$\varphi(n, b) = (1 \Leftarrow (n=0 \vee n=0)) \wedge (\alpha(n-1,b-1, \varphi(n-1, \beta(n-1,b-1, \varphi(n,b-1))), \varphi(n,b-1)) \Leftarrow \neg (n=0 \vee n=0)$

V [4] je obravnava še nekoliko šibkejša teorija od Robinsonove aritmetike, a je tudi neodločljiva.

Reference:
[1] Presburger Arithmetic, http://mathworld.wolfram.com/PresburgerArithmetic.html
[2] Peano's Axioms, http://mathworld.wolfram.com/PeanosAxioms.html
[3] Decision Problem, http://mathworld.wolfram.com/DecisionProblem.html
[4] I. Hafner, On some subtheory of formal arithmetic, Glasnik matematički, Vol. 12, (32),(1977), 229-231.

Osnovne rekurzivne funkcije

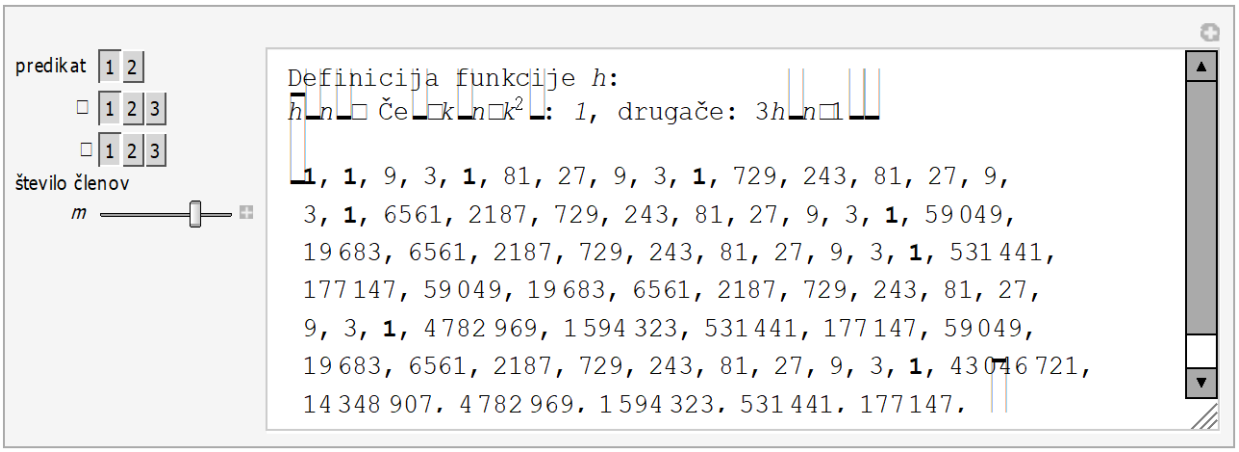
Naša osnovna množica bodo naravna števila, ki jim dodamo število 0. Zanimale nas bodo funkcije (tudi večmestne), ki so definirane v tej množici. Spomnimo se na definicijo fakultete, ki je podana z dvema stavkoma:
$0! = 1;$
$n! = n \times (n\text{-}1)!.$
Tu nam n-1 pomeni predhodnika naravnega števila n. Število 0-1 ni definirano. Lahko vzamemo, da je 0-1 enako 0. Izraza 0-1 ne potrebujemo, saj je druga vrstica v veljavi za $n>0$.
Čeprav se znak ! pojavi tudi na desni strani, lahko izračunamo vrednosti funkcije: Na primer $1! = 1 \times (1\text{-}1)! = 1 \times (0)! = 1 \times 1 = 1$.
V logiki prvega reda bi to definicijo lahko zapisali:
$k = n! \Leftrightarrow (k=0 \Leftarrow n=0) \wedge (k = n \times (n\text{-}1)!. \Leftarrow n>0)$
Splošna shema definicije z *osnovno* (*primitivno*) rekurzijo je naslednja:
(i) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
(ii) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = h(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y\text{-}1))$
Tu sta g in h že znani funkciji.
Zgleda:
$x \times 0 = 0$
$x \times y = x \times (y\text{-}1) + x$
Tu je definirano množenje, če je seštevanje že dano.
$x^0 = 1$
$x^y = x \cdot x^{y-1}$ (Definicija potence, množenje smo pisali s piko.)

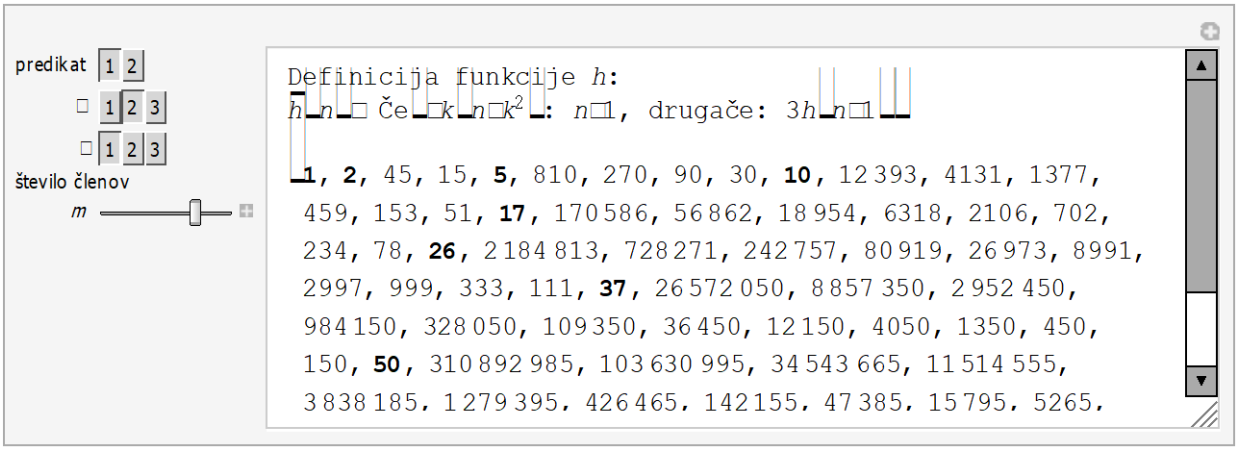
Druga splošna shema je *kompozicija* funkcij. Dana je funkcija h in funkcije $g_1, g_2, \ldots, g_m$. Novo funkcijo dobimo s kompozicijo s stavkom:
(iii)) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h(g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$
Potrebujemo še nekaj začetnih funkcij:
$Z(x) = 0$ (funkcija nič).
$S(x) = x+1$ (naslednik števila x).
$P^n_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; *projekcijske* funkcije)
Množica osnovnih (primitivnih) rekurzivnih funkcij je podana z naslednjo induktivno definicijo:
OR1 Funkcije Z, S in P^n_i so osnovne rekurzivne funkcije.
OR2 Če so $g_1, g_2, \ldots, g_m$ n-mestne osnovne rekurzivne funkcije in je h m-mestna osnovno rekurzivna funkcija, potem je funkcija definirana s stavkom (iii) osnovno rekurzivna funkcija.
OR3 Če je g n-mestna in h $(n+1)$-mestna osnovno rekurzivna funkcija, potem je funkcija definirana s stavkoma (i) in (ii) $(n+1)$-mestna osnovno rekurzivna funkcija.
OR4 Neka funkcija je osnovno rekurzivna, če je dobljena po točkah OR1-OR3.
Vse praktično uporabne aritmetične funkcije so osnovno rekurzivne [1, str. 217-233].

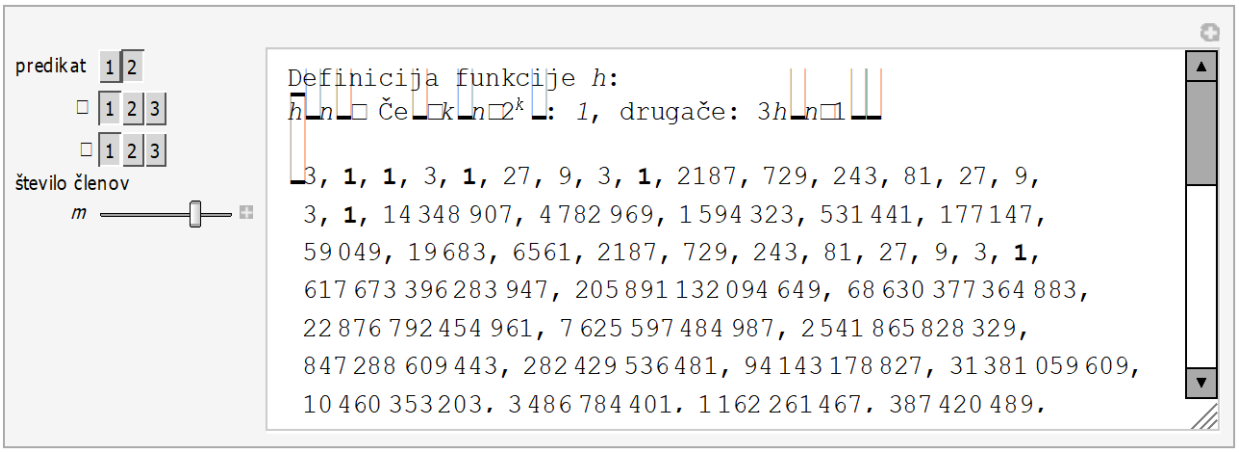
Referenca:
[1] S. C. Kleene, Introduction to Metamathematics, New York, 1952

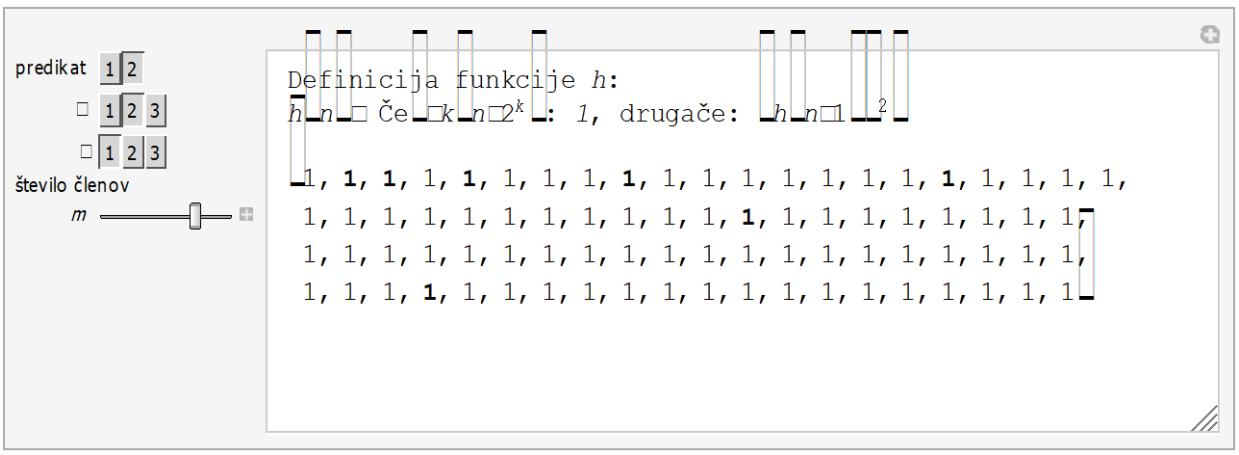
Regresivna rekurzija

V tem prispevku bomo obravnavali naravna števila, ki jim dodamo še število 0. Zanimale nas bodo funkcije, katerih definicijsko območje in zaloga vrednosti so elementi te množice. Funkcije bodo lahko tudi večmestne.
Z dvema stavkoma (v sistemih kot je mathematica) lahko definiramo funkcijo *fakulteta*:
$0! = 1$;
$n!=n\times(n-1)!$.
Takšni definiciji rečemo (osnovna) rekurzija.
Ta dva stavka (ukaza) lahko tolmačimo takole:
Če je $n=0$: 1, drugače: $n\times(n-1)!$.
Prvi stavek je začetni pogoj, drugi pa rekurzivni pogoj.
Tu beseda *rekurzija* pomeni ponovno javljanje, v našem primeru funkcijskega znaka !
To pa ne pomeni krožne definicije, to je, da znak ! definiramo samim s seboj.
Vrednost $0! = 1$ nam da začetni pogoj. Vrednost $1!=1\times0!= 1\times1=1$ pa izpeljemo iz prve vrednosti in rekurzivnega pogoja.
Zdaj pa vzemimo, da imamo neko naraščajočo funkcijo τ in definiramo predikat
$P(n) \Leftrightarrow (\exists k)(n = \tau(k))$
Ker je τ naraščajoča funkcija, bomo imeli neskončno mnogo števil n oblike $\tau(k)$, vendar pa to ne bodo vedno vsa števila.
Zdaj pa imejmo še dve enomestni funkciji ϕ in κ. Definirajmo novo funkcijo po shemi:
$h(n)$ = Če[$P(n)$: $\phi(n)$, drugače: $\kappa(h(n+1))$].
To je shema za definicijo funkcije z regresivno rekurzijo (za nazaj delujočo rekurzijo ali vzvratno rekurzijo).
Če velja $P(n)$ izračunamo $\phi(n)$. Drugače pa moramo najprej izračunati $h(n+1)$, to je vrednost pri naslednjiku od n, to je pri $n+1$, nato pa je $h(n) = \kappa(h(n+1))$.
Gremo torej v obratni smeri kot pri osnovni rekurziji.
V logiki prvega reda bi definicijo zapisali v eni od oblik:
$m = h(n) \Leftrightarrow (P(n) \Rightarrow m = \phi(n)) \wedge (\neg P(n) \Rightarrow m = \kappa(h(n+1)))$
$m = h(n) \Leftrightarrow (P(n) \wedge m = \phi(n)) \vee (\neg P(n) \wedge m = \kappa(h(n+1)))$
$m = h(n) \Leftrightarrow (m = \phi(n) \Leftarrow P(n)) \wedge (m = \kappa(h(n+1)) \Leftarrow \neg P(n))$
Nekaj zgledov:







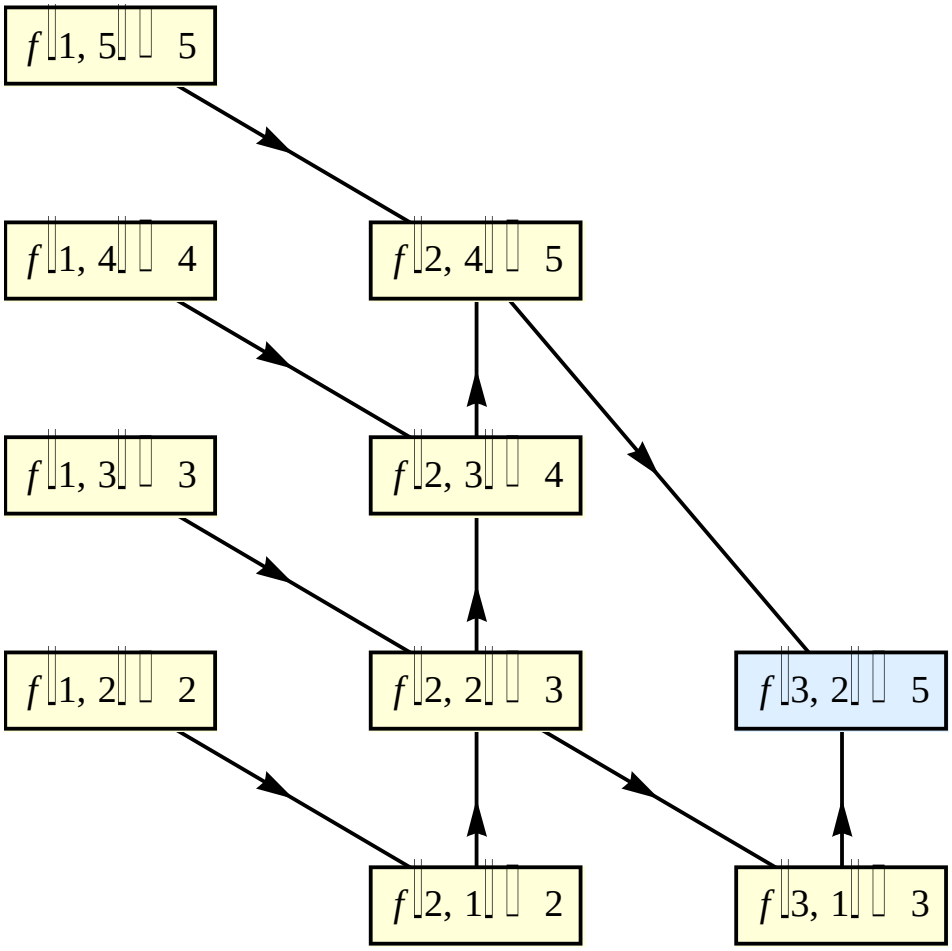


Referenca:

[1] I. Hafner, Regressive Recursion, *Mathematica Balcanica*, &:13(1976), 75-77.

Dvojno rekurzivne funkcije

Ackermann je l. 1928 raziskoval funkcije z naslednjimi definicijami [3, str. 272]:
$\alpha(0, a) = 0$;
$\alpha(1, a) = 1$;
$\alpha(n, a) = a$;
$\xi(0, b , a) = a + b$;
$\xi(n, 0, a) = \alpha(n\text{-}1, a)$;
$\xi(n, b, a) = \xi(n\text{-}1, \xi(n\text{-}1, b, a), a)$;
$\varphi(a) = \xi(a, a, a)$.
Ugotovil je, da funkcija φ narašča hitreje kot vsaka funkcija, ki je definirana samo z osnovno (primitivno) rekurzijo.
Ugotovimo, da je $\xi(1, b, a) = \xi(0, \xi(0, b, a), a) = \xi(0, a+b, a) = 2a+b$, …
Nekoliko bolj poenostavljen primer je iz [1]. Tokrat definicijsko področje ne vsebuje števila 0.
$f(1,n) = n$;
$f(m,1) = f(m\text{-}1,2)$;
$f(m,n) = f(m\text{-}1,f(m, n\text{-}1)+1)$.
Zgled za računanje $f(3,2)$ nam daje naslednji grafikon:



R. Peter je l. 1934 [3, str. 273] raziskovala *k*-vrstno rekurzijo. Splošna shema za *dvojno* rekurzijo je
φ(0,b)=1;
φ(n,0)=1;

φ(n,b)=β(n-1,b-1, φ(n-1,γ(n-1,b-1, φ(n,b-1))), φ(n,b-1)).
Tu sta β in γ primitivno rekurzivni funkciji.

Oglejmo si primer kot bi ga zapisali v jeziku *mathematice*:

```
ϕ[0,b_]:=1;
ϕ[n_,0]:=1;
ϕ[n_,b_]:=2(n-1)+b-1+ϕ[n-1,n-1+b-1+ϕ[n,b-1]];
```

n\b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121

n\b	0	1	2
0	1	1	1
1	1	1	2
2	1	4	9
3	1	20	581

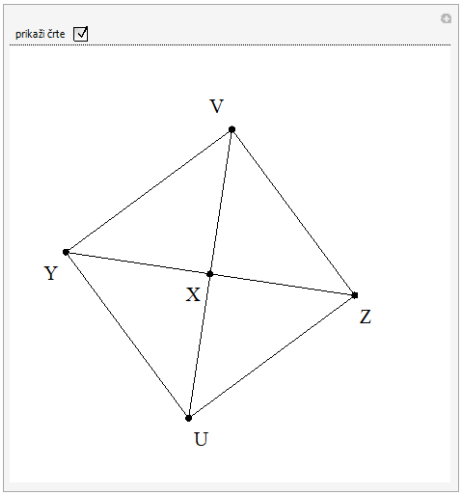
Računanje `vrednosti ϕ[3,3] pa presega 1024 korakov. Dobimo ϕ[3,3] =343402.`

Reference:
[1] "Recursion in the Ackermann Function" from the Wolfram Demonstrations Project http://demonstrations.wolfram.com/RecursionInTheAckermannFunction/
Contributed by: Stephen Wolfram
[2] Weisstein, Eric W. "Ackermann Function." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/AckermannFunction.html
[3] S. C. Kleene, Introduction to Metamathematics, New York, 1952

Kaj je elementarna geometrija

Pierijeva relacija

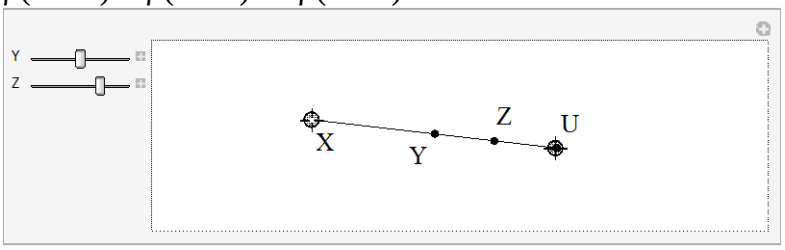
Elementarna geometrija je tisti del evklidske geometrije, ki ga lahko opišemo v jeziku prvega reda z enakostjo (identiteto). To pomeni, da uporabljamo običajne stavčne povezave ($\neg, \wedge, \vee, \Leftrightarrow, \Rightarrow$), kvantifikatorja ($\exists,\forall$) , znak za identičnost ($=$) in različnost ($\neq$).
Pieri je dokazal, da za formalizacijo zadošča samo en osnoven pojem. To je pri njem trimestna relacija, da je točka X enako oddaljena od točk Y in Z (pisali bomo XY=XZ).
Tarski je formaliziral to geometrijo z dvema osnovnima (včasih rečemo primitivnima) pojmoma. To sta trimestna relacija, da je točka X med Y in Z (pisali bomo $\beta(YXZ)$), in štirimestna relacija, da sta točki X in Y enako oddaljeni kot Z in W (pisali bomo $\delta(XYZW)$ ali XY=ZW). Področje pogovora so točke v neki evklidski ravnini. Spremenljivke A, B, C, X, Y, … se nanašajo samo na točke.
Bernays [1] je formaliziral geometrijo s trimestno relacijo, da točke X, Y in Z tvorijo pravi kot z vrhom v Y (pisali bomo τ (XYZ)).
Tule bomo dokazali, da je s Pierijevo relacijo možno definirati relaciji β in δ. Definicije so iz [3, str. 71-72].
$AB \leq CD \Leftrightarrow (\forall X)(BX=CX \Rightarrow (\exists Y)(AY= YB = BX)$
$\beta(ABC) \Leftrightarrow A \neq B \wedge C \neq B \wedge (\forall X)(XA \leq AB \wedge XC \leq CB \Rightarrow X = B)$
$\lambda(ABC) \Leftrightarrow A = B \vee A = C \vee \beta(BAC) \vee \beta(ABC) \vee \beta(ACB)$
$\sigma(ABC) \Leftrightarrow (\forall X)(\lambda(ABX) \wedge AB = BX \Leftrightarrow X = A \vee X = C)$
$AB = CD \Leftrightarrow (\exists XY)(\sigma(ABC) \wedge \sigma(ABC) \wedge YC = CD)$
Formula $\lambda(ABC)$ pomeni, da so točke A, B, C kolinearne, $\sigma(ABC)$ pa, da je B razpolovišče daljice AC.
Dokažimo še, da je Pierijevo relacijo relacijo možno definirati s pomočjo relacije $\tau(ABC)$, da A, B in C tvorijo pravi kot z vrhom v B.
$\sigma(XYZ) \Leftrightarrow (X = Y \wedge X = Z) \vee (\exists UV)(\tau(UYZ) \wedge \tau(YUV) \wedge \tau(VYZ) \wedge \tau(ZUV) \wedge \tau(ZVU) \wedge \tau(XYV))$
$XY = YZ \Leftrightarrow (\exists R)(\sigma(XYZ) \vee (\sigma(RXZ) \wedge \tau(RXY))$
Spodnja slika prikazuje definicijo razpolovišča.



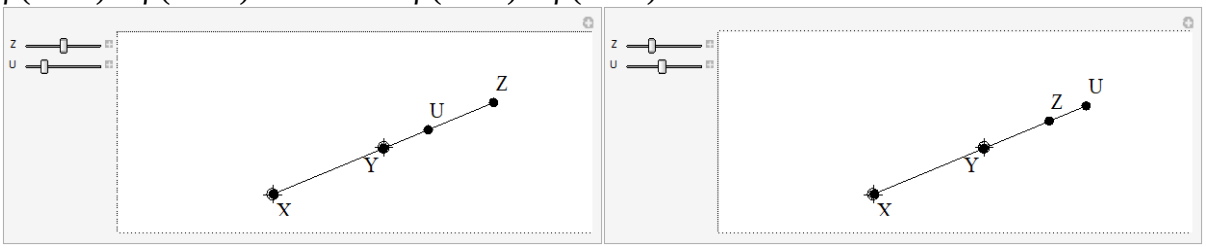
Seveda pa je enostavno definirati Pierijevo relacijo s pomočjo relacije $\delta(ABCD)$, oziroma AB=CD. Je kar poseben primer AB=AC.

Sistem Tarskega

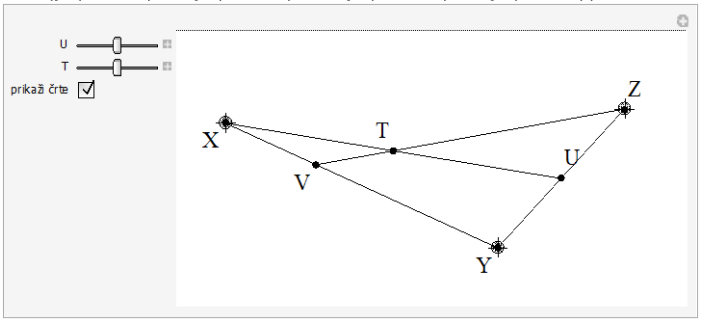
Kot osnovna (prvotna, začetna) znaka nastopata β in δ. β(XYZ) pomeni da točka Y leži med X in Z (tu ni izključeno, da Y sovpada z X ali Z); δ(XYZU) pa pomeni, da je X oddaljen od Y toliko kot Z od U. Opazimo, da argumentov ne ločimo z vejicami.
V tej formalizaciji je področje pogovora množica točk v neki ravnini. Torej nimamo premic, daljic, krožnic. Če imamo dani točki A in B, potem predikat β(AXB) pomeni vse točke med A in B (vključno z A in B), kar ni nič drugega kot daljica AB. Če imamo dane točke A, B, C, potem enomestni predikat δ(AXBC) pomeni vse točke X, ki so od A oddaljene enako kot B od C. Videli smo, da bi zadoščala že samo relacija δ, a bi bili aksiomi precej bolj kompliciran.
Aksiome teorije sestavlja 12 stavkov in aksiomska shema A13, ki pa nadomešča neskončno mnogo aksiomov.
Za razliko od [2] bomo uporabljali velike črke za točke. Prav tako bomo opuščali univerzalne kvantifikatorje, ki se nanašajo na celotne stavke.
A1 [Aksiom identitete za vmesnost]
$\beta(XYZ) \Rightarrow X = Y$
A2 [Aksiom tranzitivnosti za vmesnost]
$\beta(XYU) \wedge \beta(YZU) \Rightarrow \beta(XYZ)$



A3 [Aksiom povezanosti za vmesnost]
$\beta(XYZ) \wedge \beta(XYU) \wedge X \neq Y \Rightarrow \beta(XZU) \vee \beta(XUZ)$

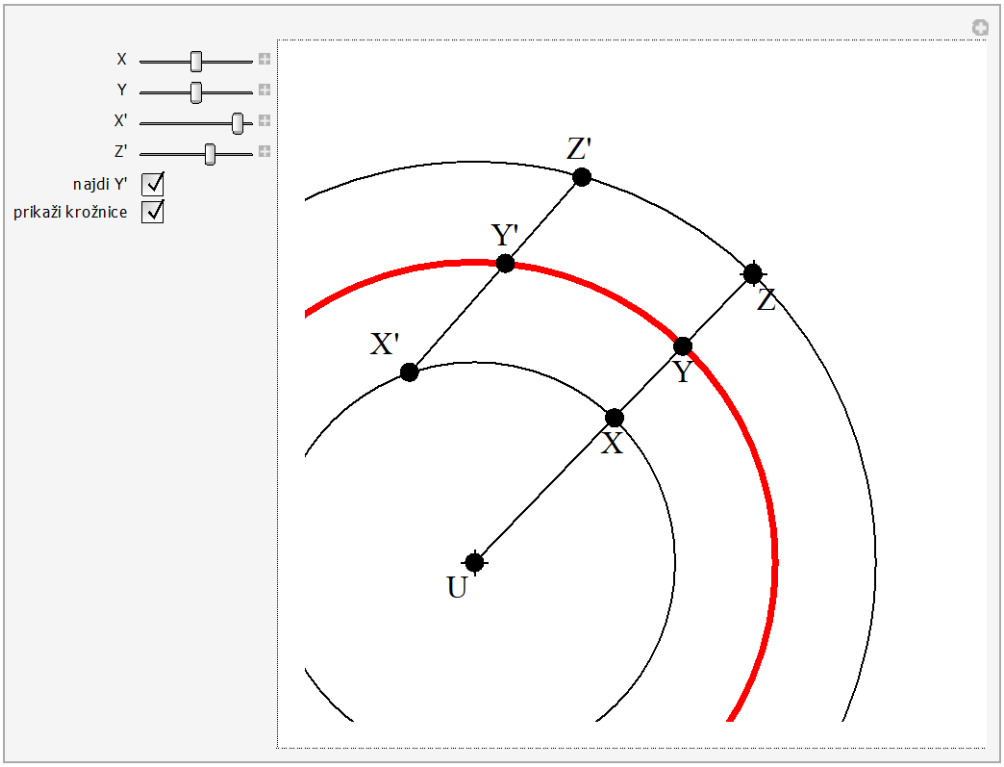


A4 [Refleksivnost enake oddaljenosti]
$\delta(XYYX)$
A5 [Aksiom identitete za enako oddaljenost]
$\delta(XYZZ) \Rightarrow X = Y$
A6 [Tranzitivnost enake oddaljenosti]
$\delta(XYZU) \wedge \delta(XYVW) \Rightarrow \delta(ZUVW)$
A7 [Paschev aksiom]
$\exists V(\beta(XTU) \wedge \beta(YUZ) \Rightarrow \beta(XVY) \wedge \beta(ZTV))$



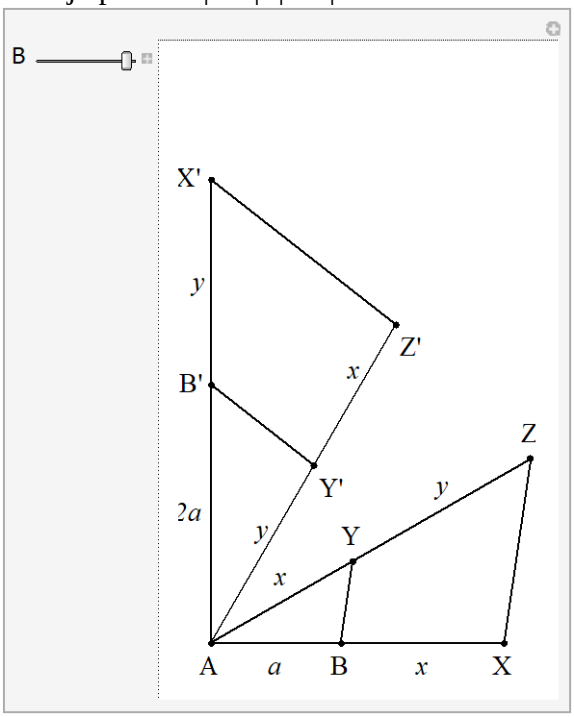
A8 [Evklidov aksiom]
$(\exists VW)(\beta(XUT) \wedge \beta(YUZ) \wedge X \neq U \Rightarrow \beta(XZV) \wedge \beta(XYW) \wedge \beta(VTW)$

A9 [Aksiom petih daljic]
$\delta(XYX'Y') \wedge \delta(YZY'Z') \wedge \delta(XUX'U') \wedge \delta(YUY'U') \wedge \beta(XYZ) \wedge \beta(X'Y'Z') \wedge X \neq Y \Rightarrow \delta(ZUZ'U')$
A10 [Aksiom o konstrukciji daljice]
$\exists Z(\beta(XYZ) \wedge \delta(YZUV))$
A11 [Aksiom o spodnji dimenziji]
$(\exists XYZ)(\neg\beta(XYZ) \wedge \neg\beta(YZX) \wedge \neg\beta(ZXY))$
A12 [Aksiom zgornje dimenzije]
$\delta(XUXV) \wedge \delta(YUYV) \wedge \delta(ZUZV) \wedge U \neq V \Rightarrow \beta(XYZ) \vee \beta(YZX) \vee \beta(ZXY)$
A13 [Elementarni aksiomi zveznosti] Vsi stavki oblike
$(\exists Z)(\forall XY)(\varphi \wedge \psi \Rightarrow \beta(XYZ)) \Rightarrow (\exists U)(\forall XY)(\varphi \wedge \psi \Rightarrow \beta(XUZ))$,
Kjer je φ poljubna formula, v kateri spremenljivke X, U, W, …nastopajo prosto, ne pa tudi Y, Z, U. Podobno velja za ψ, kjer med seboj zamenjamo X in Y.
Poseben primer šibkejše teorije dobimo, če A13 zamenjamo z A13':
$(\exists Y')(\ \delta(UXUX') \wedge \delta(UZUZ') \wedge \beta(UXZ) \wedge \delta(XYZ) \Rightarrow \delta(ZUZ'U') \wedge \beta(X'Y'Z'))$



Definicije:
Definicija kolinearnosti:
$\lambda(XYZ) \Leftrightarrow \beta(XYZ) \vee \beta(YZX) \vee \beta(ZXY)$
Definicija vzporednosti:
$\pi(XYUV) \Leftrightarrow \neg(\exists T)(\lambda(XYT) \wedge \lambda(UVT))$
Definicija relacije, da je X razpolovišče točk Y in Z:
$\rho(XYZ) \Leftrightarrow \beta(YXZ) \wedge \delta(XYXZ)$
Definicija, da je X na daljici določeni z Y in Z:
$\sigma(XYZ) \Leftrightarrow Y \neq Z \wedge \beta(YXZ)$
Definicija, da je X na krožnici s središčem v Y in polmerom določenim z Z in W ni potrebna, ker je to že:
$\delta(XYZW)$
Definicija, da X, Y in Z tvorijo pravi kot z vrhom v Y:
$\tau(XYZ) \Leftrightarrow \neg\lambda\ (XYZ) \wedge (\exists X'\ )\rho(YXX') \wedge (\exists Z'\ )\rho(YZZ')$
Ko govorimo o daljicah, krožnicah, premicah itn., mislimo na relacije med točkami, ki določajo te množice.

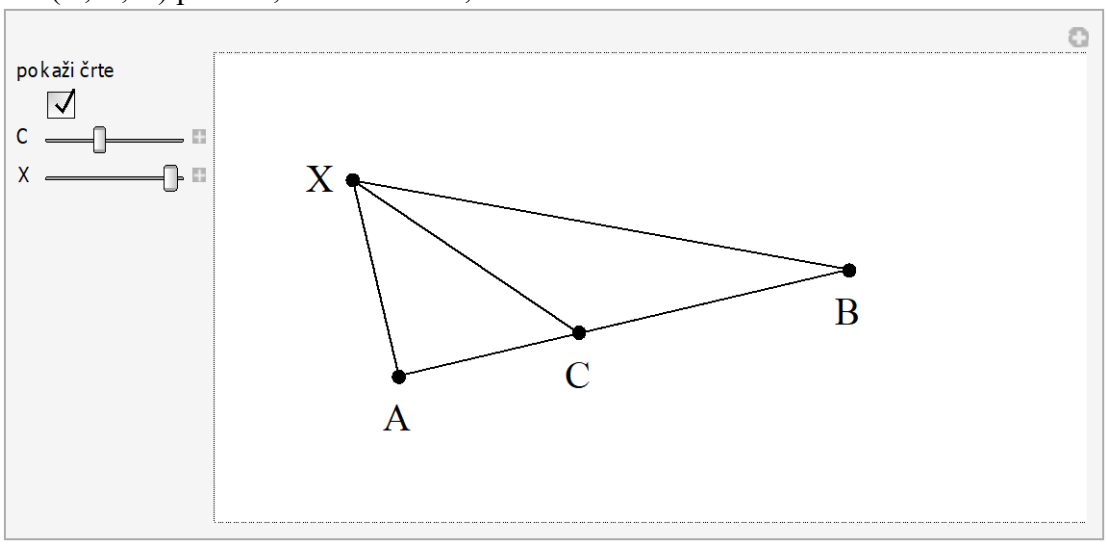
Definicija, da sta X in Y pravokotni na Z in W:
$\varphi(XYZW) \Leftrightarrow (\exists U)(\lambda(XYU) \wedge \lambda(ZWU) \wedge (\tau(UZX) \vee \tau(UZY) \vee \tau(UWX) \vee \tau(UWY)))$
Definiciji $|XY| \leq |ZW|$ in $|XY| < |ZW|$:
$\leq(XYZW) \Leftrightarrow (\exists U)(\beta(ZUW) \wedge \delta(XYZU))$
$<(XYZW) \Leftrightarrow (\exists U)(\beta(ZUW) \wedge \delta(XYZU) \wedge U \neq W)$
Definicija, da je X na daljici YZ najbližja točki W.
$\nu(XYZW) \Leftrightarrow \lambda(XYU) \wedge (\forall U)(\lambda(UYZ) \Rightarrow <(WXWU))$
Definicija, da je X enako oddaljena od točke Y kot od premice, določene z ZW:
$\varepsilon(XYZW) \Leftrightarrow (\forall U)(\nu(UZWX) \Rightarrow \delta(XYXU))$
Definicija, da je X enako oddaljena od Y, kot je od premice, ki gre skozi Z in je pravokotna na YZ. To ni nič drugega kot, da je X na paraboli z goriščem v Y in temenom Z:
$\gamma(XYZ) \Leftrightarrow \rho(XYZ) \vee (\exists W)(\tau(WZY) \wedge \nu(WWZX) \wedge \delta(XWXY))$
Razdalja točke X od Y je dvakratnik razdalje točk Z in W:
$2(XYZW) \Leftrightarrow (\forall U)(\rho(UXY) \Rightarrow \delta(XUZW))$
Realizacija enačbe $x^2=ay$.
Dane so tri nekolinearne točke A, B, C. Na premici AB, desno od B, je točka X, na premici AC pa sta točki Y in Z, tako da je YB vzporedno XZ:
$\eta[ABC](XYZ) \Leftrightarrow \beta(ABX) \wedge \beta(AYZ) \wedge \lambda(AZC) \wedge \delta(AYBX))$
Realizacija sistema: $x^2=ay$, $y^2=2ax$. Sledi $x^3=2a^3$, $x=a\ 2^{1/3}$. To pomeni, da x lahko izrazimo v tem jeziku. Ne moremo pa konstruirati s šestilom in ravnilom teh točk, oziroma, njihov obstoj ni mogoče dokazati s šibkim aksiomom A13'.
$\psi[ABCA'B'C'](XYZX'Y'Z') \Leftrightarrow \eta[ABC](XYZ) \wedge \eta[A'B'C'](X'Y'Z') \wedge 2(A'B'AB) \wedge \delta(BXY'Z') \wedge \delta(B'X'YZ)$
$\mu(ABX) \Leftrightarrow (\exists YZCY'Z'C')\psi[ABCA'B'C'](XYZX'Y'Z')$
Zadnje pomeni $|BX|=|AB|\ 2^{1/3}$.



Bernaysov sistem

Tokrat bomo podrobno opisali Bernaysovo aksiomatizacijo ravninske geometrije. Oznake so enake kot v [1]. Edina izven logična relacija je R(A,B,C), ki pomeni, da točke A, B in C tvorijo pravi kot z vrhom v B. Prvih pet aksiomov izgleda takole:
A1. $\neg R(A, B, A)$
A2. $R(A, B, C) \Rightarrow R(C, B, A) \wedge \neg R(A, C, B)$

A3. $R(A, B, C) \wedge R(A, B, D) \wedge R(E, B, C) \Rightarrow R(E, B, D)$
A4. $R(A, B, C) \wedge R(A, B, D) \wedge C \neq D \wedge R(E, C, B) \Rightarrow R(E, C, D)$
A5. $A \neq B \Rightarrow \exists X\, R(A, B, X)$
Definicija 1. $Kol(A, B, C) \Leftrightarrow \forall X(R(X, A, B) \Rightarrow R(X, A, C)) \vee A = C$
Kol(A, B, C) pomeni, da so točke A, B in C kolinearne.

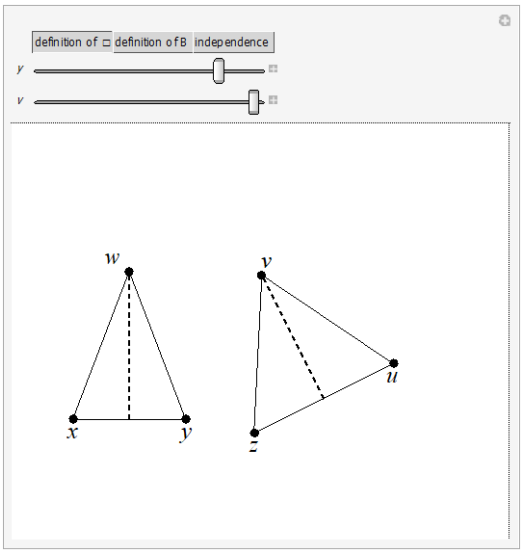


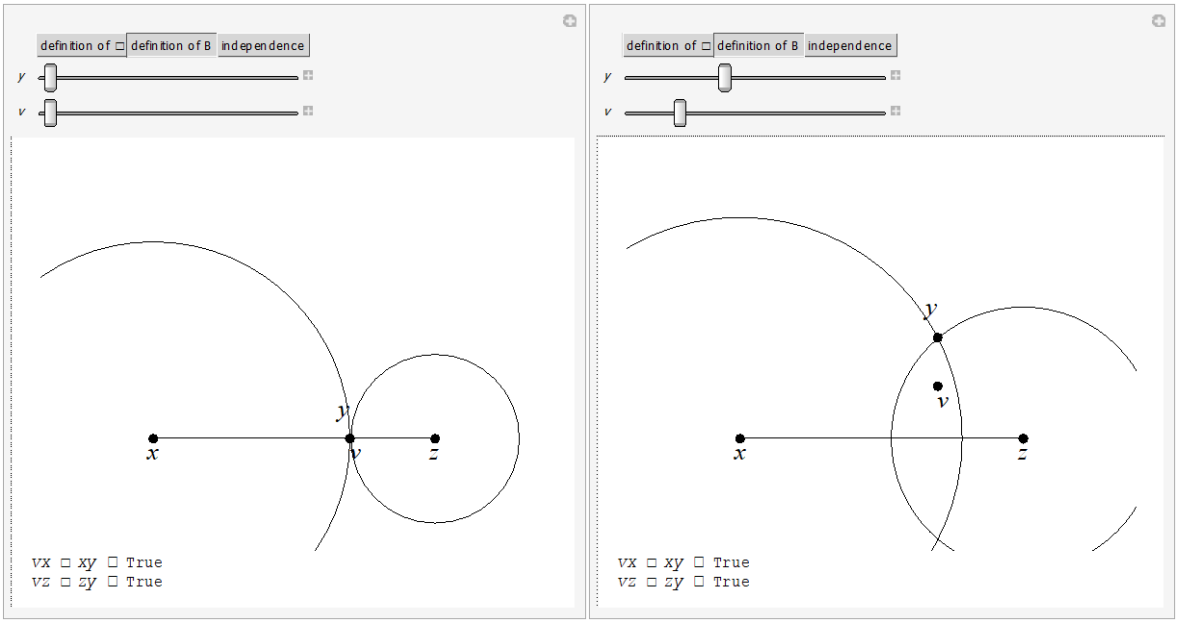
A6. $A \neq B \wedge A \neq C \Rightarrow \exists X\,(R(X, A, B) \wedge R(X, A, C)) \vee \exists X\,(R(A, X, B) \wedge R(A, X, C)) \vee R(A, B, C) \vee R(A, C, B)$
A7. $R(A, B, C) \wedge R(B, C, D) \wedge R(C, D, A) \Rightarrow R(D, A, B)$
Definicija 2. $Par(A, B, C, D) \Leftrightarrow A \neq B \wedge C \neq D \wedge \exists X \exists Y\,(R(A, X, Y) \wedge R(B, X, Y) \wedge R(C, Y, X)) \wedge R(D, Y, X))$
Par(A, B, C, D) pomeni, da sta daljici AB in CD vzporedni.
Definicija 3. $Pag(A, B, C, D) \Leftrightarrow Par(A, B, C, D) \wedge Par(A, C, B, D)$
Pag(A, B, C, D) pomeni, so točke A, B, C in D oglišča paralelograma.
A8. $R(A, B, C) \Rightarrow \exists X\,(R(A, C, X) \wedge R(C, B, X))$
Definicija 4_1. $Mp_1(A, B, C) \Leftrightarrow \exists X \exists Y\,(Pag(X, Y, A, B) \wedge Kol(A, B, C) \wedge Kol(A, X, Y))$
Definicija 4_2. $Mp_2(A, B, C) \Leftrightarrow \exists X \exists Y\,(Pag(X, Y, A, B) \wedge Pag(X, Y, C, A))$
Obakrat Mp(A, B, C) beremo, da C razpolavlja daljico AB, ali, da sta A in B simetrični glade na C.
A9. $Par(A, B, C, D) \wedge Par(A, C, B, D) \Rightarrow \neg\, Par(A, D, B, D)$
Definicija 5. $Ist_1(A, B, C) \Leftrightarrow \exists U \exists V(Pag(A, B, C, V) \wedge R(A, U, B) \wedge R(A, U, C) \wedge R(B, U, V))$
Definicija 6. $Is_1(A, B, C) \Leftrightarrow B = C \vee Mp_1(A, B, C) \vee Ist_1(A, B, C)$
Zadnja definicija uvaja Pierijevo relacijo, da je B enako oddaljena od A in C.
Definicija 7. $Qn(A, B, C, D, E) \Leftrightarrow R(A, C, B) \wedge R(A, D, B) \wedge R(A, E, C) \wedge R(A, E, D) \wedge R(B, E, C) \wedge C \neq D$
Qn(A, B, C, D, E) pomeni, da točke A, B, C in D tvorijo kvadrat s središčem v E.
S pomočjo te definicije lahko uvedemo:
Definicija 4_3. $Mp_3(A, B, C) \Leftrightarrow \exists X \exists Y Qn(X, Y, B, C, A)$
Definicija 5_2. $Ist_2(A, B, C) \Leftrightarrow \exists X \exists Y Qn(A, X, B, C, Y)$
Simetričnost točk A in B glede na C in D opredelimo takole:
Definicija 8. $Sym(A, B, C, D) \Leftrightarrow C \neq D \wedge \exists X \exists Y \exists Z(Kol(X, C, D) \wedge Kol(Y, C, D) \wedge Qn(X, Y, A, B, X))$
Definicija 9. $Lg(A, B, C, D) \Leftrightarrow Kol(A, B, C) \wedge \exists X \exists Y(Pag(A, X, B, Y) \wedge Pag(C, X, D, Y))$
Lg(A, B, C, D) pomeni, da so točke A, B, C in D kolinearne in da je razdalja med A in B enaka razdalji med C in D in da sta AB in CD enako usmerjeni.
Definicija 10. $Kg(A, B, C, D) \Leftrightarrow Lg(A, B, C, D) \vee Lg(A, B, D, C) \vee (A = B \wedge Is_1(A, B, D)) \vee \exists X(Pag(A, B, C, X) \wedge Is_1(C, X, D))$

Kg(A, B, C, D) pomeni, da sta daljici AB in CD skladni.
Definicija 11. Wh(A, D, B, C) $\Leftrightarrow \neg$Kol(A, B, C) $\wedge \exists X \exists Y \exists Z$(Kol(A, C, X) $\wedge$ Kol(A, D, Y) $\wedge$ Qn(A, Y, B, X, Z))
Wh(A, D, B, C) naj bi pomenilo, da D razpolavlja kot BAC. (Mislim, da bi Qn moral vpeljati romb in ne kvadrat.)
A10. Pag(A, B, P, Q) $\wedge$ Pag(B, C, Q, R) $\Rightarrow$ Pag(A, C, P, R) $\vee$ (Kol(A, C, P) $\wedge$ Kol(A, C, R))
Definicija 12. Zw(A, B, C) $\Leftrightarrow \exists X$(R(B, A, X) $\wedge$ R(C, A, X) $\wedge$ R(B, X, C))
Zw(A, B, C) pomeni, da A razpolavlja daljico BC. Ali nismo to že imeli?
A11. R(A, B, C) $\wedge$ R(A, B, D) $\wedge$ R(C, A, D) $\wedge$ R(E, C, B) $\Rightarrow \neg$ R(B, C, D)
A12. R(A, B, D) $\wedge$ R(D, B, C) $\wedge$ A $\neq$ C $\Rightarrow$ Zw(A, B, C) $\vee$ Zw(B, A, C) $\vee$ Zw(C, A, B)
A13. Zw(A, B, C) $\wedge$ Zw(B, A, D) $\Rightarrow$ Zw(A, C, D)
A14. R(A, B, D) $\wedge$ R(D, B, C) $\wedge$ R(A, C, E) $\wedge$ Zw(D, A, C) $\Rightarrow$ Zw(B, A, C)
Definicija 13. Kg*(A, B, C, D) $\Leftrightarrow \exists X \exists Y \exists Z$(Is(X, A, C) $\wedge$ Zw(Y, A, X) $\wedge$ Zw(Z, C, X) $\wedge$ Is((A, B, Y) $\wedge$ Is(C, D, Z) $\wedge$ Is(X, Y, Z)
Posebej si oglejmo definicije. Vse imajo obliko ekvivalence p $\Leftrightarrow$ q.
Levemu delu (to je p) pravimo definiendum, desnemu (q) pa definiens. V definiendumu nastopa nov znak za relacijo (Par), spremenljivke (A, B, C in D) pa so natanko tiste, ki nastopajo v q prosto. (spremenljivki X in Y pa vežeta kvantifikatorja $\exists$X in $\exists$Y). Tu je še dogovor, da univerzalnega kvantifikatorja, ki se nanaša na celotno formulo, ne pišemo. Na primer, v definiciji štirimestne relacije
Par(A, B, C, D) $\Leftrightarrow$ A $\neq$ B $\wedge$ C $\neq$ D $\wedge \exists X \exists Y$ (R(A, X, Y) $\wedge$ R(B, X, Y) $\wedge$
R(C, Y, X)) $\wedge$ R(D, Y, X)),
beremo: »Za vsak A, B, C, D, AB je vzporedno CD natanko takrat, kadar …«
Še bolj jasna bi bila definicija, če bi ločili A in B od C in D. To je narejeno v [1] z podpičjem:
Par(A, B; C, D) $\Leftrightarrow$ A $\neq$ B $\wedge$ C $\neq$ D $\wedge \exists X \exists Y$ (R(A, X, Y) $\wedge$ R(B, X, Y) $\wedge$
R(C, Y, X)) $\wedge$ R(D, Y, X))
Poenostavitev je tudi, če znak za kvantifikator pišemo samo enkrat:
Par(A, B; C, D) $\Leftrightarrow$ A $\neq$ B $\wedge$ C $\neq$ D $\wedge$ ($\exists$X,Y) (R(A, X, Y) $\wedge$ R(B, X, Y) $\wedge$
R(C, Y, X)) $\wedge$ R(D, Y, X))
To je možno zato, ker vrstni red kvantifikatorjev iste vrste ni pomemben.

Odvisnost osnovnih relacij

V tem delu bomo uporabili oznake iz [5] da bi dokazali nekoliko drugače, da lahko z relacijo δ (tokrat bo oznaka $\equiv$) lahko definiramo relacijo β oznaka bo *B*).
Najprej definiramo relacijo $\leq$:
$xy \leq zu \Leftrightarrow \forall v(zv \equiv uv \Rightarrow \exists w(xw \equiv yw \wedge yw \equiv uv))$





S pomočjo zadnje pa:

$B(xyz) \Leftrightarrow \forall v(vx \leq xy \wedge vz \leq zy \Rightarrow v = y)$

Dokaz, da ni mogoče definirati relacije ≡ s pomočjo relacije *B* poteka po postopku, ki ga je opredelil italijanski matematik Padoa.

Če se da ≡ definirati s pomočjo *B*, potem se da z aksiomi izpeljati stavek oblike

$xy \equiv zu \Leftrightarrow \psi$

Pri tem v formuli ψ nastopajo prosto samo *x*, *y*, *z* in *u*, med izven logičnimi znaki pa samo *B*.

To je v resnici definicija za ≡.

Ne da pa se definirati relacije ≡, če obstajata dva modela za teorijo, tako da se pri preslikavi osnovne množice enega modela v osnovno množico drugega modela ohranja relacija *B*, ne pa tudi ≡.

Za model vzamemo ravnino **R**x**R**, kjer je **R** množica realnih števil.

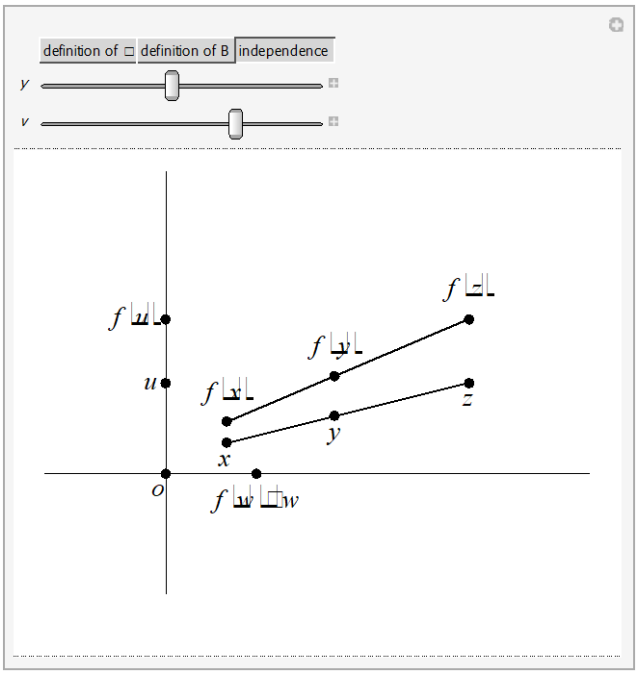
Relacija ≡ je podana z definicijo (indeks 1 ob spremenljivki pomeni absciso, 2 pa ordinato):

$xy \equiv zu \Leftrightarrow (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 = (z_1-u_1)^2 + (z_2-u_2)^2$

Relacija B pa:

$B(xyz) \Leftrightarrow [((x_1-y_1).(y_2-z_2) = (x_2-y_2).(y_1-z_1)] \wedge [0 \leq (x_1-y_1).(y_1-z_1)] \wedge [0 \leq (x_2-y_2).(y_2-z_2)]$.

Linearna preslikava *f*: (*x*,*y*)->(*x*, 1.3*y*) ohranja relacijo *B*, to je $B(xyz) \Leftrightarrow B(f(x)f(y)f(z))$.



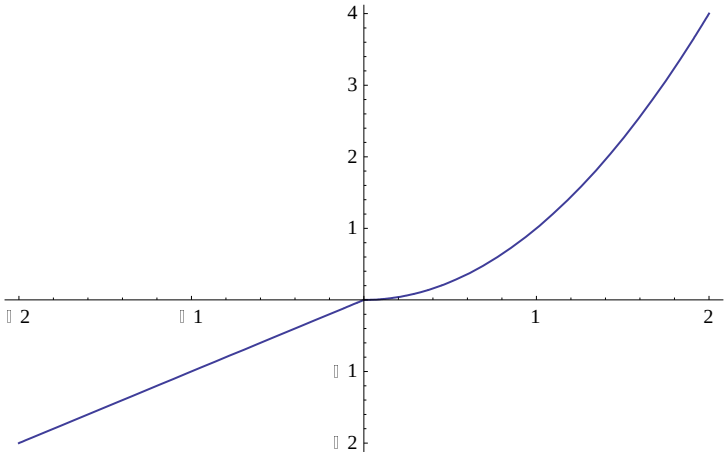
Toda, $ow \equiv ou$ velja, $f(o)f(w) \equiv f(o)f(u)$ pa ne.

Reference:
[1] Paul Bernays, Die Manigfaltigkeit der Direktiven für die Gestaltung Geometrischer Axiomssysteme, The Axiomatic Method, North-Holland, Amsterdam, 1959, str.1-15.
[2] Alfred Tarski, What is Elementary Geometry?, The Axiomatic Method, North-Holland, Amsterdam, 1959, str.16-29.
[3] Raphael M. Robinson, Binary Relations as Primitive Notions in Elementary Geometry, The Axiomatic Method, North-Holland, Amsterdam, 1959, str.68-85.
[4] M. Pieri, La geometria elementare instituita sulle nozioni di 'punto' e 'sfera', Memorie di Matematica e di Fisica della Societa Italiana delle Scienze, ser. 3, vol. 15(1908), str. 345-450.
[5] A. Tarski, S. Givant, Tarski's System of Geometry, The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. %, #2, June 1999, pp. 175-214.

Definicije v *mathematici*

Sistem mathematica ima celo vrsto vgrajenih funkcij, nove pa lahko definiramo podobno kot v matematiki.
Zgled. Prvi stavek je definicija funkcije, drugi pa je ukaz za risanje njenega grafa.

```
f[x_]=If[x<0,x,x^2];
Plot[f[x],{x,-2,2}]
```



V matematiki bi zapisali f(x)= če[x<0, x, drugače x^2] ali pa bolj v simbolih y=f(x)⇔ (x<0 ∧ y=x) ∨ (x≥0 ∧ $y=x^2$)

Recimo, da želimo narediti funkcijo sum[f](n), ki ima dva argumenta, to je, f in n. Prvi je poljubno zaporedje, drugi pa poljubno naravno število. Ukaz sum[f](n) na pomeni seštevek prvih n členov zaporedja:
Možen program (procedura) v mathematici je:

```
sum[f_][n_]:=Module[{s=0},Do[s=s+f[i],{i,1,n}];s]
```

Tu sta f in n prosti (globalni) spremenljivki, s in i pa vezani (lokalni) spremenljivki. Rezultat procedure (funkcije) je vrednost zadnjega izraza v modulu (desna stran definicije). Ta način je Poznan kot funkcionalno programiranje.
Definirajmo še dve zaporedji
g[n_]=n;
h[n_]=n^2;
In dobimo:

```
sum[g][10]
55
sum[h][10]
385
```

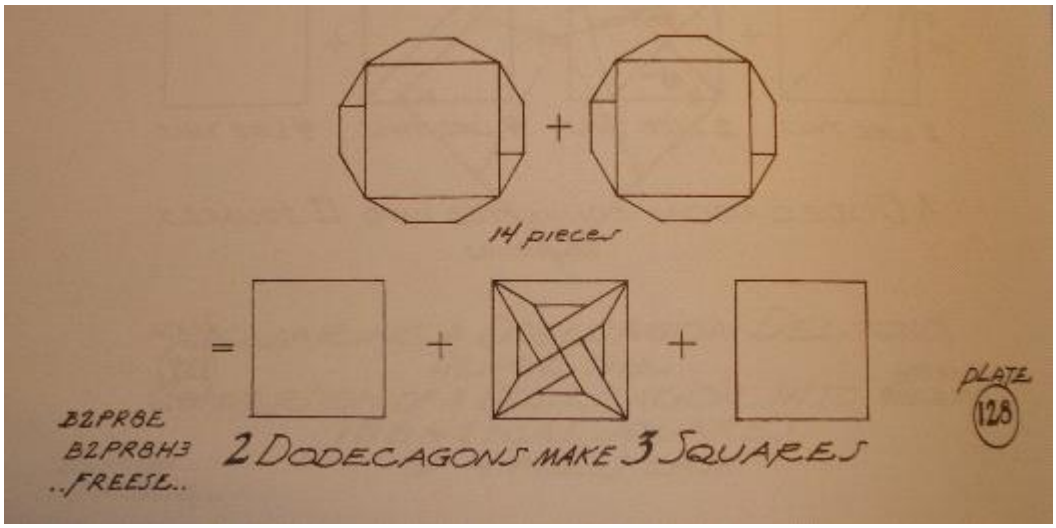
Če zanemarimo, da v mathematici uporabljamo oglate oklepaje na mesto okroglih, da na levi strani prostim (globalnim) spremenljivkam pripišemo podčrtaj, da včasih pišemo := na mesto = v matematiki, vidimo, da te procedure ustrezajo eksplicitnim matematičnim definicijam, kakršna je naslednja (v obliki povezovalne funkcije).
H[f, g](x) = (f(x)+g(x))/2
Proste spremenljivke (argumenti funkcije H) so f, g in x. Lahko pa bi rekli, da sta f in g parametra, x pa je spremenljivka (v ožjem pomenu, kot spremenljivka v zadnjem oklepaju).

Nova knjiga

Greg N. Frederickson, Ernest Irving Freese's Geometric Transformations The Man, the Manuscript, the Magnificent Dissections!, World Scientific, New Jersey, 2018.



To je Fridericksonova četrta knjiga geometrijskih disekcij. Odkar je v prvi polovici 19. stoletja nekaj matematikov dokazalo, da sta poljubna dva večkotnika z enako ploščino enako sestavljiva, je to področje prešlo v domeno zabavne matematike. Osnovna naloga je, da se disekcija izvede s čim manjšim številom delov. Večje zanimanje za to problematiko je bilo zaznano sredi prejšnjega stoletja. Freese (1886-1957) je bil znan arhitekt v Los Angelesu in je na strokovnem področju objavil številne prispevke.
Malo pred smrtjo je dopolnil 200 strani dolg rokopis geometrijskih disekcij. Če bi bil material objavljen, bi bila to prva knjiga za to področje. Ta rokopis je v bistvu zbirka 200 elegantnih in domiselnih risb. Po Freeseovi smrti je rokopis ležal pozabljen na podstrešju njegove hiše, kjer ga je l. 2003 uspel dobiti Frederickson. Nekaj risb je Frederickson analiziral že v svoji tretji knjigi Piano-Hinged Dissections iz leta 2006. Nova knjiga ima 197 strani, vsebuje pa vseh 200 Freesejevih risb, katerih strani pa niso oštevilčene.
Kot primer si oglejmo fotografski posnetek, iz knjige, dela 128.



Nekaj Freesejevij disekcij je že objavljeno na http://demonstrations.wolfram.com/index.php

Rešitve

Barvni sudoku

1.

4	2	3	1
2	4	1	3
3	1	4	2
1	3	2	4

1	3	2
2	1	3
3	2	1

2	1	3
1	3	2
3	2	1

1	2	3
2	3	1
3	1	2

2	1	3
1	3	2
3	2	1

2	1	4	3
4	2	3	1
3	4	1	2
1	3	2	4

3	2	4	1
4	1	2	3
1	4	3	2
2	3	1	4

3	1	2
1	2	3
2	3	1

3	1	4	2
4	2	3	1
1	4	2	3
2	3	1	4

1	2	3
3	1	2
2	3	1

2	1	3
1	3	2
3	2	1

2	3	1
3	1	2
1	2	3

2.

2	1	3	5	6	4
4	5	6	3	1	2
6	3	5	4	2	1
1	2	4	6	3	5
3	4	1	2	5	6
5	6	2	1	4	3

1	2	4	3
4	1	3	2
2	3	1	4
3	4	2	1

4	3	1	2
1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3

3	5	4	2	1	
1	2	3	4	5	
2	4	1	5	3	
5	3	2	1	4	
4	1	5	3	2	

1	3	6	5	2	4
4	5	2	1	6	3
2	1	3	6	4	5
6	4	5	3	1	2
5	2	1	4	3	6
3	6	4	2	5	1

3	1	4	2
2	4	3	1
1	3	2	4
4	2	1	3

1	2	4	3
2	1	3	4
3	4	2	1
4	3	1	2

3	1	4	5	2
5	2	3	1	4
1	4	5	2	3
2	3	1	4	5
4	5	2	3	1

2	3	4	1
4	2	1	3
3	1	2	4
1	4	3	2

4	2	6	1	3	5
5	3	1	2	6	4
1	4	5	3	2	6
3	6	2	5	4	1
2	5	4	6	1	3
6	1	3	4	5	2

1	3	4	2
3	1	2	4
2	4	3	1
4	2	1	3

3	4	2	1
1	2	3	4
2	1	4	3
4	3	1	2

Latinski kvadrati

4	1	2	3
3	4	1	2
1	2	3	4
2	3	4	1

4	1	3	2
2	3	1	4
3	2	4	1
1	4	2	3

1	3	5	2	4
3	1	4	5	2
5	4	2	3	1
2	5	1	4	3
4	2	3	1	5

1	3	4	2	5
2	4	5	3	1
4	5	3	1	2
5	2	1	4	3
3	1	2	5	4

4	3	2	1
2	4	1	3
3	1	4	2
1	2	3	4

4	1	2	3
2	4	3	1
3	2	1	4
1	3	4	2

1	3	4	5	2
3	5	1	2	4
2	4	3	1	5
4	2	5	3	1
5	1	2	4	3

5	2	3	4	1
3	4	5	1	2
2	1	4	3	5
1	3	2	5	4
4	5	1	2	3

3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3
1	2	3	4

2	5	4	1	3
1	4	5	3	2
3	2	1	5	4
4	1	3	2	5
5	3	2	4	1

3	1	4	2
1	3	2	4
2	4	1	3
4	2	3	1

4	1	3	2
2	4	1	3
1	3	2	4
3	2	4	1

Sudoku s črkami

4 B	1 B	3 B	2 D
1 D	2 C	4 A	3 A
2 B	3 D	1 A	4 D
3 C	4 C	2 A	1 C

1 B	4 C	2 C	3 B
3 C	1 D	4 A	2 D
2 A	3 D	1 C	4 B
4 D	2 B	3 A	1 A

1 D	3 D	4 B	2 C
4 A	1 C	2 B	3 A
2 D	4 D	3 C	1 A
3 B	2 A	1 B	4 C

4 B	1 D	2 D	3 D
2 C	4 A	3 A	1 A
1 B	3 B	4 D	2 B
3 C	2 A	1 C	4 C

1 C	3 B	2 B	4 B
2 D	1 D	4 C	3 A
3 C	4 A	1 B	2 A
4 D	2 C	3 D	1 A

2 C	3 A	1 A	4 A
4 D	2 B	3 C	1 B
1 C	4 C	2 A	3 B
3 D	1 D	4 B	2 D

1 B	3 D	2 A	4 D
4 A	1 C	3 C	2 D
2 C	4 B	1 D	3 A
3 B	2 B	4 C	1 A

3 C	1 D	4 D	2 B
4 A	2 D	3 A	1 C
1 A	4 C	2 C	3 D
2 A	3 B	1 B	4 B

2 D	1 D	3 B	4 D
4 B	2 A	1 A	3 A
3 C	4 A	2 C	1 C
1 B	3 D	4 C	2 B

4 A	3 D	2 C	1 A
1 C	2 A	3 B	4 D
3 C	4 C	1 D	2 B
2 D	1 B	4 B	3 A

4 C	2 C	1 C	3 D
1 B	3 C	4 D	2 B
2 D	4 A	3 B	1 A
3 A	1 D	2 A	4 B

4 C	2 D	3 A	1 C
1 A	3 B	2 B	4 A
3 D	1 B	4 B	2 A
2 C	4 D	1 D	3 C

Futoshiki

1	3	2
2	1	3
3	2	1

3	1	2
1	2	3
2	3	1

3	2	1
2	1	3
1	3	2

2	3	4	5	1
5	2	3	1	4
4	1	2	3	5
3	5	1	4	2
1	4	5	2	3

3	1	2
1	2	3
2	3	1

1	2	4	3
3	1	2	4
2	4	3	1
4	3	1	2

1	3	4	2
3	2	1	4
4	1	2	3
2	4	3	1

2	5	4	1	3
5	4	2	3	1
1	2	3	5	4
3	1	5	4	2
4	3	1	2	5

2	3	1
3	1	2
1	2	3

1	2	3
3	1	2
2	3	1

3	2	1	4
2	3	4	1
4	1	2	3
1	4	3	2

1	3	5	4	2
3	2	4	5	1
5	4	1	2	3
4	1	2	3	5
2	5	3	1	4

Lastnosti lika

Velik	R
Kvadrat	R
Trikotnik ⇒ Petkotnik	R

oblika	Kvadrat
velikost	Velik

Kvadrat	N
Majhen ⋁ Petkotnik	N
Trikotnik ⊻ Velik	R
Trikotnik ⊻ Velik	R

oblika	Trikotnik
velikost	Srednji

Petkotnik	N
Tanek	R
Trikotnik ⋀ Tanek	R
Srednji ⇔ Tanek	N
Oranžen ⋀ Petkotnik	N
Velik ⇒ Moder	N
Oranžen ⇔ Srednji	N

oblika	Trikotnik
velikost	Velik
barva	Oranžen
debelina	Tanek

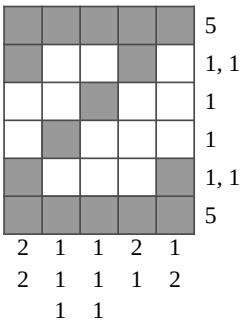
Oranžen ⇔ Petkotnik	N
Oranžen ⊻ Srednji	N
Kvadrat ⇔ Majhen	N
Kvadrat ⊻ Rumen	N

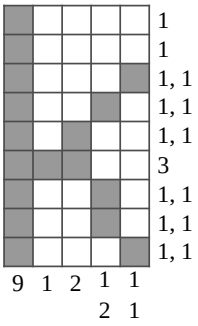
oblika	Petkotnik
velikost	Majhen
barva	Moder

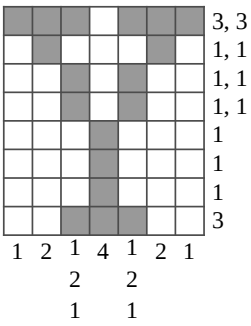
Razpored znakov

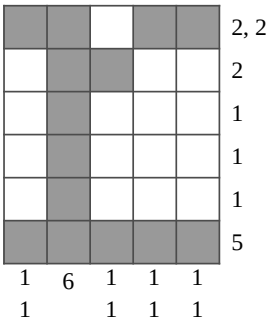
B A C	A B C
C D B A	C D B A
D C E B A	B E A D C
A D C B E	A E C B D

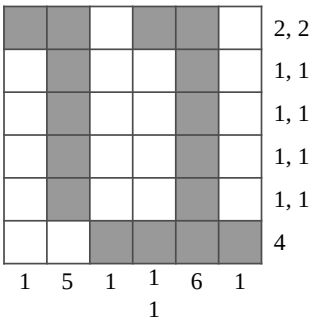
Gobelini

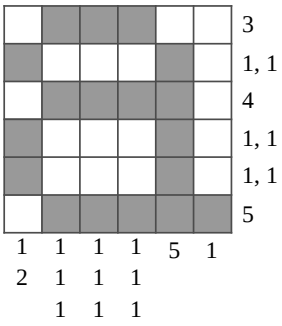


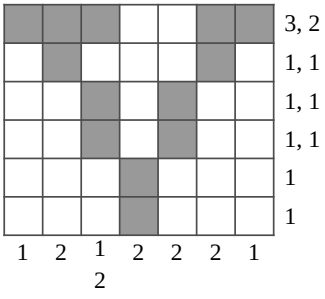


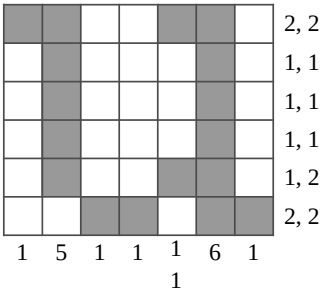


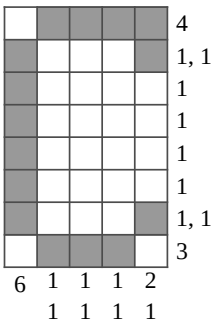


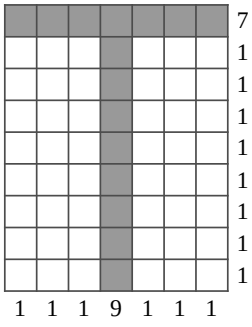


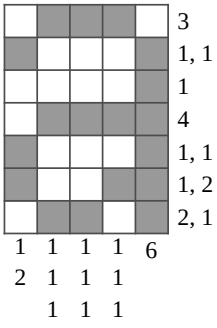


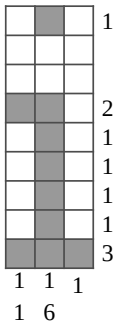




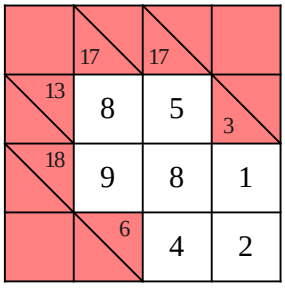


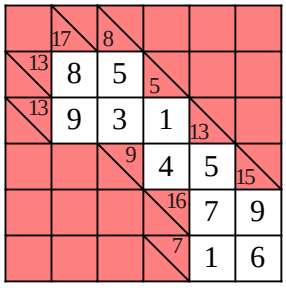


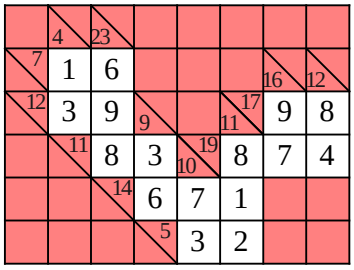


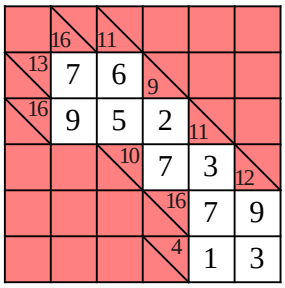


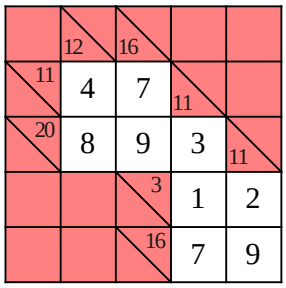
Križne vsote

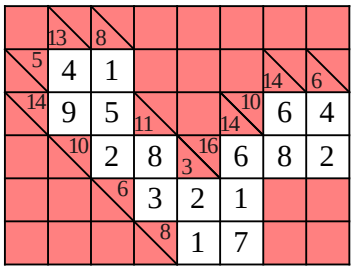


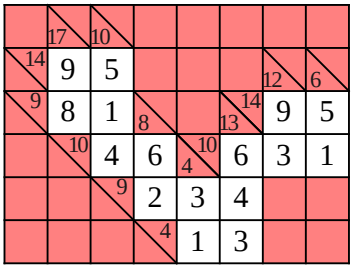


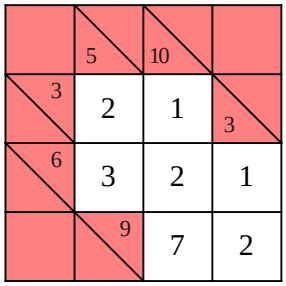


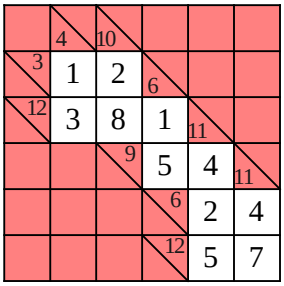


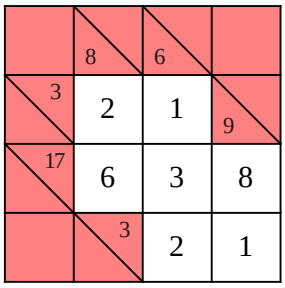


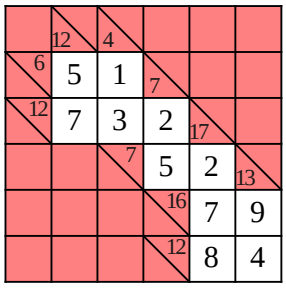


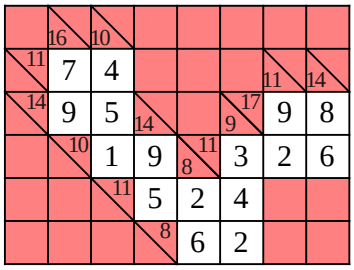




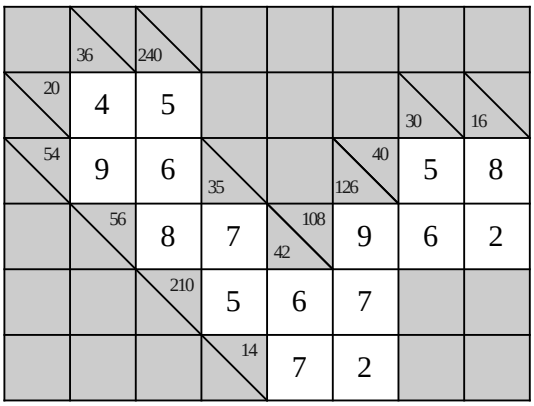


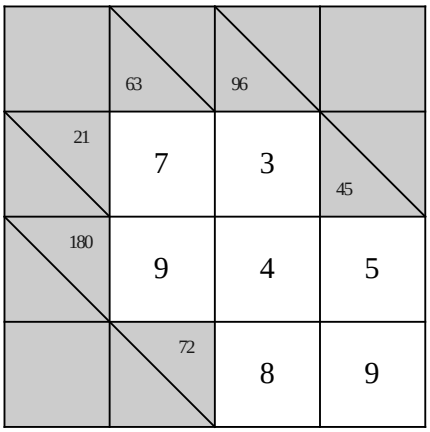


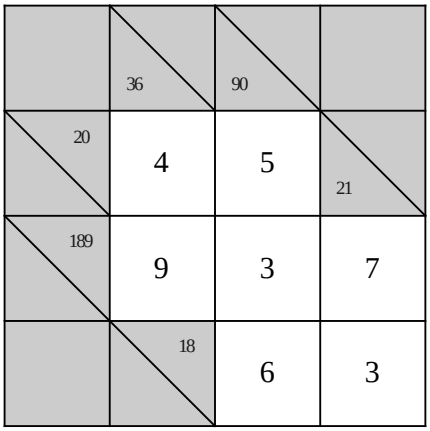


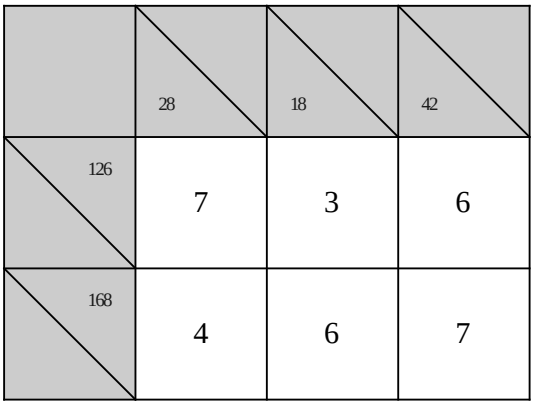


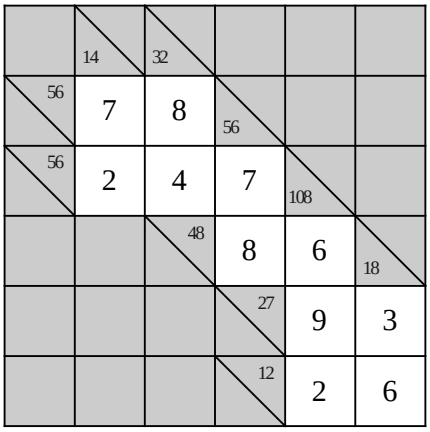
Križni produkti

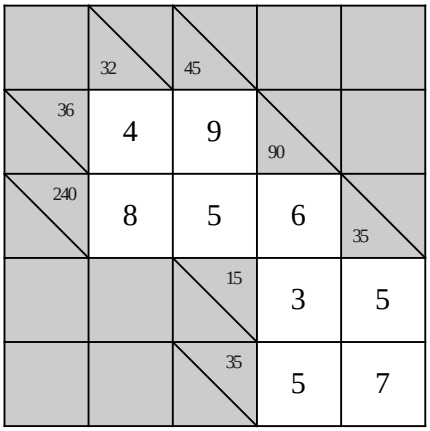




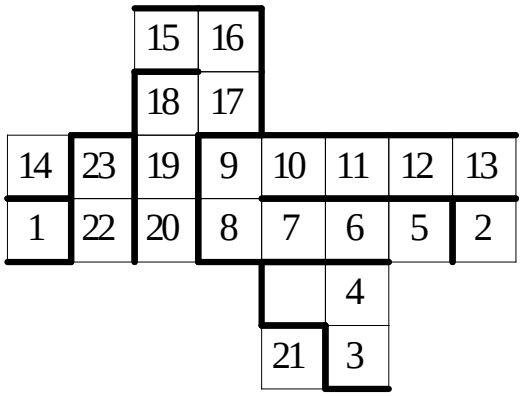


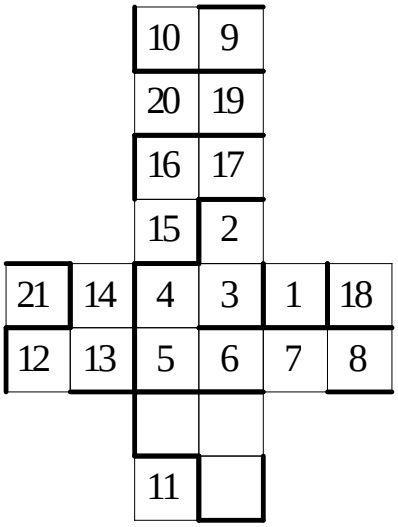


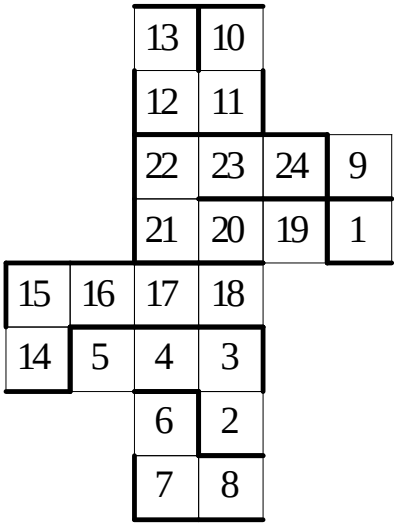


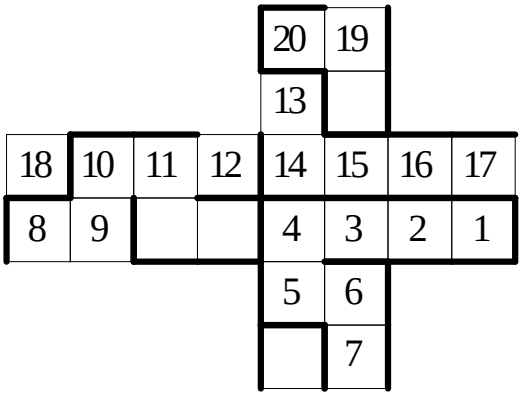


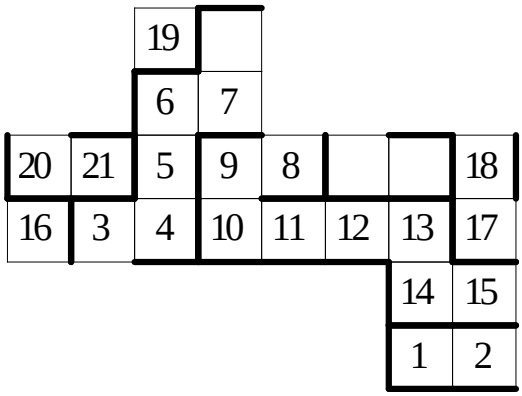
Labirint na kocki

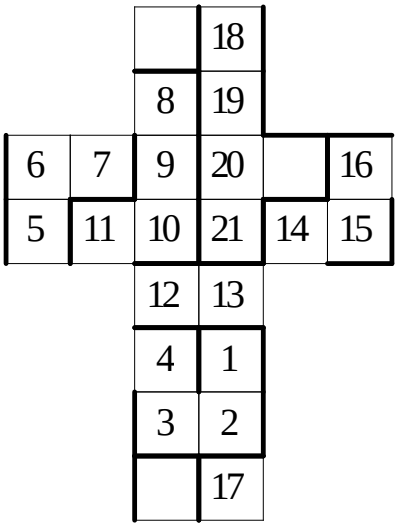




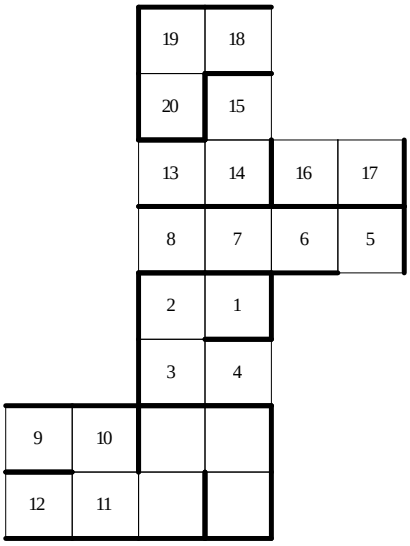


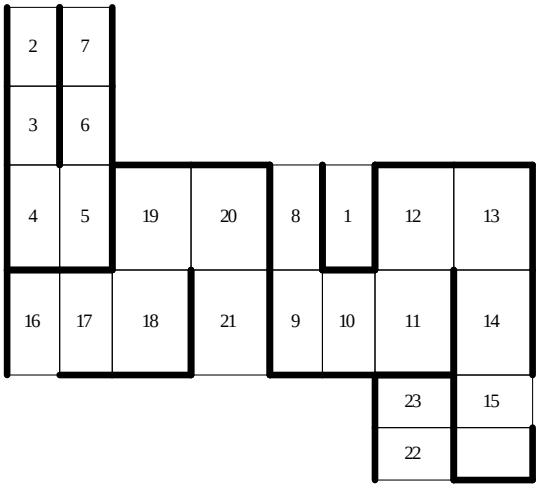


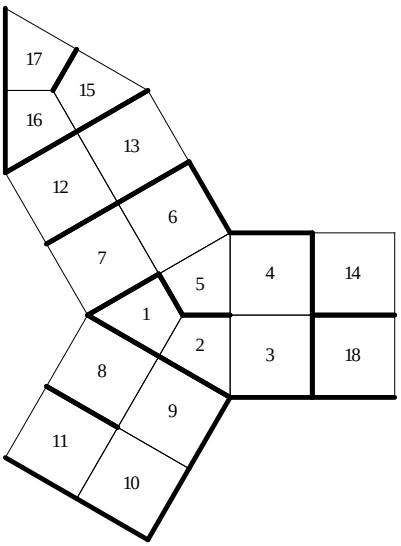


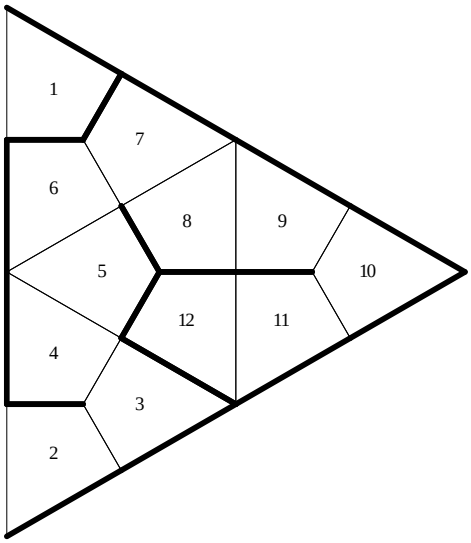


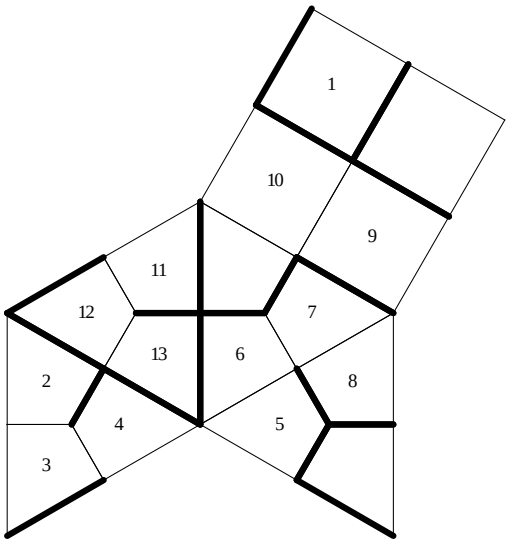
Labirinti na enostavnih poliedrih

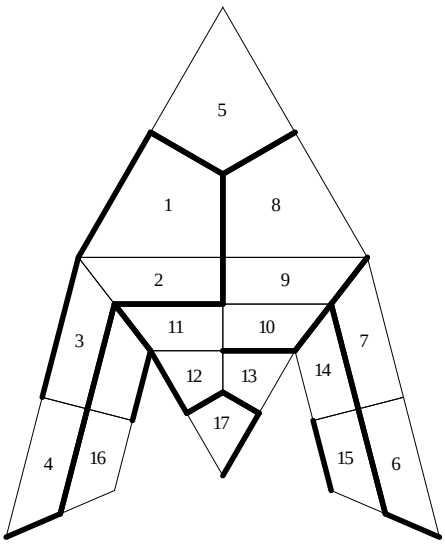












Grupe

Sličice na drugi sliki moramo zaporedoma označiti:
{16, 8, 9, 11, 7, 14, 1, 3, 6, 5, 10, 17, 15, 13, 2, 4, 12}
Linearne grupe:
a) {7, 2, 5, 6, 4, 1, 3}, {2, 7, 4, 6, 1, 3, 5}
b) {6, 4, 5, 2, 7, 1, 3}, {4, 1, 7, 2, 6, 5, 3}

Prostorska predstavljivost

a)

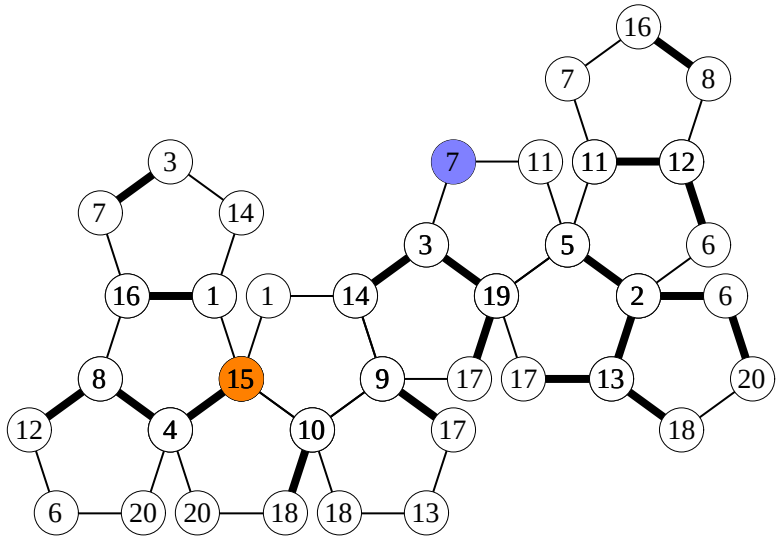
	1	2	3
1	2	11	12
2	12	12	11
3	3	3	3
4	7	7	6
5	8	2	8

b)

	1	2	3
1	1	2	5
2	2	5	2
3	2	3	5
4	4	4	2
5	5	4	4

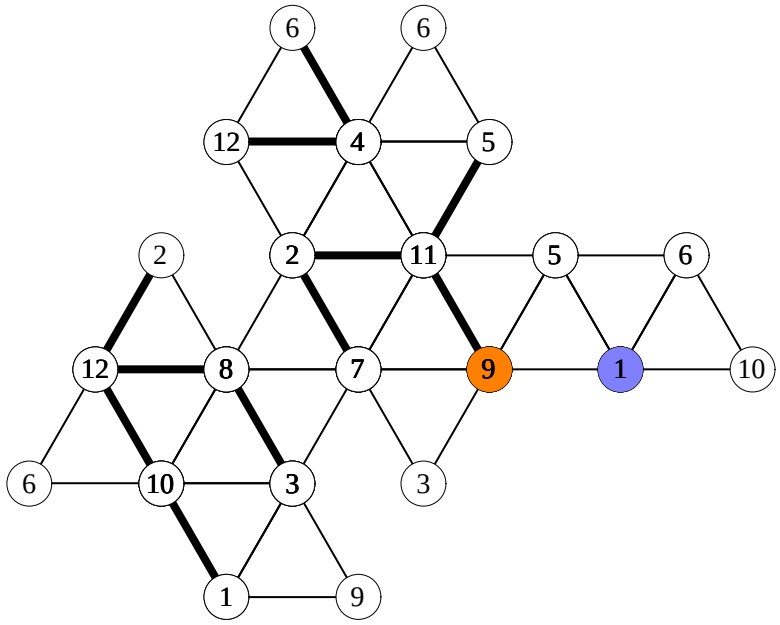
Labirinti na robovih poliedra

1.



{15,4,8,12,6,2,13,17,19,3,7}

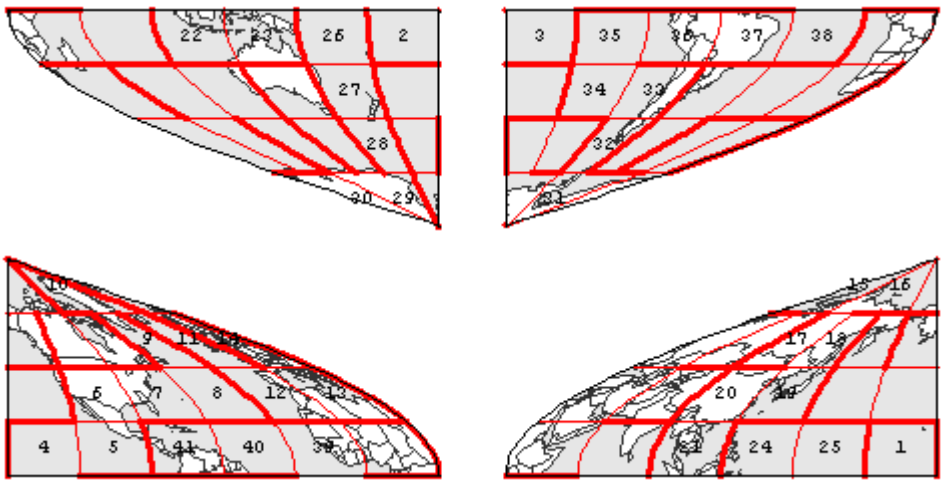
2.



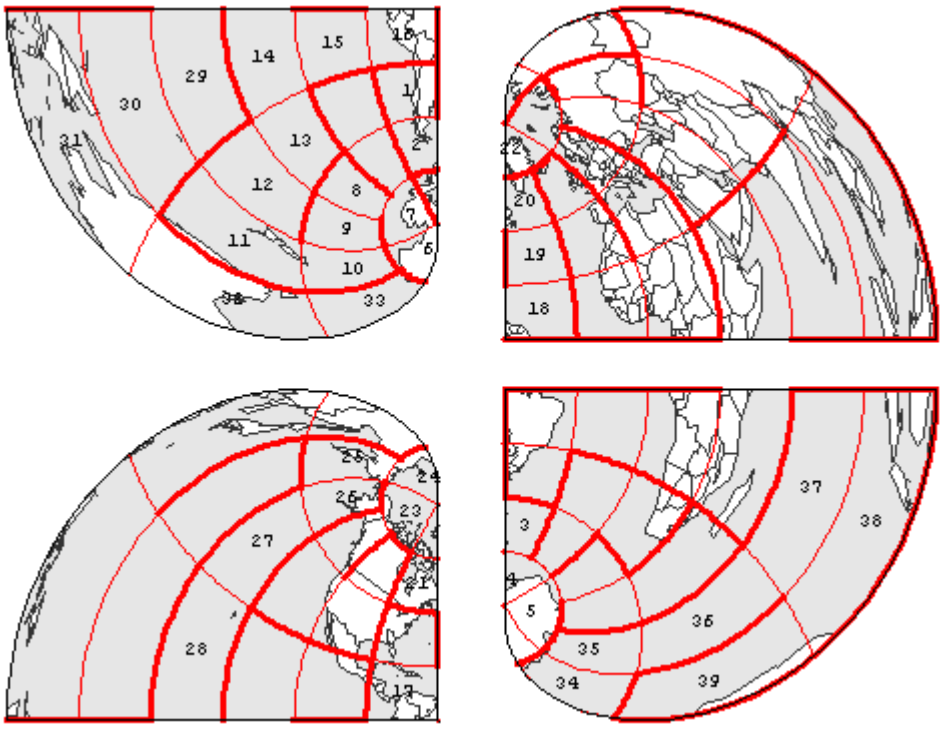
{9,11,2,12,10,1}

Večdelni labirinti na zemljevidu

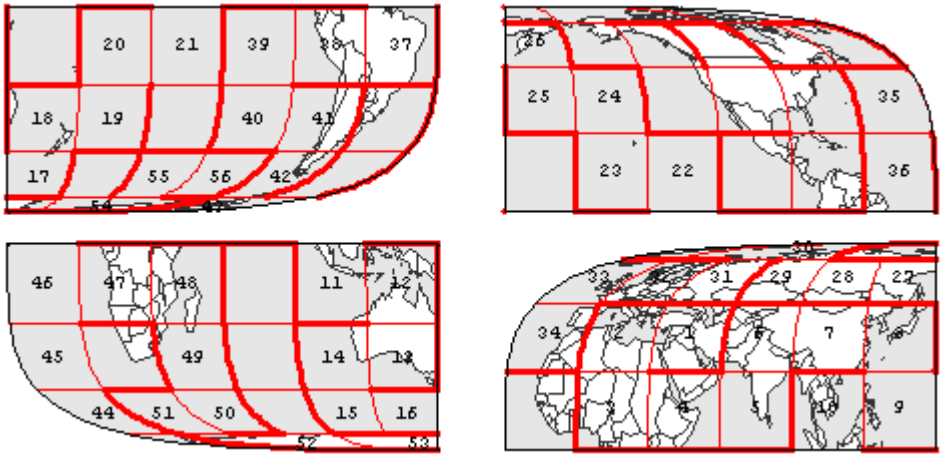
1.



2.

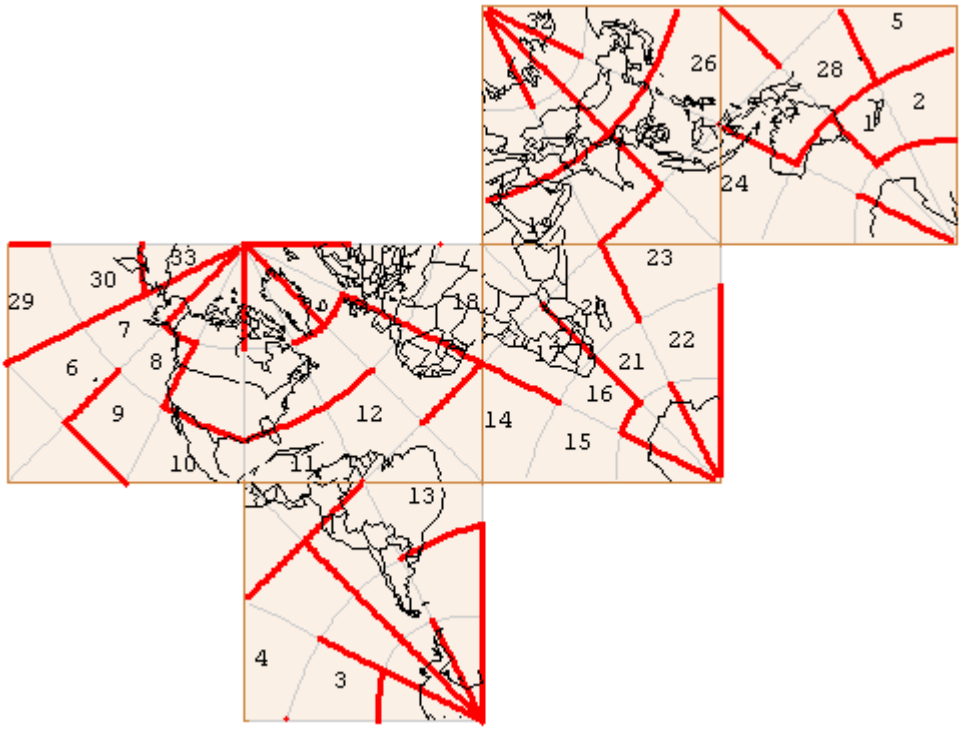


3.

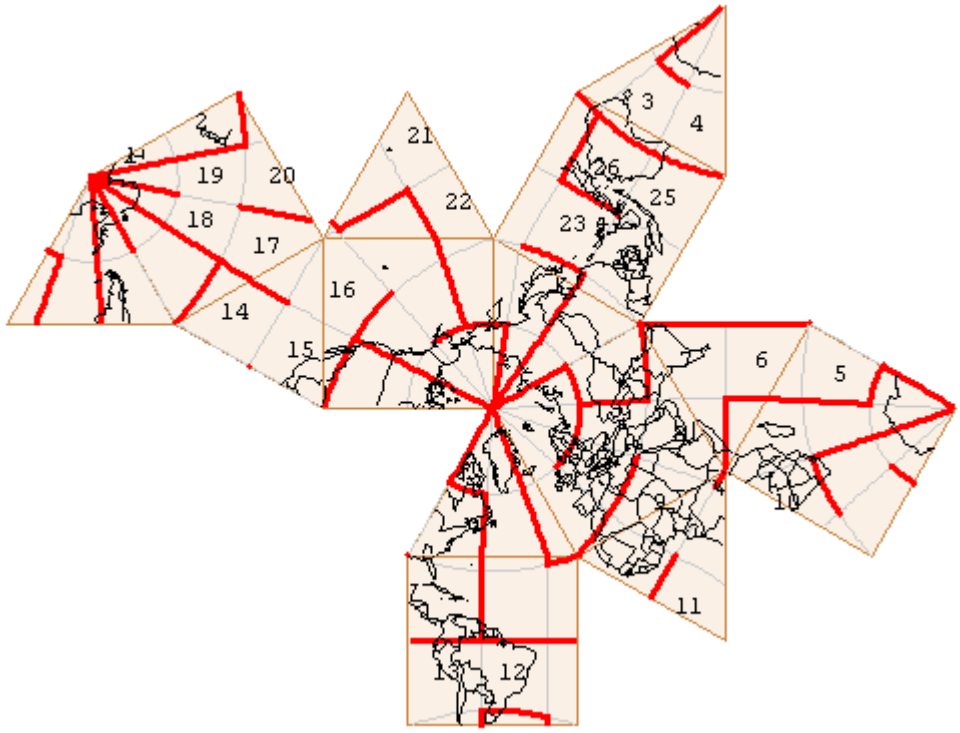


Labirinti na zemljevidu

1.



2.



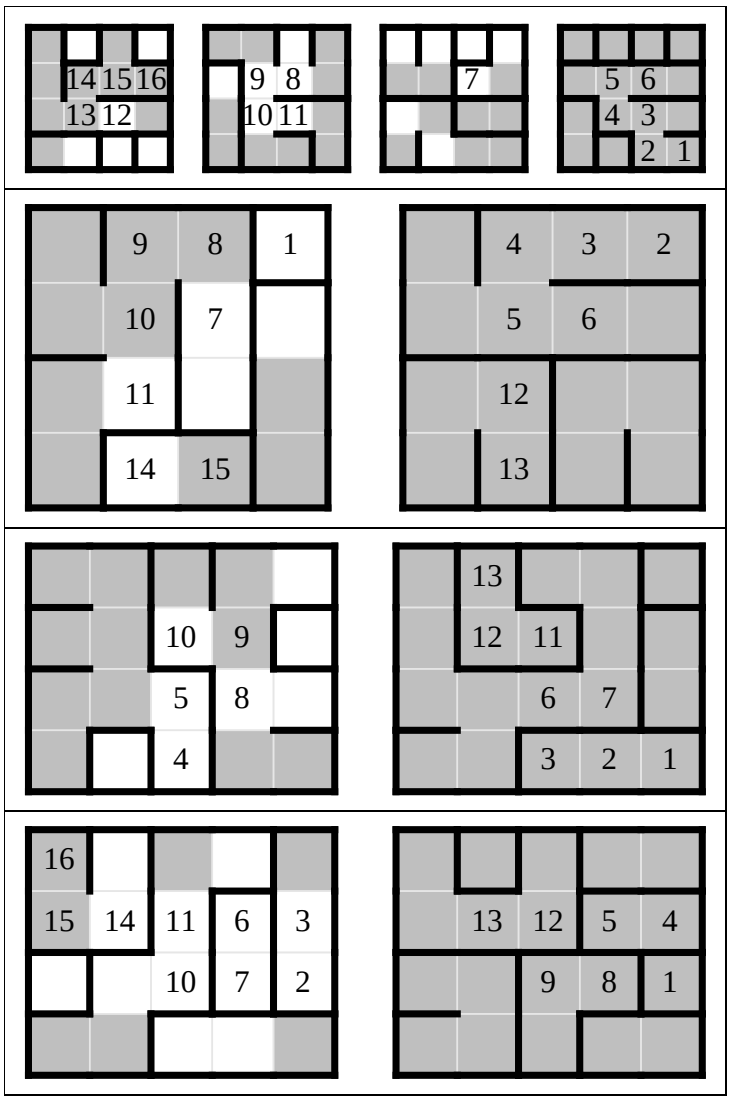
Odstranjene kocke

59 63 64
64 62 61
58 71 79
48 54 75

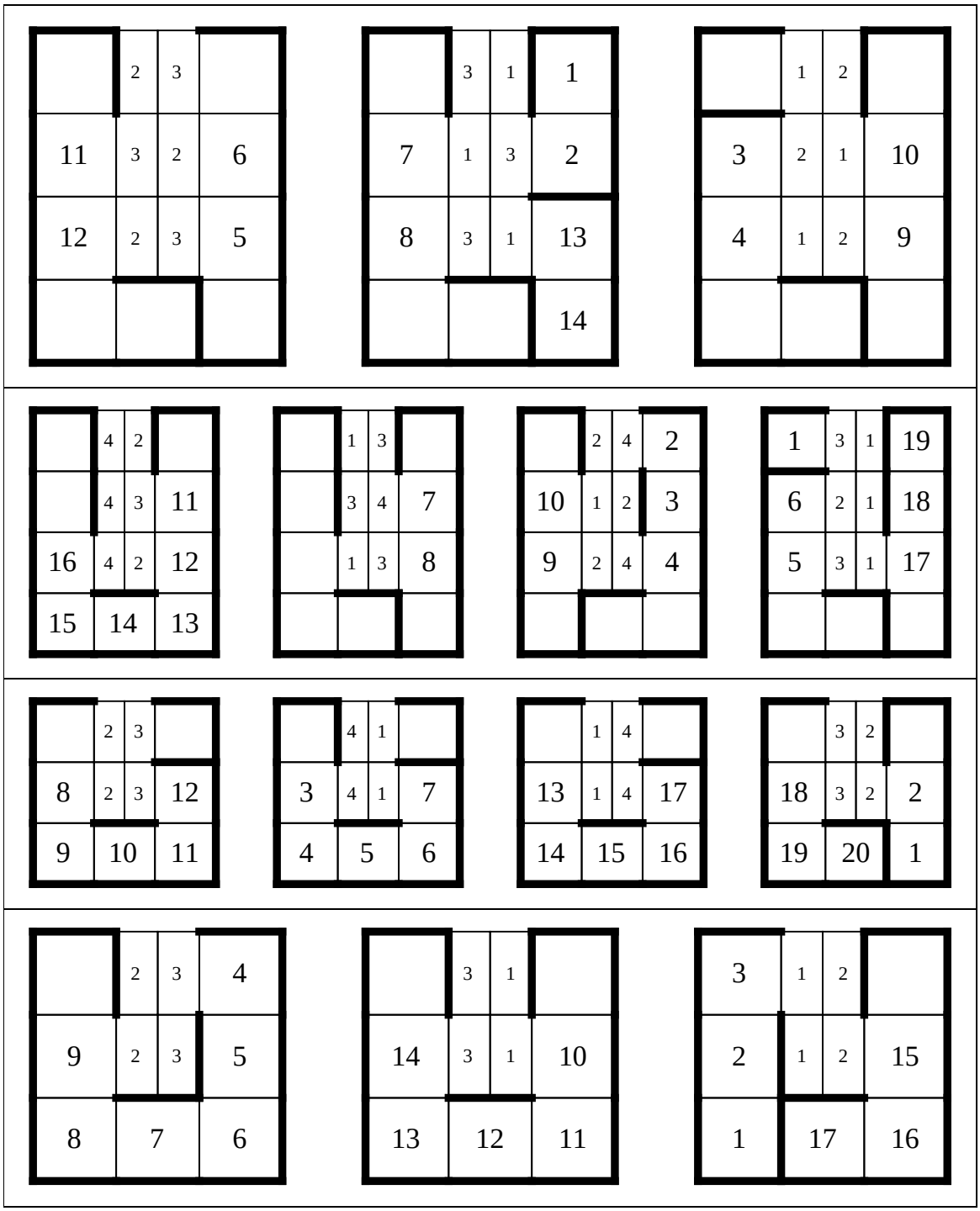
Kocki določi mrežo

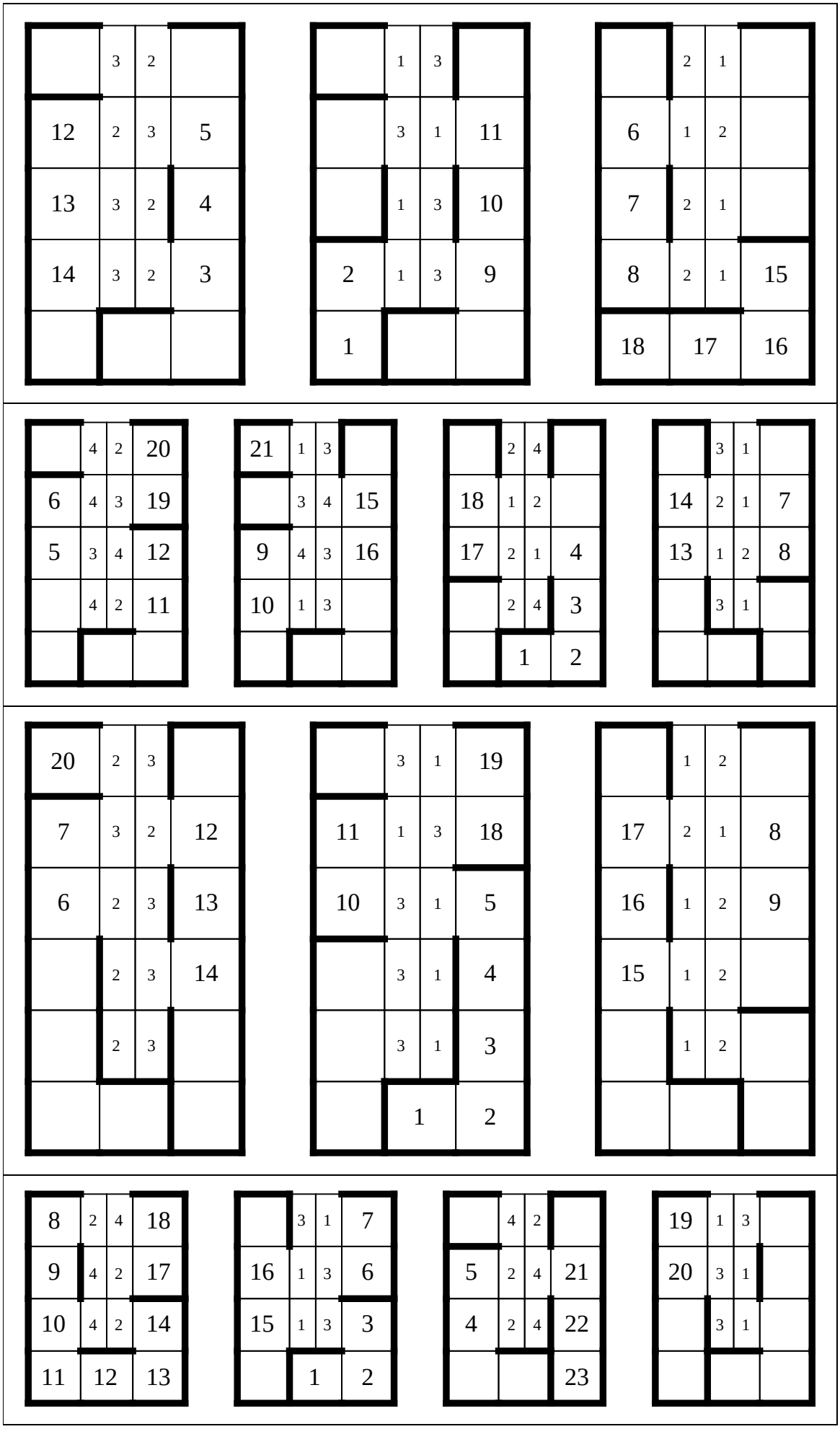
{4, 2, 4, 3, 2, 2}

Labirint v kvadru

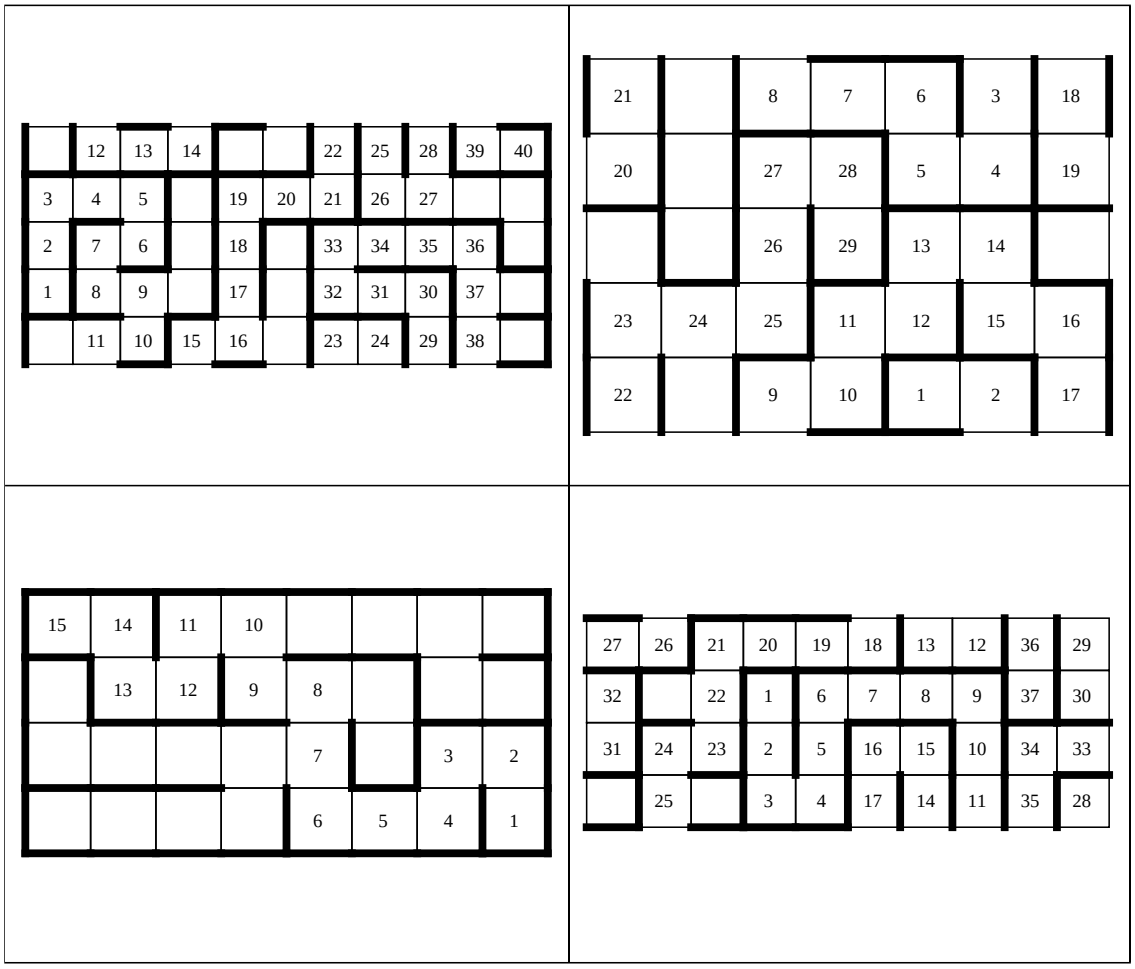


Labirint na Riemannovi ploskvi

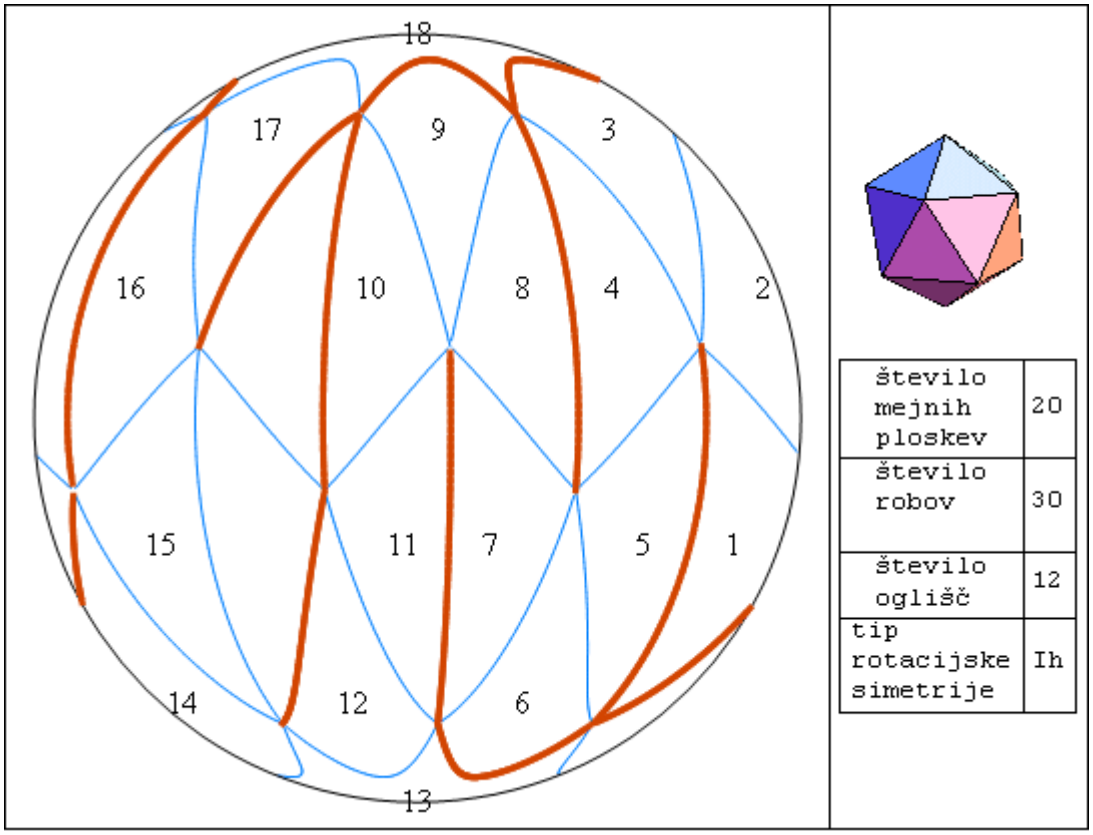



3 2
12 2 3 5
13 3 2 4
14 3 2 3
1 3
3 1 11
1 3 10
2 1 3 9
1
2 1
6 1 2
7 2 1
8 2 1 15
18 17 16
4 2 20
6 4 3 19
5 3 4 12
4 2 11
21 1 3
3 4 15
9 4 3 16
10 1 3
2 4
18 1 2
17 2 1 4
2 4 3
1 2
3 1
14 2 1 7
13 1 2 8
3 1
20 2 3
7 3 2 12
6 2 3 13
2 3 14
2 3
3 1 19
11 1 3 18
10 3 1 5
3 1 4
3 1 3
1 2
1 2
17 2 1 8
16 1 2 9
15 1 2
1 2
8 2 4 18
9 4 2 17
10 4 2 14
11 12 13
3 1 7
16 1 3 6
15 1 3 3
1 2
4 2
5 2 4 21
4 2 4 22
23
19 1 3
20 3 1
3 1

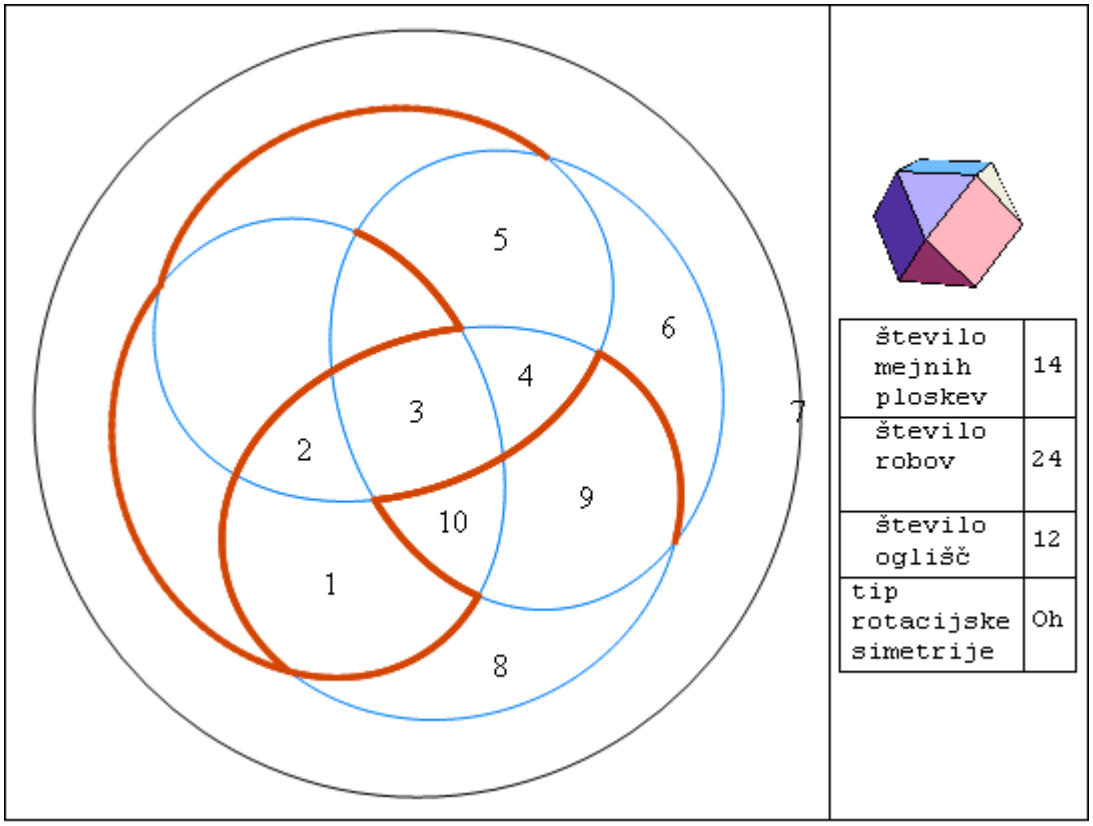
Labirint na ploskvah



Labirint na projekcijah teles



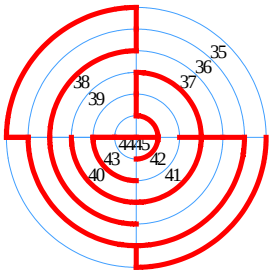
število mejnih ploskev	20
število robov	30
število oglišč	12
tip rotacijske simetrije	Ih

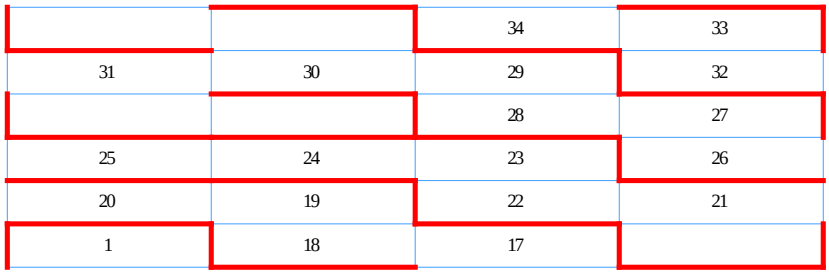


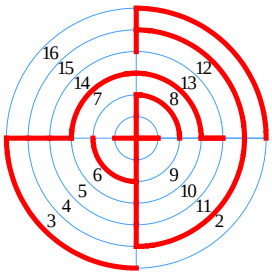
število mejnih ploskev	14
število robov	24
število oglišč	12
tip rotacijske simetrije	Oh

Labirinti na mreži valja in stožca

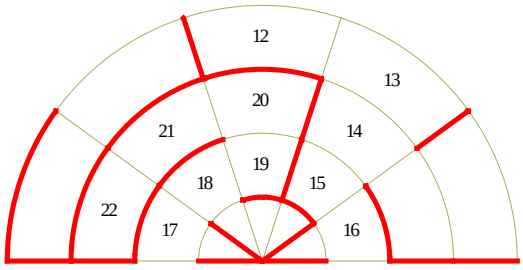
1.

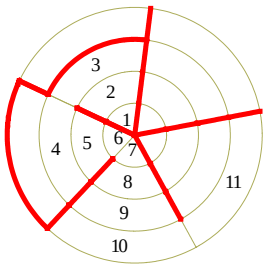




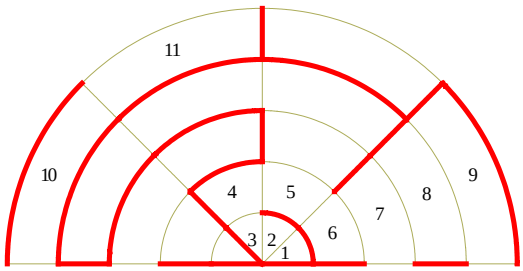


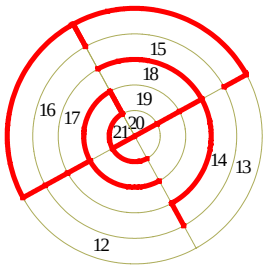
2.



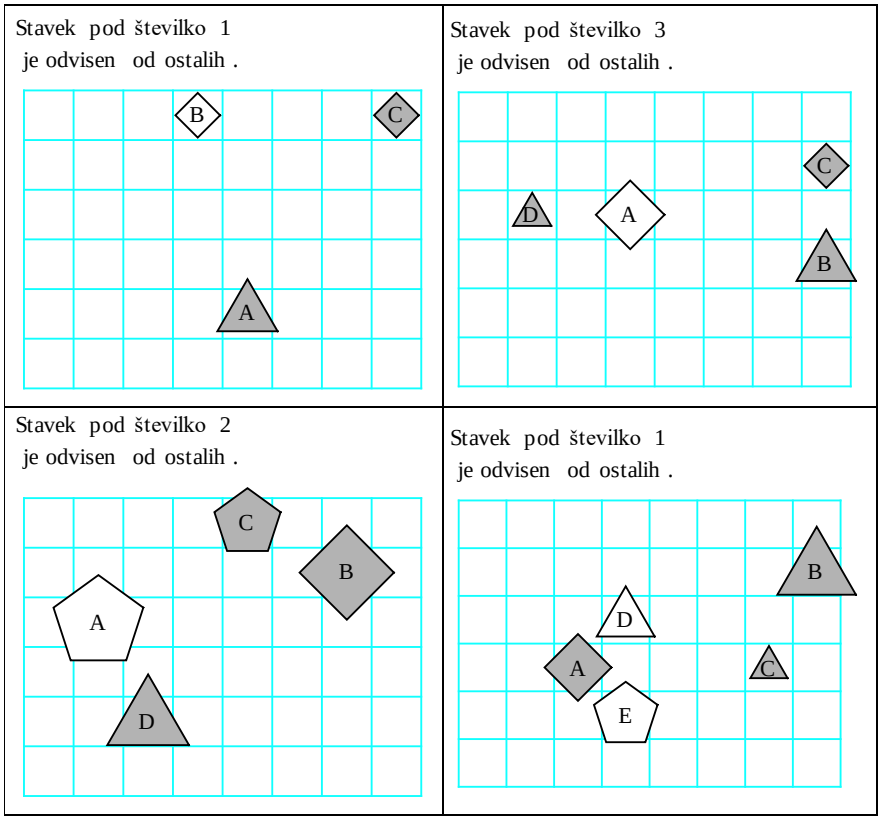


3.

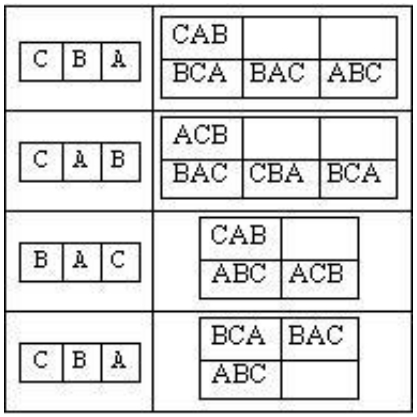


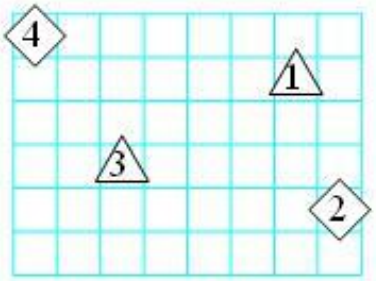


Imena likov



Analiziraj pogoje nalog

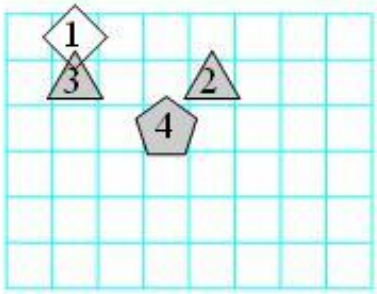




1. Petkotnik (B) ∨ Trikotnik (C)	R
2. Kvadrat (C) ∨ Desno od (A, B)	R
3. Trikotnik (C) ↓ Levo od (A, C)	N

1	2	3	4
C	D	A	B

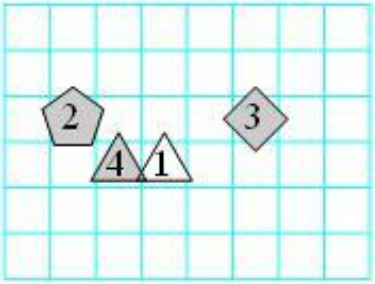
1. pogoj	BDAC	DBAC	ADBC	ABDC	DABC	BADC
2. pogoj	CBAD	CDBA	BDCA	DBCA	CBDA	
3. pogoj	ADCB	CABD	DACB	CADB	BACD	



1. Siv (B) ↓ Pod (C, D)	N
2. Bel (D) ⇔ Nad (A, C)	N
3. Petkotnik (C) ∧ Levo od (B, C)	R

1	2	3	4
A	D	B	C

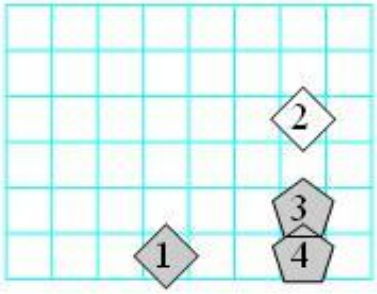
1. pogoj	BDAC	BADC			
2. pogoj	DABC				
3. pogoj	ABDC	DCAB	DCBA	DBCA	DACB



1. Pod (A, B)	R
2. Siv (A) ∨ Petkotnik (D)	N
3. Trikotnik (D) ↓ Levo od (B, D)	N

1	2	3	4
A	B	C	D

1. pogoj			
2. pogoj	ADBC	DBCA	CDBA
3. pogoj	ABDC	ACBD	



1. Levo od (A, B)	R
2. Siv (C) ∨ Desno od (B, C)	N
3. Kvadrat (D) ⇔ Pod (A, B)	N

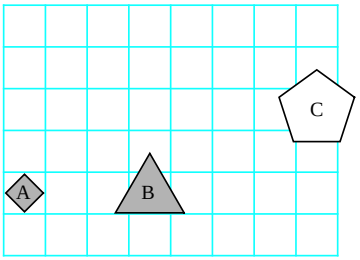
1	2	3	4
A	C	B	D

1. pogoj	DCAB		
2. pogoj	ABCD	ABDC	ADCB
3. pogoj	ACDB		

Protislovni pogoji

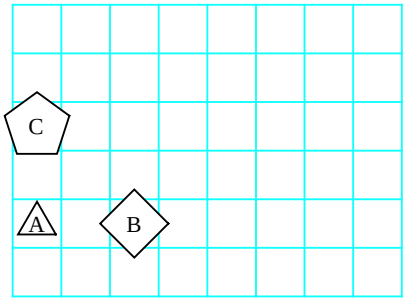
1.

Pogoj pod številko 1
je v protislovju z ostalimi pogoji .



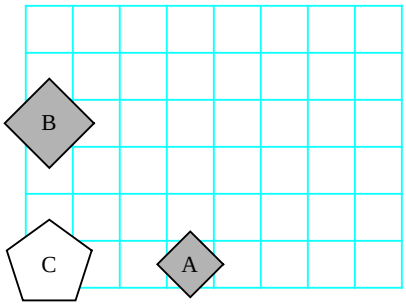
2.

Pogoj pod številko 2
je v protislovju z ostalimi pogoji .



3.

Pogoj pod številko 2
je v protislovju z ostalimi pogoji .



Algebra imen



Rešitev naloge v esperantu

Nina, Pongo, angla setero, Berlino
Jana, Kingo, pudelo, Kairo
Lana, Mistralo, dobermano, Bagdado

Izdaja: Založniško podjetje **LOGIKA d.o.o., Svetčeva pot 11, 1241 Kamnik**. Poslovni račun pri NLB: 02312-0016592829. Davčna številka: SI56917309. Podjetje je zavezanec za DDV po zakonu o DDV.
Za izdajatelja*: Izidor Hafner*.
E-mail: **info@logika.si**
Spletna stran: **http://www.logika.si**.
Revija *Logika & razvedrilna matematika* je vpisana v register medijev pri Ministrstvu za kulturo pod številko 759. Strokovni pokrovitelj: *Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko - oddelek za teoretično računalništvo*.

Glavni in odgovorni urednik: *dr. Izidor Hafner* (**http://mat03.fe.uni-lj.si/html/people/izidor/homepage/**)
Člana časopisnega sveta: *prof. dr. Tomaž Pisanski in Darjo Felda, prof.*
Recenzent: *Vilko Domajnko, prof.*
Sodelavci: *mag. Urša Demšar, dr. Gregor Dolinar, Monika Kavalir, dr. Meta Lah, Boštjan Kuzman,Teja Oblak, Hiacinta Pintar, Maja Pohar, mag. Katka Šenk in dr. Aleš Vavpetič*.
Oblikovanje: *Ana Hafner*
Jezikovni pregled: *Besana*

Za objavljene prispevke ne plačujemo honorarjev.

© 2017 LOGIKA d.o.o.
ISSN 2350-532X
LOGIKA & RAZVEDRILNA MATEMATIKA, letnik XXVII, št. 4 od 4, 2017/2018
Elektronska izdaja. Cena revije: 0 €.