ŠESTI LETNIK — 1996–1997 – 2

DEL REVIJE

LOGIKA

&

RAZVEDRILNA MATEMATIKA

Revijo sta za splet pripravila Nada in Marko Razpet

na podlagi datotek, ki jih je izdelal Darjo Felda.

V S E B I N A

Alicine dogodivščine v deželi iger 3
Ontologija Leśniewskega 8
Dama v črnem 19
International Mathematical Talent Search 21
Številska križanka malo drugače 26
Naloga z razpredelnico 33
Pomagaj Urošu 34

Izdaja: Založniško podjetje LOGIKA d.o.o., Svetčeva 11, 1240 Kamnik,
št. žiro računa: $50140 - 603 - 57434$

Za izdajatelja: Izidor Hafner

Revija *Logika & Razvedrilna matematika* je vpisana v register časopisov pri *Uradu za informiranje* pod registrsko številko *949*. Po mnenju *Urada za informiranje* št. *23/89–92* šteje revija *Logika & Razvedrilna matematika* med proizvode informativnega značaja, za katere se plačuje davek od prometa po stopnji 5%.

Revijo *Logika & Razvedrilna matematika* subvencionira *Ministrstvo za šolstvo in šport*

Člani časopisnega sveta: prof. dr. Frane Jerman, prof. dr. Tomaž Pisanski in Darjo Felda, prof.

Strokovni pokrovitelj: Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko – Oddelek za teoretično računalništvo

Glavni in odgovorni urednik: dr. Izidor Hafner

Sodelavci: Urša Demšar, Gregor Dolinar, Urška Drčar, Petra Ipavec, Dušanka Kocić, Katka Kurent, Meta Lah, Nika Novak, Hiacinta Pintar, Maja Pohar, Tanja Soklič, Mirjana Todorovič in Aleš Vavpetič

Jezikovni pregled: računalniški program *Besana*

Generalni sponzor: Marand d.o.o., zastopstvo Borland

Sponzorja: Časopisno podjetje *Dnevnik*, NIL d.o.o.

Tisk: Tiskarna "Planprint", Rožna dolina c. IV/32–36, Ljubljana

Ilustrirala: Ana Hafner

Naklada: 2250 izvodov

© 1996 LOGIKA d.o.o.

ISSN $0354 - 0359$

LOGIKA & RAZVEDRILNA MATEMATIKA
letnik *VI*, št. 2, $1996/97$

Cena revije: v prosti prodaji 370 SIT, za naročnike 330 SIT in vključuje 5% prometni davek

ALICINE DOGODIVŠČINE V DEŽELI IGER

3. Alica sreča Klubučarja

Igra s fižolčki, ki sta se jo igrala brata Cepetin in Cepetaj, je Alico zelo navdušila. Ko je odšla od Glave-Moža, je premišljevala o njej. Vendar pa se ji je igra na nizu kvadratkov zdela zelo enostavna, zato je razmišljala, kako bi jo malo bolj zapletla. Kmalu se ji je posvetila rešitev - namesto na traku, kjer lahko fižolček premikaš le v eni smeri, naj se igra odvija na plošči!

Premislila je še nekaj podrobnosti nove igre in že je hotela začeti iskati strategijo za to novo igro, ko je ugotovila, da pri sebi nima nobenega papirja. Tedaj pa je za ovinkom ceste zagledala hišico.

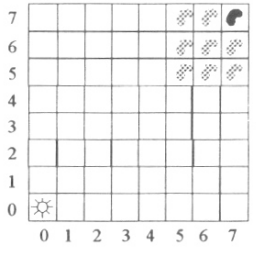
"Tam bodo verjetno imeli kak papir in svinčnik," je pomislila in stekla proti vratom. Pozvonila je, a nič se ni zgodilo. Ker tudi po drugem zvonjenju ni nihče prišel odpret, se je razočarana obrnila in hotela oditi. A prav ko je stopila na cesto, jo je skozi okno poklical znani Klobučarjev glas:

"O, ti si, Alica! Veš, po kosilu sem malce legel, pa se nisem takoj prebudil ob tvojem zvonjenju!"

Alica ga je pogledala in mu odvrnila: "A, spal si? Upam, da nisi hud, ker sem te zbudila. Veš, prejle sem premišljevala o neki igri in sem mislila, da bi pri tejle hiši lahko dobila malo papirja in še svinčnik naposodo, da bi lahko o igri bolj podrobno premislila. Upam, da ga imaš?"

"Hm, o igrah bi rada premišljevala? Potem pa dobrodošla! Kar naprej, kar naprej, tudi jaz bi rad sodeloval!" je bil Klobučar takoj navdušen.

Alica je vstopila v hišo in Klobučar je takoj prinesel nekaj listov ter dva svinčnika. "No, katero igro si mislila preučevati?" jo je vprašal. Alica je vzela enega od listov in narisala naslednjo sliko:



"Igro igrata dva igralca, ki izmenično premikata fižolček. S poljubnega polja ga lahko premakneta največ za dve polji proti levi ali navzdol, kot vidiš na primeru črnega fižolčka, ki ga lahko premakneš na vsa polja, kjer so narisani sivi fižolčki," je pojasnila.

"Zmaga pa tisti igralec, ki premakne fižolček na polje, označeno s sončkom?" še ni bilo vse jasno Klobučarju.

"Da, seveda; to sem še pozabila povedati," je potrdila Alica. Klobučar se je zamislil nad igro, Alica pa je vzela drug list, še enkrat narisala igralno mrežo in začela iskati zmagovalno

strategijo. Seveda je pri tem uporabljala isto tehniko kot zadnjič pri igrah, ki sta jih igrala brata Cepetin in Cepetaj, in zato je kaj hitro ugotovila, v katerem primeru lahko zmaga beli, v katerem pa črni igralec.

Naloga 1. Ugotovi, kdaj lahko zmaga beli in kdaj črni igralec.

"No, Klobučar, kaj si pa ti potuhtal?" je pobarala Klobučarja, ki je še vedno zamišljeno strmel v igralno desko.

"Bolj ko premišljujem, bolj se mi dozdeva, da ima črni kaj malo možnosti za zmago na tvoji igralni deski. Recimo, da fižolček leži na polju (m, n). Potem lahko črni zmaga le, če sta števili m in n deljivi s 3."

Naloga 2. Utemelji Klobučarjevo trditev.

"In ker je začetno polje na tvoji igralni deski polje $(7, 7)$, kar ni deljivo s 3, črni zelo težko zmaga," je še povedal Klobučar, ko je Alici razložil, kar je odkril.

Alica se je zastrmela vanj in nato še v svojo skico. Malce je še pomislila, nato pa je vzkliknila:

"Pa saj to je natančno tista strategija, ki sem jo tukajle opisala! Le malce bolj matematično obliko si ji dal!"

"Pokaži, kaj si napisala," jo je poprosil Klobučar. Pokazala mu je in ko si je ogledal njeno risbo, je pripomnil:

"Dobro si narisala. S tvoje skice se tudi neposredno vidi, da je beli pri tej igri v prednosti. Saj so na skici skoraj sama A polja! Daj, izračunaj, koliko je A in koliko B polj, če je igralna plošča široka m in visoka n polj."

Alica je malo pomislila, nato pa rekla: "Ampak, saj to ne gre! Če recimo povečaš m za 1, sploh ni nujno, da se tudi število B polj poveča. Kako naj potem napišem neko formulo?"

"Poskusi uporabiti tak izraz, ki se mu vrednost poveča šele, ko je sprememba podatkov dovolj velika."

Alica je premišljevala, a se ji sploh ni posvetilo. Malce žalostna je prosila Klobučarja:

"Še vedno je pretežko zame. Daj mi no še kakšen namig."

"Le pomisli - B kvadratki so tisti, ki imajo obe koordinati deljivi s 3."

"Deljivi s 3," je na glas ponovila Alica. "Aha! Uporabiti moram deljenje z ostankom!"

"Da, le da se temu bolj učeno reče celoštevilčno deljenje," jo je še popravil Klobučar.

Naloga 3. Izrazi število A in B polj z dolžinama stranic m in n.

Alica je seveda kmalu našla ustrezno formulo. Ko jo je pokazala Klobučarju, ji je ta rekel:

"Medtem ko si ti računala, sem se domislil take različice igre, ki bi obema igralcema dala nekaj možnosti za zmago. Na začetku fižolček ni na polju $(7, 7)$, kot je pri tvoji različici igre, ampak ga igralca vržeta na igralno ploščo, tako da se ustavi na enem od polj, nato pa s tega polja nadaljujeta igro. Seveda naredi prvo potezo beli in naslednjo črni igralec. Ali lahko izračunaš, koliko možnosti ima za zmago beli in koliko črni igralec?"

Alici pa očitno še ni bilo vse jasno:

"Kaj pa, če pade fižolček na polje $(0, 0)$?" je vprašala.

"Potem naj bo remi," se je znašel Klobučar.

Naloga 4. Izračunaj, koliko možnosti za zmago ima pri Klobučarjevi igri beli in koliko črni igralec.

"No, pa sva še matematično pokazala, da ima črni zelo malo možnosti za zmago," je na Aličin rezultat pripomnil Klobučar.

"Pa bi se dalo to kako izenačiti?" je vprašala Alica.

Klobučar je malo pomislil, nato pa ji svetoval:

"Pomisli, kaj najbolj vpliva na to, da ima A igralec tako veliko možnosti."

"Hm ... Okoli zmagovalnega polja je veliko A polj, verjetno bi jih moralo biti manj," je odgovorila Alica.

"Kako pa bi se dalo to doseči?" jo je vprašal Klobučar.

"Zmanjšati bi morali doseg potez, ki jih igralca lahko naredita!" se je posvetilo Alici. "Bom poskusila, kaj se zgodi, če lahko igralca premakneta fižolček le za eno polje levo, navzdol ali po diagonali!"

Naloga 5. Ugotovi, kateri od igralcev lahko zmaga pri novi različici igre. Koliko možnosti imata sedaj beli in črni igralec?

"Še vsaj ena poteza je preveč," je rekla Alica. "Ukinimo še premikanje po diagonali. Morda bo potem zares izenačeno?"

Naloga 6. Kakšne možnosti imata igralca, če fižolčka ne moreta premikati po diagonali?

"No, pa ti je le uspelo izenačiti igralca," je Alico pohvalil Klobučar.

Alica pa še ni bila zadovoljna:

"Ali je možno sestaviti igro tako, da ima črni več možnosti kot beli?" jo je zanimalo.

Naloga 7. Poskusi poiskati tako varianto igre, kjer bi imel črni več možnosti za zmago od belega.

Klobučar je kar nekaj časa mislil, a videti je bilo, da je ta problem zanj pretežek. Zato se je izgovoril:

"Zdajle se mi nič ne posveti. Sicer pa je že pozno - zunaj je že tema. Ne bi odšla domov in bi do naslednjega srečanja oba premislila?"

Alici se je zdelo malce čudno, da jo Klobučar kar nekako podi od hiše, a sama pri sebi si je priznala, da je res že bolj pozno. Zato mu je odvrnila.

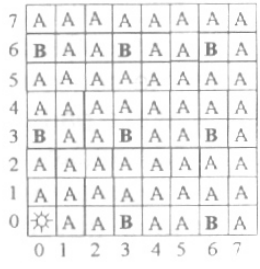
"Ja, imaš kar prav. Saj sem od napornega dne že kar precej utrujena." Vstala je od mize in odšla proti vratom.

"Verjetno bom šla kar takoj spat in bom šele kasneje spet premišljevala o izenačeni igri. Pa hvala za gostoljubje," se je še zahvalila.

"Tudi tebi hvala za družbo, bilo je prav zanimivo!" je skozi vrata še zaklical Klobučar in ji pomahai v slovo.

Rešitve nalog

Rešitev 1. S polj $(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1)$ in $(2,2)$ lahko prvi igralec (beli) postavi fižolček na polje $(0,0)$ in zmaga. Ta polja označimo z A. S polj $(0,3)$ in $(3,0)$ pa lahko beli postavi fižolček le na eno od polj, ki so že označena z A. Ko pride nato na vrsto črni, lahko on premakne fižolček na 2 zmagovalno polje in zmaga. Ti dve polji zato označimo z B. S polj $(3,1),(3,2),(4,0),(4,1),(4,2),(5,0),(5,1)$ in $(5,2)$ lahko beli o igralec premakne fižolček na polje $(3,0)$. Naslednji je na vrsti črni, ki ga premakne na eno od polj, označenih z A, in tako omogoči belemu, ki je na vrsti za njim, da zmaga. Po podobnem postopku lahko označimo še ostala polja. Velja: Če je fižolček na polju, označenem z A, potem lahko zmaga igralec, ki je na potezi in če je fižolček na polju, označenem za B, potem lahko zmaga igralec, ki ni na potezi.



Rešitev 2. Naj bo torej fižolček na polju (m,n). Če sta m in n deljiva s 3, potem koordinati m' in n' polja, na katerega bo beli premaknil fižolček, ne bosta obe deljivi s 3, torej bo $m'=3k+i, n'=3l+j$, kjer je $i,j\in\{1,2\}$. Ker pa črni lahko premakne fižolček za eno ali dve polji v poljubni smeri, seveda lahko postavi fižolček na polje, ki ima obe koordinati deljivi s 3. Kot vemo, zmaga igralec, ki premakne fižolček na polje $(0,0)$ in ker je 0 deljivo s 3, lahko črni, če bo vedno postavljal fižolček na polje, ki je deljivo s 3, vedno zmaga.

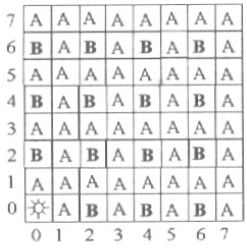
Če pa fižolček ni na polju, ki ima obe koordinati deljive s 3, potem ga lahko beli postavi na tako polje. Sedaj je črni tisti, ki fižolčka ne more premakniti na polje, ki bi imelo obe koordinati deljivi s 3 in zato ob optimalni igri belega črni izgubi.

Ker je polje, na katerem je fižolček na začetku, polje $(7,7)$, seveda črni ne more zmagati (če beli pravilno igra), saj 7 ni deljivo s 3.

Rešitev 3. Naj bo m največja koordinata v vrstici (koordinate so torej $0,1,2,\ldots,m$) in n največja koordinata stolpca (tu so torej možne koordinate $0,1,\ldots,n$). B polje je prvo in nato vsako tretje polje v prvi in nato vsaki tretji vrstici. V vsaki tretji vrstici je potem $n/3+1$ B polj in takih vrstic je $m/3+1$ (a/b je celoštevilčno deljenje, kjer ostanka ne upoštevamo). Vseh B polj je torej $(n/3+1)\cdot(m/3+1)-1$, saj polje $(0,0)$ ni B polje. Celotna igralna plošča pa ima $(m+1)(n+1)$ polj, torej je število A polj enako $(m+1)(n+1)-(m/3+1).(n/3+1)-1)-1=(m+1)(n+1)-(n/3+1)\ldots(m/3+1)$. Tisti pa, ki že poznate funkcijo $[x]$ – celi del števila x, pa lahko rezultat tolmačite tudi tako: število B polj je $[\frac{n}{3}+1][\frac{m}{3}+1]-1$ in število A polj je $(m+1)(n+1)-[\frac{n}{3}+1][\frac{m}{3}+1]$.

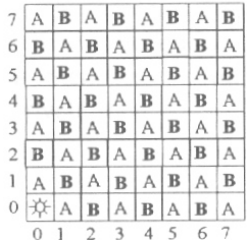
Rešitev 4. Vseh polj, na katera lahko pade fižolček je $8\cdot 8=64$. Od teh je eno polje za remi, $(m+1)(n+1)-(n/3+1).(m/3+1)=8\cdot 8-3\cdot 3=64-9=55$ je A polj in $(7/3+1)(7/3+1)-1=3\cdot 3-1=8$ je B polj. Torej ima beli 55 od 64 možnosti za zmago, črni pa 8 od 64. Bolj učeno: verjetnost, da zmaga beli, je $\frac{55}{64}$; verjetnost, da zmaga črni, je $\frac{8}{64}=\frac{1}{8}$ in verjetnost za remi je $\frac{1}{64}$.

Rešitev 5. Ko uporabimo Aličino metodo z A in B polji, dobimo sledečo sliko:



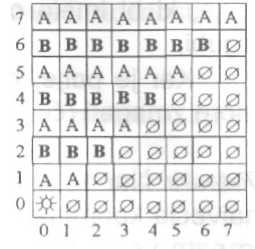
Črni ima $4 \cdot 4 - 1 = 15$ možnosti od 64, beli pa $64 - 4 \cdot 4 = 48$ od 64 možnosti.

Rešitev 6. Sedaj so A in B polja razporejena tako:



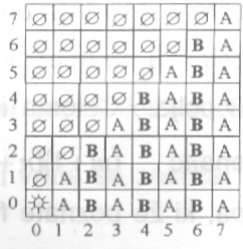
Črni ima tako 31, beli pa 32 možnosti. Še vedno pa ostane ena možnost od 64 za remi.

Rešitev 7. Če namesto premikanja po diagonali od treh možnih potez iz naloge 5 ukinemo premikanje na levo (in se tako lahko premikamo le še za eno dol ali po diagonali), dobimo sledečo sliko:



Prečrtana ničla pomeni, da fižolček na tem polju lahko pripelje le do remija, saj zaradi onemogočenega gibanja na levo ne moremo pripeljati fižolčka do polja $(0, 0)$.

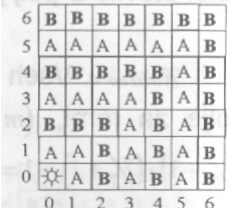
Podobno sliko dobimo, če se lahko premikamo le za eno po diagonali in za eno na levo:



Obe igri lahko združimo v eno samo tako, da sta možni potezi na danem polju:

a) premik za eno polje po diagonali proti $(0, 0)$ in

b) premik za eno polje v smeri tiste koordinate, ki ima na danem polju večjo številčno vrednost. Na diagonali seveda te poteze ne moremo izvesti, saj imata obe koordinati enako številčno vrednost. Pod diagonalo se lahko premaknemo proti levi, nad diagonalo pa se lahko premaknemo navzdol. Ker pa je naš namen doseči, da bi imel črni več možnosti za zmago, moramo še zmanjšati število polj za 1 (tako da so robna polja polja B, ne A). Ko storimo vse opisane korake, dobimo igro na polju 7×7, ki ima takole razporeditev A in B polj:

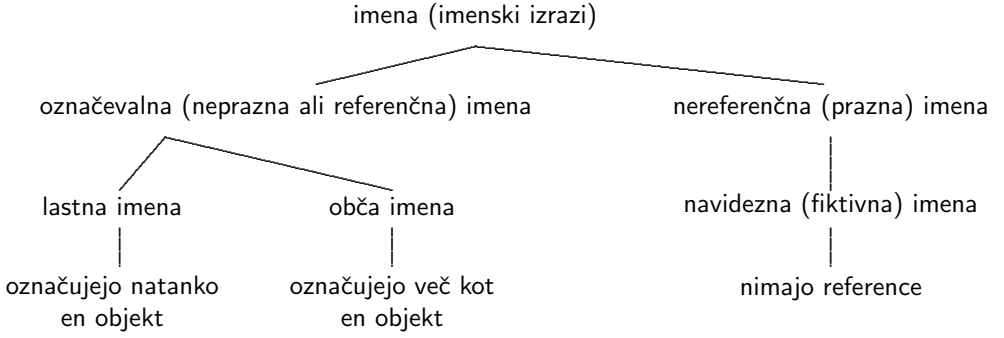


Na tej plošči ima beli 21, črni pa 27 možnosti od 49. Ena možnost pa je še vedno za remi.

Drago Bokal

ONTOLOGIJA LEŚNIEWSKEGA

Ontologijo lahko glede na njen predmet obravnave označimo za najbolj splošno teorijo o tem, kar je. Začeti moramo tako, da pojasnimo, kaj je ime (samostalnik) v ontologiji. Tu je ime bolj splošen pojem kot v drugih formalizacijah logike. V predikatnem računu individualna konstanta (ime) označuje natanko en objekt. Semantično vlogo imen v ontologiji bomo pojasnili z naslednjo shemo:



Vzemimo, da pogovorno področje (univerzum pogovora) sestoji iz dveh objektov, ki ju označimo z a in b. Uvedimo še prazno c ter občе ime d, ki označuje tako a kot b. Vsa druga imena, ki jih uvedemo, so sinonimi teh imen. Univerzalna izjava

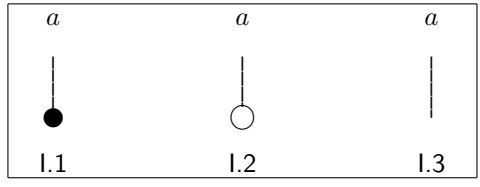
$$[x]\varphi(x)$$

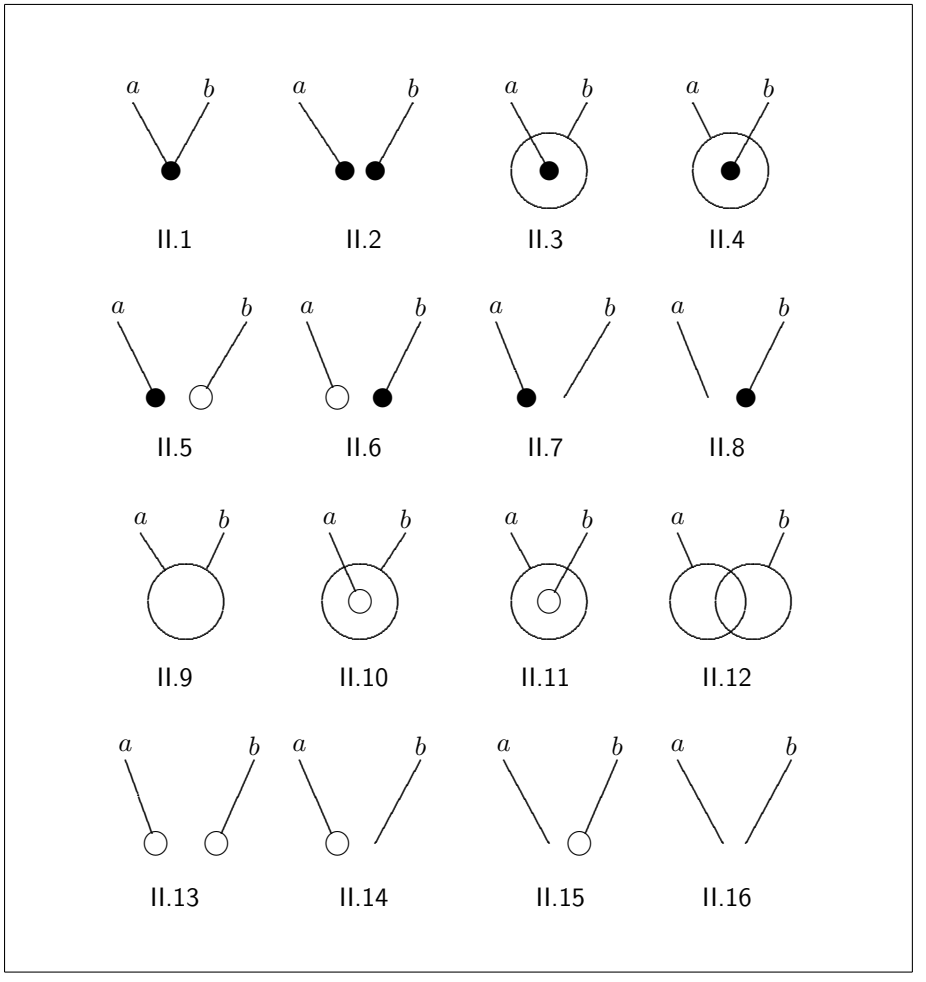
pomeni isto kot

$$\varphi(a) \wedge \varphi(b) \wedge \varphi(c) \wedge \varphi(d).$$

Opomba. Ali se v vsakdanjem življenju srečujemo s fiktivnimi imeni? Kaj pa pri posameznih vedah? Vzemimo npr. matematiko, in naštejmo nekaj imen. Pri tem predpostavimo, da so realna števila pogovorno področje: $e(2.7\ldots), 0, 1$, naravno število, liho naravno število, $0/0, 1/0$, kvadratni koren iz -1. Zadnji dve imeni sta fiktivni, saj (pri zadnjem) nimamo opravka s kompleksnimi števili. Kaj pa $0/0$?

Najboljši način za neformalno pojasnitev ontoloških pojmov je vpeljal Lejewski (učenec Leśniewskega). Gre za tako imenovano ontološko tabelo, katere osnova so Eulerjevi krogi. Majhen črn krog predstavlja objekt, ki ga označuje lastno ime. Večji (neosenčeni) krog predstavlja objekte, ki jih označuje občе ime. Fiktivnemu imenu pa ne ustreza noben krog. Diagrami I.1, I.2 in I.3 predstavljajo semantične možnosti enega imenskega izraza, medtem ko diagrami od II.1 do II.16 predstavljajo semantične možnosti dveh imen.





V naslednjem spisku bomo navedli primere za posamezne semantične možnosti. Prvo ime predstavlja a, drugo b.

I.1. Sonce.
I.2. Zvezda.
I.3. Pegaz.
II.1. Sonce, Zemlji najbljižja zvezda.
II.2. Sonce, Zemlja.
II.3. Sonce, zvezda.
II.4. Zvezda, Sonce.
II.5. Zemlja, zvezda.
II.6. Zvezda, Zemlja.
II.7. Zemlja, Pegaz.
II.8. Pegaz, Zemlja.

II.9. Liho število, število, ki ni deljivo z 2.
II.10. Praštevilo, naravno število.
II.11. Naravno število, praštevilo.
II.12. Majhen človek, pameten človek.
II.13. Sodo število, liho število.
II.14. Število, $1/0$.
II.15. $1/0$, število.
II.16. $1/0$, Pegaz.

1. Funktorji vključitve

1.1. *Singularna inkluzija:* $a \,\varepsilon\, b$ (beremo a je b). Pogoj za resničnost podajata diagrama II.1 in II.3. Resnični so npr. stavki: Sonce ε zvezda. $1 \,\varepsilon\, 1$. $2 \,\varepsilon$ praštevilo.
1.2. *Krepka inkluzija:* $a \prec b$ (vsak a je b). Pogoj za resničnost podajajo diagrami II.1, II.3, II.9 in II.10.
1.3. *Šibka vključitev*: $a \subseteq b$ (vsi a so b). Pogoj za resničnost je eden od diagramov II.1, II.3, II.8, II.9, II.10, II.15, II.16.
1.4. *Funktor delne vključitve*: $a \,\Delta\, b$ (beremo: kakšen a je b). Pogoj za resničnost je eden od diagramov II.1, II.3, II.4, II.9, II.10, II.11, II.12.

2. Funktorji enakosti

2.1. *Singularna identiteta:* $a = b$ (beremo: a je isti objekt kot b). Diagram II.1 je edina možnost za resničnost.
2.2. *Krepka identiteta:* $a \equiv b$. Pogoj za resničnost je eden od diagramov II.1, II.9.
2.3. *Funktor šibke identitete:* $a \circ b$. Pogoj za resničnost je eden od diagramov II.1, II.9, II.16.

3. Funktorji eksistence

3.1. *Prvi eksistenčni funktor:* $\mathsf{ex}(a)$ (beremo: obstaja vsaj en a). Stavek je resničen, če nastopi ena od možnosti I.1 ali I.2.
3.2. *Drugi funktor eksistence:* $\mathsf{sol}(a)$ (beremo: obstaja največ en a). Stavek je resničen, če nastopi ena od možnosti I.1 ali I.3.
3.3. *Tretji eksistenčni funktor:* $\mathsf{ob}(a)$ (beremo: obstaja natanko en a ali a je objekt). Stavek je resničen samo, če nastopa možnost I.1.

Uvedba fiktivnih imen omogoča, da ločimo eksistenco od kvantifikacije. V primeru pogovornega področja z dvema objektoma nam stavek $[\exists x]A(x)$ pomeni $A(a) \vee A(b) \vee A(c) \vee A(d)$. Če prevedemo izraz *za vsak x, x obstaja* z ontološkim stavkom

$$[x]\mathsf{ob}(x),$$

dobimo napačno trditev. Velja namreč

$$[\exists x]\neg\mathsf{ob}(x),$$

saj za x lahko vzamemo fiktivno ime. Zato temu kvantifikatorju ne rečemo eksistencionalnostni, temveč partikularni in beremo: *za neki x ali za neki smisel izraza x.*

Aksiomatizacija ontologije

Pravila ontologije predpostavljajo neki sistem prototetike, to je razširjenega izjavnega računa. Tu bo dovolj, če predpostavimo, da imamo na voljo vse običajne izjavne povezave in pravilo definicije izjavnih funktorjev. Poleg tega potrebujemo še aksiom za osnovni ontološki funktor, pravilo uvedbe ontološke (nominalne) definicije ter pravilo nominalne ekstenzionalnosti.
Nominalna definicija ima obliko

$$[a\ldots](a\ \varepsilon\ \Psi \leftrightarrow a\ \varepsilon\ a \wedge \varphi(a)),$$

Tu je Ψ nominalna (imenska) konstanta ali imenski funktor, ki ima za argumente spremenljivke, ki smo jih zaznamovali s tremi pikami. Te spremenljivke morajo skupaj z a nastopati prosto v izjavnem izrazu $\varphi(a)$. Ta shema je bila uporabljena v prvi aksiomatizaciji. Pozneje je bila dovoljena shema, v kateri je namesto izraza $a\ \varepsilon\ a$ nastopil izraz oblike $a\ \varepsilon\ A$, kjer je A nominalen izraz, v katerem lahko prosto nastopajo samo spremenljivke iz seznama ...
Prvi aksiom ontologije (iz leta 1920) je bila naslednja trditev:

$$[ab](a\ \varepsilon\ b \leftrightarrow [\exists c]c\ \varepsilon\ a \wedge [c](c\ \varepsilon\ a \rightarrow c\ \varepsilon\ b) \wedge [cd](c\ \varepsilon\ a \wedge d\ \varepsilon\ a \rightarrow c\ \varepsilon\ d)).$$

Zdaj pa naštejmo nekaj definicij:

d1. $[a](\mathsf{ex}(a) \leftrightarrow [\exists b]b\ \varepsilon\ a)$,
d2. $[a](\mathsf{sol}(a) \leftrightarrow [bc](b\ \varepsilon\ a \wedge c\ \varepsilon\ a \rightarrow b\ \varepsilon\ c))$,
d3. $[a](\mathsf{ob}(a) \leftrightarrow [\exists b]a\ \varepsilon\ b)$,
d4. $[ab](a = b \leftrightarrow a\ \varepsilon\ b \wedge b\ \varepsilon\ a)$,
d5. $[ab](a \circ b \leftrightarrow [c](c\ \varepsilon\ a \leftrightarrow c\ \varepsilon\ b))$.

To so bile definicije nekaterih stavčnih funktorjev. Navedimo še nekaj definicij nominalnih funktorjev.

d6. $[a](a\ \varepsilon\ \Lambda \leftrightarrow a\ \varepsilon\ a \wedge \neg a\ \varepsilon\ a)$ (beremo: a je $objekt$, $ki\ ne\ obstaja$),
d7. $[a](a\ \varepsilon\ V \leftrightarrow a\ \varepsilon\ a)$ (beremo: a je $objekt$ (stvar, predmet)),
d8. $[ab](a\ \varepsilon\ N(b) \leftrightarrow a\ \varepsilon\ a \wedge \neg a\ \varepsilon\ b)$ (a je ne-b),
d9. $[Aab](A\ \varepsilon\ a \cup b \leftrightarrow A\ \varepsilon\ A \wedge (A\ \varepsilon\ a \vee A\ \varepsilon\ b))$ (A je a ali b),
d10. $[Aab](A\ \varepsilon\ a \cap b \leftrightarrow A\ \varepsilon\ a \wedge A\ \varepsilon\ b)$ (A je a in b).

Uporaba

Najprej se vpašajmo, ali je sploh smiselno vpeljati simbolni jezik, ali ni mogoče vse matematične trditve izraziti v vsakdanjem jeziku, ki ga razširimo z določenimi simboli in spremenljivkarni. Za običajno delo v matematiki tak pristop popolnoma zadošča. Ko pa moramo natančno formulirati postopke dokazovanja in definiranja, je to mogoče le, če znamo opredeliti pojem stavka vsakdanjega jezika. To pa se slovničarjem še ni posrečilo. Simbolni jezik je običajno dokaj enostaven, res pa je, da nismo navajeni na njegovo uporabo. Podobno je s programskimi jeziki za računalnike.
Drugo vprašanje pa je, kateri simbolni jezik izbrati. Tako imenovani predikatni račun je najenostavnejši, vendar pa predpostavlja, da imajo vsa imena (konstante) za referenco

natanko določen objekt. Nima torej na voljo praznih imen in občih imen. Seveda pa takšna imena v matematiki poznamo.
1. V geometriji nam $\mathbf{premica}(A, B)$ pomeni natanko določeno premico, če sta točki različni. Če pa je $A = B$, je $\mathbf{premica}(A, B)$ obče ime za vse premice, ki grejo skozi A. Po naše velja $A \in \mathbf{premica}(A, A)$. Točka A je element $\mathbf{premice}$(A,A). Pomen znaka ε je tu drugačen kot v ontologiji. Tu gre za pripadnost množici, če vzamemo, da je premica množica točk.
2. Vzemimo zdaj, da je univerzum našega pogovora množica realnih števil, in da želimo definirati operacijo deljenja. V ontologiji bi to naredili takole

$$[xyz]\left(x\ \varepsilon\ \frac{y}{z} \leftrightarrow x\ \varepsilon\ x \wedge y = xz\right).$$

Če so x, y in z števila in z ni nič, je to povsem običajno deljenje. Kaj pa če je z enako 0? Tedaj nastopita dve možnosti

a) $y = 0$. Tokrat je $0/0$ obče ime za poljubno število, saj je pogoj $0 = x0$ izpolnjen za vsako število x.

b) $y \neq 0$. Recimo, da je $y = 1$. Potem je $1/0$ fiktivno ime, saj pogoj $1 = x0$ ni izpolnjen za noben x.
3. Kaj pa je z izrazom

$$\frac{\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}}?$$

Kdaj je $1/0 = x(1/0)$? Problem je v tem, da nismo povedali, kako množimo število z neobstoječim objektom. Takšen izraz je prav tako fiktivno ime. Ali ni v tem primeru leva stran enakosti enaka desni in to pri vsakem x? Ne, saj enakost pomeni, da je objekt na levi isti kot na desni. Fiktivno ime pa ne pomeni objekta (to je števila). Torej je tudi zgornji izraz fiktivno ime.
4. Kaj pa

$$\frac{\frac{0}{0}}{\frac{0}{0}}?$$

Kdaj je $0/0 = x0/0$? Tudi tokrat enakost ni izpolnjena nikoli, zato je zgornje ime fiktivno.
5. Ali je rešitev iz točke 4 edina. Kaj pa, če bi spremenili definicijo deljenja, tako da bi vzeli kakšno drugo enakost? Do sedaj smo namreč uporabljali funktor singulame identitete ($=$). Naslednji kandidat je funktor šibke identitete ($\circ$). Ob primerni opredelitvi seštevanja in množenja, bi lahko pisali:

$$\text{sodo} + \text{liho} \circ \text{liho},$$

$$\text{sodo} \times \text{liho} \circ \text{sodo}.$$

6. V prejšnji številki revije smo "dokazali", da je $0 = 1$: Vsako funkcijo $F(x)$, katere odvod je enak $f(x)$, imenujemo nedoločeni integral funkcije $f(x)$. Dejstvo, da je $F(x)$

nedoločeni integral funkcije $f(x)$, zapišemo takole:

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Če je funkcija $F(x)$ integral funkcije $f(x)$, je integral iste funkcije tudi $F(x) + C$. Torej velja:

$$F(x) + 1 = \int f(x)\,dx.$$

Toda, če sta dve reči enaki tretji, sta enaki tudi med sabo. Sledi:

$$F(x) = F(x) + 1.$$

Če odštejemo $F(x)$ na obeh straneh, dobimo $0 = 1$. Ta dokaz je povsem veljaven, če smo za definicijo privzeli:

$$F(x) = \int f(x)\,dx \leftrightarrow F'(x) = f(x).$$

Nobenega protislovja ne bi bilo, če bi se definicija glasila:

$$F\ \varepsilon \int f(x)\,dx \leftrightarrow F'(x) = f(x).$$

Zgornje sklepanje bi bilo po shemi: Sokrat je človek. Platon je človek. Torej je Sokrat = Platon. Takšno sklepanje je napačno, medtem, ko je sklepanje, $x = a$ in $y = a$, torej je $x = y$, povsem veljavno.

7. Uporaba navideznih (praznih) imen, lastnih in občih imen v logiki je bila znana že tisočletje. Novost, ki jo je uvedel Leśniewski, je bila njihova uvedba v formalno oziroma simbolno logiko. Danes na tem področju prevladuje predikatni račun, ki ga je opisal nemški logik Gottlob Frege (1848–1925) v delu Begriffsschrift (Pojmovni zapis) (1879), saj je njegov opis bolj enostaven in ima v principu enake izrazne možnosti. Vendar pa ta sistem ne odraža zgradbe naravnih jezikov. Tu lahko iščemo razloge, da se simbolna logika celo v matematiki bolj malo uporablja.

Češki matematik in logik Bernard Bolzano (1781–1848) je bil najpomembnejši logik svojega časa. Prvi je definiral pojem zvezne funkcije, bil je predhodnik teorije množic, definiral je pojem logičnega izhajanja. V delu Wissenschaftslehre (Teorija znanosti) 1837, med drugim piše:

> ... Na primer, množica točk, ki ležijo med dvema točkama A in B, je nedvomno neskončna, vendar je popolnoma določena s tema točkama, tako da je natančno določeno, kaj tej množici pripada in kaj ne. Ne obstaja točka, katere status je nedoločen. Morebiti ne bi bilo nič od rečenega prezrto, če ne bi prezrli dejstvo, da je neskončno splošen (obči) pojem in da smo privzeli navado, da predstavimo vse neskončne množice in količine z enim in istim znakom, namreč ∞. Ker pa obstajajo različne neskončne množice, s tem, da množici pripišemo lastnost neskončnosti, še nismo izčrpali vseh njenih lastnosti. Kljub vsemu, moramo vse neskončne množice predstaviti z istim znakom. Vsakdo lahko in

> mora sprejeti naslednje enačbe: $\infty + 1 = \infty$, $2\infty = \infty$, $\infty/2 = \infty$. Na osnovi tega so zaključevali, da je neskončnost nedoločljiva. Nekako pa ni bilo spoznano, da veljajo podobne enakosti, kjer F pomeni, da je množica končna: $F + 1 = F$, $2F = F$, $F/2 = F$.

Bolzano še ni dokazal, da obstajajo neskončne množice, med katerimi ne moremo najti bijektivne preslikave. To je nekaj desetletij pozneje odkril Cantor. Seveda pa ni nič narobe, če označimo vse neskončne množice z istim znakom. Zgornje enakosti moramo tolmačiti tako, da so simboli ∞, $\infty+1$, $\infty/2$ občа imena, ki pomenijo isto kot *neskončna množica*. Simbol $\infty + 1$ pomeni množico, ki smo jo dobili iz neskončne množice, tako da smo ji dodali še en element.
Naloga: Imamo več oznak (imen) za pojem neskončne množice. Če bi želeli napisati Bolzanove enakosti v ontologiji, ne bi smeli uporabiti znaka za individualno identiteto $=$, ampak znak za krepko ali šibko identiteto. Ali je enakost $F = 1 \circ F$ točna? Ne, saj desna stran vključuje tudi prazno množico, leva pa ne. Mišljeno trditev bi morali zapisati s funktorjem vključitve. Kako?

Izidor Hafner

NALOGE BRALCEV

Tokrat spet objavljamo nekaj nalog, ki nam jih je poslal prof. Šefket Arslanagić iz Berlina. Naslednje naloge se uspešno rešujejo z malo logike in nekaj več matematike. So iz pomembnih poglavij algebre in poleg bistre glave in potrpežljivosti potrebujemo nekaj elementarnih matematičnih dejstev.

1. Zaporedoma zapisujemo števke 123456789101112131415 ... Katera števka se nahaja na 1996. mestu?

2. Dokaži, da je število $2^{1994} + 7^{1996}$ sestavljeno.

3. Dokaži, da je število $1993 \cdot 1994 \cdot 1995 \cdot 1996 + 1$ popoln kvadrat.

4. Izpolni preostala mesta magičnega kvadrata (pravokotnika).

1996	1992	
1989	1994	

5. Ali obstajajo naravna (ali realna) števila, za katere velja enakost

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{1995}^2 = 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_{1995}) - 1996?$$

6. Dokaži, da za vsa realna tevila $x_1, x_2, \ldots, x_{1995} > 0$ velja

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_{1995}) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{1995}} \right) \geq 1995^2.$$

7. Kaj je več

$$\frac{2^{1994} + 1}{2^{1995} + 1} \quad \text{ali} \quad \frac{2^{1995} + 1}{2^{1996} + 1}?$$

8. Dokaži, da je število $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{1996}$ deljivo s 30.

9. Dano je naravno število

$$n = \underbrace{111\ldots11}_{1996}\underbrace{222\ldots22}_{1996}.$$

Dokaži, da je število $n^3 - 3n^2 - 18n$ deljivo s 13200.

10. Če je p praštevilo, potem je $p^{1996} + 1997^p$ sestavljeno število. Dokaži.

Rešitve

1. Prvih devet števk v zaporedju smo uporabili za zapis enomestnih števil. Naslednjih $90 \cdot 2 = 180$ števk je uporabljeno za zapisovanje dvomestnih števil. Do vključno 1996. mesta je napisano še $1996 - 180 - 9 = 1807$ števk. Z njihovo uporabo je napisano $1807 : 3 = 602$ (ostanek 1) tromestnih števil, tj. 100, 101, ..., 700, 701. Torej, na 1996. mestu je prva števka števila 702, tj. 7.

2. Splošno velja

$$\begin{aligned} a^4 + 4b^4 &= a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = \\ &= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = \\ &= (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab). \end{aligned}$$

V posebnem primeru dobimo

$$\begin{aligned} 2^{1994} + 7^{1996} &= (7^{499})^4 + 2^2 \cdot 2^{1992} = \\ &= (7^{499})^4 + 4 \cdot (2^{498})^4 = \\ &= (7^{998} + 2^{997} - 2^{499} \cdot 7^{499})(7^{998} + 2^{997} + 2^{499} \cdot 7^{499}). \end{aligned}$$

3. Imamo

$$\begin{aligned} 1993 \cdot 1994 \cdot 1995 \cdot 1996 + 1 &= (1995 - 2) \cdot (1995 - 1) \cdot 1995 \cdot (1995 + 1) + 1 = \\ &= (1995 - 2) \cdot (1995 + 1) \cdot 1995 \cdot (1995 - 1) + 1 = \\ &= (1995^2 - 1995 - 2) \cdot (1995^2 - 1995) + 1 = \\ &= (1995^2 - 1995)^2 - 2 \cdot (1995^2 - 1995) + 1 = \\ &= [(1995^2 - 1995) - 1]^2 = \\ &= (1995^2 - 1996)^2. \end{aligned}$$

Splošno velja za vsak $n \in \mathbb{N}$:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2.$$

4.

1991	1990	1995
1996	1992	1988
1989	1994	1993

5. Iz dane enakosti dobimo

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{1995}^2 - 2x_1 - 2x_2 - \ldots - 2x_{1995} + 1995 \cdot 1 = -1$$

oziroma

$$(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+\ldots+(x_{1995}-1)^2=-1.$$

Ker pa je leva stran enakosti nenegativna (najmanjša vrednost je 0 pri $x_1=x_2=\ldots=x_{1995}=1$), takšna realna števila ne obstajajo.

6. Na osnovi neenakosti med aritmetično in geometrijsko sredino ($A\geq G$) imamo

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{1995}}{1995}\geq \sqrt[1995]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{1995}}$$

in

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{1995}}}{1995}\geq \sqrt[1995]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{x_{1995}}}.$$

Sledi

$$x_1+x_2+\ldots+x_{1995}\geq 1995\cdot\sqrt[1995]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{1995}}$$

in

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{1995}}\geq 1995\cdot\sqrt[1995]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{x_{1995}}}.$$

Po množenju obeh strani neenakosti dobimo

$$(x_1+x_2+\ldots+x_{1995})\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{1995}}\right)\geq 1995^2.$$

Enačaj velja samo, če so vsa števila pozitivna in enaka. Velja tudi posplošena neenakost, ki se dokazuje na enak način:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\geq n^2.$$

7. Označimo

$$x=\frac{2^{1994}+1}{2^{1995}+1},\ y=\frac{2^{1995}+1}{2^{1996}+1}.$$

Potem velja

$$2x=\frac{2^{1995}+2}{2^{1995}+1}=1+\frac{1}{2^{1995}+1},\ 2y=\frac{2^{1996}+2}{2^{1996}+1}=1+\frac{1}{2^{1996}+1}.$$

Očitno je

$$\frac{1}{2^{1995}+1}>\frac{1}{2^{1996}+1},$$

to je $2x>2y$ in nazadnje $x>y$.

8. Ker je $1996 = 4 \cdot 499$, je število 1996 deljivo s 4. Sledi

$$\begin{aligned} 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{1996} &= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \ldots + (2^{1993} + 2^{1994} + 2^{1995} + 2^{1996}) = \\ &= 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3) + \ldots + 2^{1993}(1 + 2 + 2^2 + 2^3) \\ &= 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 2^4 + \ldots + 2^{1992}) = \\ &= 30(1 + 2^4 + \ldots + 2^{1992}). \end{aligned}$$

Trditev je dokazana.

9. Najprej vidimo, da je $n^3 - 3n^2 - 18n = n(n^2 - 3n - 18) = n(n+3)(n-6)$. Pokazati moramo, da je zadnji produkt deljiv z 13200. Ker je $n = 111\ldots11222\ldots22$, pri čemer imamo 1996 enic in prav toliko dvojk, je število n deljivo 2, deljivo s 3 (saj je vsota števk enaka $1996 \cdot (1 + 2)$ deljiva s 3) in deljivo z 11 (saj sta enaka seštevka števk na lihih in sodih mestih). Poleg tega je število $n + 3 = 111\ldots111222\ldots225$ deljivo s 25, število $n - 6 = 111\ldots111222\ldots216$ deljivo z 8. Naše število je deljivo z $2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 25 \cdot 8 = 13200$. (q.e.d).

10.

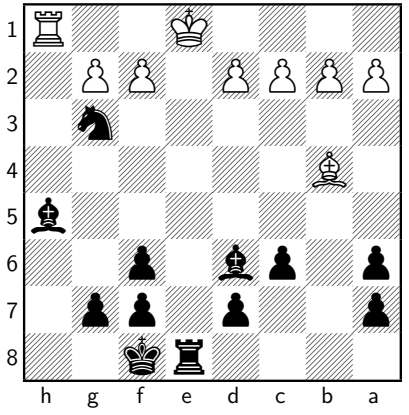
a) Če je $p = 2$, imamo $2^{1996} = 2^{4 \cdot 499} = (2^4)^{499} = 16^{499}$, torej se število 2^{1996} končuje s števko 6. Število 1997^2 se končuje z 9. Torej se število $2^{1996} + 1997^2$ končuje s 5, zato je deljivo s 5 in je sestavljeno število.

b) Če je $p > 2$, je p liho število. Takšni sta tudi število p^{1996} in 1997^p. Potem pa je njun seštevek sodo število (in seveda večje od 2), torej sestavljeno število.

Šefket Arslanagić

DAMA V ČRNEM

Beli je v zadnji potezi premaknil kralja bele vojske. Vemo še, da beli kralj ni zapustil prve vrste, da se noben beli kmet ni uspel prebiti do zadnje sovražnikove vrste in da beli skakač ni skončal na desni strani bojišča (linije E, F, G in H). Ali morda lahko pomagaš kralju črne vojske ugotoviti, na katerem polju je padla črna dama, kralju bele vojske pa, na kateri liniji je padel beli skakač?



Rešitev

Beli je z zadnjo potezo, v kateri je premaknil kralja, matiral črnega. Ker pa beli kralj ni zapustil prve linije in tako na polje C1 ni mogel priti s polja D2, je bila zadnja poteza belega velika rošada. Kraljevi lovec črnega je padel na svojem prvotnem mestu F8, saj sta kmeta na E7 in G7 še vedno na svojh prvotnih poljih. Torej je črni lovec na G5 promoviran. Ker pa se giblje samo po črnih poljih, je lahko promoviral samo na poljih A1, C1, E1 in G1. Vendar na poljih A1 in E1 ni mogel, saj sta tam pred zadnjo potezo belega, ki je bila rošada, stala trdnjava in kralj. Prav tako črni lovec ni mogel promovirati na polju C1, saj bi lahko črni kmet prišel tja samo s polja D2. V tem primeru pa bi bil beli kralj v šahu in bi se moral premakniti. Pa se ni, saj je beli rokiral. Črni lovec je torej promoviral na polju G1.

Ugotovimo sedaj, kateri črni kmet je promoviral v lovca na G5. Da bi prišel kmet z linije A na linijo G, bi moral pojesti vsaj šest belih figur, ker pa je na šahovnici še dvanajst belih figur, je v črnega lovca na G5 promoviral kmet s polja D7 na polju G1, pri čemer so padle vsaj tri bele figure. Štiri niso mogle, saj je moral črni kmet pojesti liho belih figur, da je prišel z linije D na linijo G. Ker pa so v igri padle štiri bele figure, je črni kmet s polja D7 pojedel natanko tri bele figure. In beli skakač ni bil ena od teh figur, saj je padel na levi strani šahovnice. Črni kmet z linije D je tako pojedel belo kraljevo trdnjavo, belo damo in belega kmeta z linije D, saj beli ni promoviral. Da pa je lahko pojedel belega kmeta z linije A, je moral le-ta priti na polje E3.

Beli kmet s polja A2 je torej padel na polju E3, na poti do tja pa je moral pojesti štiri črne figure in to preden se je premaknil črni kmet s polja D7. Ker pa črni damin lovec s polja C8 ni mogel zapustiti svojega polja preden se ni premaknil kmet s polja D7, ga beli kmet ni mogel pojesti. Beli kmet z linije A je tako pojedel oba črna skakača, črno damino trdnjavo s polja A8 in črnega kmeta s polja A7 oziroma figuro, v katero je v primeru promoviranja ta kmet promoviral. V obeh primerih pa je črni kmet s polja A7 pojedel še četrto manjkajočo belo figuro, belega skakača. Če je namreč črni kmet s polja A7 padel, preden je prišel do prve vrste, je moral priti na linijo B, da ga je lahko beli kmet z linije A pojedel. Če pa je prišel do prve vrste, je moral promovirati na polju B1, saj se bela trdnjava do rošade v zadnji potezi ni premaknila s polja A1. Beli skakač je torej padel na liniji B.
Beli kmet s polja A2 je pojedel štiri črne figure, vendar nobena od teh ni bila črna dama, saj je le ta lahko zapustila svoje mesto šele, ko je črni kmet s polja D7 pojedel belega kmeta s polja A2 na polju E3. Ker pa je črni lovec s polja F8 padel na svojem prvotnem mestu, sta manjkajoči črni figuri, črna dama in črni lovec s polja C8, padli na poljih C3 in H3, kjer sta sedaj bela kmeta. Ker se je črni lovec s polja C8 gibal samo po belih poljih, je padel na polju H3, črna dama pa zato na polju C3.

Gregor Dolinar

INTERNATIONAL MATHEMATICAL TALENT SEARCH

Solutions & Comments Round 16

Problem 1/16. Prove that if $a+b+c=0$, then $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Solution 1: Since $c=-(a+b)$, we have $(a+b)^3=-c^3$, which implies that $a^3+3a^2b+3a^b2+b^3=-c^3$. This is equivalent to $a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b)$, and hence to $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Solution 2: Cubing $a+b+c=0$ yields $a^3+b^3+c^3+3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2e+c^2a+c^2b)+6abc=0$. Adding $3abc$ to both sides and factoring yields $a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ca)=3abc$. Applying $a+b+c=0$ yields the desired result.

Solution 3: Cubing $a+b+c=0$ yields $a^3+b^3+c^3+3(a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b))+6abc=0$. Therefore, $a^3+b^3+c^3-3(a^3+b^3+c^3)+6abc=0$, from which $a^3+b^3+c^3=3abc$, as desired.

Solution 4: Note that $(a+b+c)(a^2-bc+b^2-ca+c^2-ab)=a^3+b^3+c^3-3abc$. Thus, $a+b+c=0$ implies that $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Problem 2/16. For a positive integer n, let $P(n)$ be the product of the nonzero base 10 digits of n. Call n "prodigitious" if $P(n)$ divides n. Show that one can not have a sequence of fourteen consecutive positive integers that are all prodigitiaus.

Solution 1: Suppose that $\{S\}$ is a sequence of consecutive positive integers that are all prodigitious. Then it must include at least one member, say n, whose units digit is 3. Therefore $3 \mid n$, We see that $3 \nmid (n+10)$ so $(n+10) \notin S$. Similarly, the units digit of $n-4$ is 9, but 3 cannot divide both n and $n-4$. Thus $n-4 \notin S$. So the minimum and maximum possible integers in $\{S\}$ are $n-3$ and $n+9$, respectively. Therefore, the sequence contains at most 13 consecutive integers that are all prodigitious.

Solution 2: By the definition of prodigitious, any prodigitious n ending in the digit 3, 6 or 9 must be a multiple of three. For all non-negative integers k, the numbers $30k+13, 30k+16, 30k+19, 30k+23, 30k+26, 30k+29$ are not divisible by 3 and are therefore not prodigitious. The largest difference between neighboring non-prodigitious integers of these forms is 14 (between $30k+29$ and $30(k+1)+13$), leaving room for no more than 13 consecutive prodigitious integers.

Comments: It can be shown that if $n=11,110,111,110$ and $m=10^k \cdot n$, where k is a fixed non-negative integer, then $\{100m, 100m+1, 100m+2, \ldots, 100m+12\}$ is a sequence of 13 consecutive prodigitious integers. The same holds if $n=1,111,111,111,111,111,110$. Are there other 'seeds' for such sequences? The reader

should consult the solution of Problem 20 in the April 1995 issue of *Math Horizons* for the derivation of such sequences.

Problem 3/16. Disks numbered 1 through n are placed in a row of squares, with one square left empty. A move consists of picking up one of the disks and moving it into the empty square, with the aim to rearrange the disks in the smallest number of moves so that disk 1 is in square 1, disk 2 is in square 2, and so on until disk n is in square n and the last square is empty. For example, if the initial arrangement is

3	2	1	6	5	4		9	8	7	12	11	10

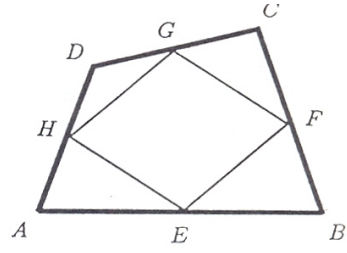
then it takes at least 14 moves; i.e., we could move the disks into the empty square in the following order: $7, 10, 3, 1, 3, 6, 4, 6, 9, 8, 9, 12, 11, 12$.

What initial arrangement requires the largest number of moves if $n = 1995$? Specify the number of moves required.

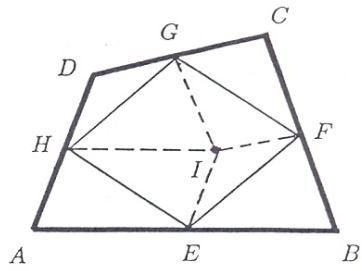
Solution: Any permutation of the discs $1, 2, 3, \ldots, 1995$ and a blank can be represented as a collection of cycles. As an example, $1, 3, 4, 2, 7, 5,$ blank, 6 can be represented as $(1)(2, 4, 3)(5, 6,$ blank$, 7)$, which shows that 1 is in its correct position, 2 is in the 4 spot, 4 in the 3 spot, and 3 in the 2 spot, and so on. A cycle of n discs which does not include the blank will require $n + 1$ moves, while a cycle of n discs which includes the blank will required $n - 1$ moves. Therefore the maximum number of moves will be required when the discs are arranged in swapped pairs. One pair will include the blank, and require one move, while the other $1994/2 = 997$ pairs will require 3 moves, resulting in $997 \times 3 + 1 = 2992$ moves. This can also be achieved by arranging the discs so that there are 996 swapped pairs and one cycle of three that does not include the blank, with the blank initially in the last (correct) position.

Comments: This problem, which involves permutations of a structure, can lead the interested student to a study of abstract algebra, in particular, group theory. An interesting extension of this problem is to ask how many initial arrangements require the maximum number of moves.

Problem 4/16. Let $ABCD$ be an arbitrary convex quadrilateral, with E, F, G, H the midpoints of its sides, as shown in the figure on the right. Prove that one can piece together tri angles AEH, BEF, CFG, DGH to form a parallelogram congruent to parallelogram $EFGH$.

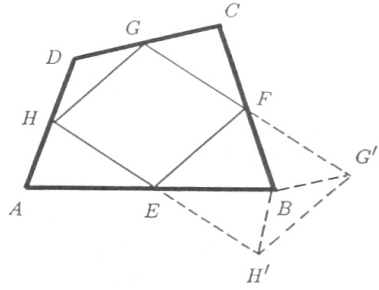


Solution 1. Let I be a point in parallelogram $EFGH$ so that $HI \parallel AB$ and $EI \parallel AD$. Draw segments IF and IG, and thereby partition $EFGH$ into four tri angles. We will show that these triangles are pairwise congruent to the triangles surrounding the parallelogram, and hence complete the solution.



Since $AEIH$ is a parallelogram, clearly $\triangle AEH \cong \triangle IHE$. Since $\angle DHG = \angle IEF$, $IE = DH$, and $FE = GH$, it follows that $\triangle DHG \cong \triangle IEF$. Similarly, $\angle FEB = \angle GHI$, $HI = EB$, and $GE = GH$ imply that $\triangle FEB \cong \triangle GHI$. Finally, since $IF = DG = GC$, $IG = BF = FC$, it follows that $\triangle CGF \cong \triangle IFG$.

Solution 2. As shown in the figure on the right, extend GF to G' so that $FG' = FG$ and HE to H' so that $EH' = EH$. Then $EFG'H'$ is a parallelogram congruent to $EFGH$ by construction. Connect B to G' and H'. We will show that the resulting triangles are pairwise congruent to the ones surrounding parallelogram $EFGH$.



To this end, note that since $FG = FG'$, $FC = FB$, and $\angle CFG = \angle BFG'$, $\triangle CFG \cong \triangle BFG'$. For similar reasons, $\triangle AEH \cong \triangle BEH'$. In view of these congruences, $DG = CG = BG'$ and $DH = AH = BH'$, and since $HG = H'G'$, it follows that $\triangle DHG \cong \triangle BH'G'$. Finally, $\triangle EFB$ is congruent to itself.

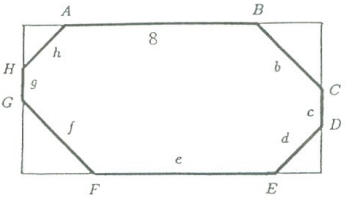
Comments: It is not difficult to show that in Solution 1 the point I is the midpoint of diagonal BD. Hence an alternate dissection of parallelogram $EFGH$ would have resulted by using the midpoint of diagonal AC.

Parallelogram $EFG'H'$ in Solution 2 could also be obtained by cutting out parallelogram $EFGH$, 'hinging' the surrounding triangles at F, G, and H, and then rotating them about these hinges. For this alternate solution one must observe that the sum of the angles of quadrilateral $ABCD$ is $360°$, and hence the triangles fit together at B.

Query: What if A, B, C, D are not in the same plane? What if quadrilateral $ABCD$ is not convex?

Problem 5/16. An equiangular octagon $ABCDEFGH$ has sides of length $2, 2\sqrt{2}$, $4, 4\sqrt{2}, 6, 7, 7, 8$. Given that $AB = 8$, find the length of EF.

Solution. Since the common angle of the octagon is 135°, it can be embedded in a rectangle as shown in the figure on the right. Label the lengths of the sides in a clockwise cyclical fashion as $8, b, c, d, e, f, g$, and h. We wish to find the length e of EF.



Note that the sides of length b, d, f, and h form hypotenuses of isosceles right triangles. Thus, equating the two resulting expressions for the height of the rectangle yields

$$8 + \frac{b+h}{\sqrt{2}} = e + \frac{d+f}{\sqrt{2}}$$

or, equivalently

$$(8-e)\sqrt{2} = d + f - b - h.$$

We shall use the fact that if x, y, z and w are integers, then $x\sqrt{2} + y = z\sqrt{2} + w$ if and only if $x = z$ and $y = w$. Now if e is irrational, then $e = 2\sqrt{2}$ or $4\sqrt{2}$ so that $(8-e)\sqrt{2} = 8\sqrt{2} + k$, where k is an integer, while $d + f - b - h$ is either an integer or $2\sqrt{2} + \ell$ or $4\sqrt{2} + \ell$ where ℓ is an integer. Thus, e must be rational and $(8-e)\sqrt{2}$ is a multiple of $\sqrt{2}$. The only possible expressions $d + f - b - h$ which are multiples of $\sqrt{2}$ are

$$\begin{aligned} 6 + 4\sqrt{2} - 2 - 4 &= 4\sqrt{2}, \\ 6 + 2\sqrt{2} - 2 - 4 &= 2\sqrt{2}, \quad \text{and} \\ 7 + 4\sqrt{2} - 7 - 2\sqrt{2} &= 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

The first of these yields $e = 4$ but cannot be attained since 4 occurs as one of b or h. The second yields $e = 6$ but similarly cannot be attained since 6 occurs as one of d or f. The third also yields $e = 6$ and can be attained using either $b = 2\sqrt{2}, c = 4, d = 7, e = 6, f = 4\sqrt{2}, g = 2, h = 7$ or $b = 7, c = 2, d = 4\sqrt{2}, e = 6, f = 7, g = 4, h = 2\sqrt{2}$.

Problems Round 20

Problem 1/20. Determine the number of points (x, y) on the hyperbola

$$2xy - 5x + y = 55$$

for which both x and y are integers.

Problem 2/20. Find the smallest value of n for which the following statement is true: Out of every set of n positive integers one can always choose seven numbers whose sum is divisible by 7.

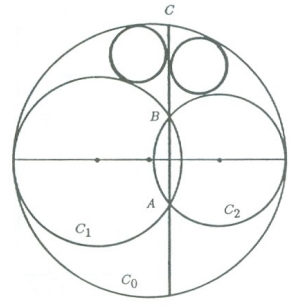
Problem 3/20. The husbands of 11 mathematicians accompany their wives to a meeting. Sometimes the husbands pass one another in the halls, but once any particular pair have passed each other once, they never pass each other again. When they pass one an other, either only one of them recognizes the other, or they mutually recognize each other, or neither recognizes the other. We will refer to the event of one husband recognizing another one as a "sighting", and to the event of them mutually recognizing each other as a "chat", since in that case they stop for a chat. Note that each chat accounts for two sightings.

If 61 sightings take place, prove that one of the husbands must have had at least two chats.

Problem 4/20. Suppose that a and b are positive integers such that the fractions $a/(b-1)$ and a/b, when rounded (by the usual rule; i.e., digits 5 and larger are rounded up, while digits 4 and smaller are rounded down) to three decimal places, both have the decimal value .333.

Find, with proof, the smallest possible value of b.

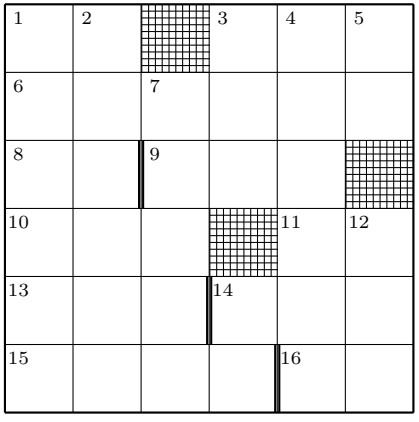
Problem 5/20. In the figure shown on the right, the centers of circles C_0, C_1, and C_2 are collinear, A and B are the points of intersection of C_1 and C_2, and C is point of intersection of C_0 and the extension of AB. Prove that the two small circles shown, tangent to C_0, C_1 and BC, and C_0, C_2 and BC, respectively, are congruent to one another.



ŠTEVILSKA KRIŽANKA MALO DRUGAČE

KRIŽANKI DVOJČICI

Križanka dvojčica 1



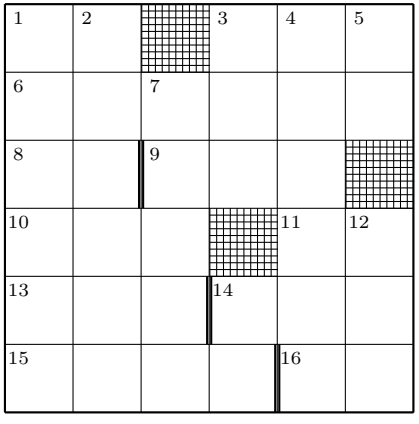
Vodoravno:

1. Število, manjše od $1V$ križanke dvojčice. Njegovi števki sta lihi
3. Razlika v ceni jedi, ki sta ju naročila Borut in Cene v *nalogi 9*
6. Število se začne s števko 7
8. Ni podatkov
9. Ni podatkov
10. Tri enake števke
11. Obratni vrstni red števk kot pri $11V$ križanke dvojčice
13. Rešitev *naloge 3*
14. Zaporedje
15. Ni podatkov
16. Število, ki si ga je zamislil Janez v *nalogi 3*

Navpično:

1. Obratni vrstni red števk kot pri $6V$ križanke dvojčice
2. Zaporedje
3. Število, sestavljeno iz enakih števk kot rešitev *naloge 1*
4. Rešitev *naloge 6*
5. Ni podatkov
7. Prva, tretja in peta števka so zaporedne v tem vrstnem redu (naraščajo ali padajo), druga in četrta pa sta enaki
12. Popoln kvadrat
14. Od ene od starosti iz *naloge 4* odštej 7

Križanka dvojčica 2



Vodoravno:

1. Prva števka je rešitev *naloge 7*, druga pa je največji skupni delitelj prve števke in števila 12
3. Prvi dve števki ti da rešitev *naloge 2*, tretja števka pa je vsota prve in druge števke
6. Obratni vrstni red števk kot pri $1N$ križanke dvojčice
8. Od $1V$ odštej 22
9. Rešitev *naloge 4*
10. Prvi dve števki dasta število, enako vsoti tretje števke in njenega kvadrata
11. Obratni vrstni red števk kot pri $11V$ križanke dvojčice

13. & **14.** Ta vrstica je enaka šesti vrstici križanke dvojčice
15. Rešitev *naloge 5*
16. Kub

Navpično:
1. Število, nato njegov kvadrat
2. Število, sestavljeno iz treh različnih števk
3. Vsota prve in tretje števke ti da drugo
4. Ni podatkov
5. Rešitev *naloge 8*
7. Ni podatkov
12. Same različne števke
14. Ni podatkov

Naloga 1

Trije otroci so pojedli toliko bonbonov (manj kot 130), da jih je še cel naslednji dan bolel trebuh. Podatek, da so vsi pojedli enako število bonbonov zadostuje za rešitev.

Naloga 2

	4	6	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{1}\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$
2								
4								
2,2								
2,1								
2								
2								
2,4								
2,2								
6								
3,1								
1								

Rešitev je vsota praznih polj lika, ki ga omejujejo sama meja gobelina in pa dve daljici. Prvo daljico nariši vodoravno, natanko med 3. in 4. vrstico, drugo pa navpično med 4. in 5. stolpcem. Lik, ki ga potrebuješ, je spodnji desni.

Naloga 3

Mali Janez si je zamislil število in podal dve trditvi. *"Če od števila odšteješ* 4*, dobiš dvakratnik vsote njegovih števk. Če pa številu prišteješ* 6*, dobiš štirikratnik vsote njegovih števk. Ko izračunaš število, mu prištej* 2 *in ga v obratnem vrstnem redu vpiši na mesto prve in tretje števke."*

Naloga 4

Trije družinski člani so sestavljali logično nalogo s podatki svojih starosti. Ugotovili so, da za izračun vsote njihovih starosti (kar je tudi rešitev $8V$) zadostujejo sledeči podatki.
Zmnožek vseh treh starosti je 34155, vendar je vsota starosti nižja od 130. Odgovor ("da" ali "ne") na vprašanje *"Ali je vsota let mlajših dveh večja od starosti tretjega?"* nam še ne da dovolj podatkov. Po odgovoru na vprašanje *"Ali je razlika starosti najstarejšega in najmlajšega večja od vsote starosti mlajših dveh?"* prav tako ne poznamo rešitve. Rešitev pa je tista vsota, ki je od preostalih možnosti najvišja.

Naloga 5

Prisluhnili smo dekletu, ki se je moralo predstaviti:
Sem Nataša in hodim v osnovno šolo. Nobenega razreda še nisem ponavljala in že pred prvim šolskim dnevom sem napolnila 7 let. Moj najljubši letni čas je pomlad, vendar pa takrat na žalost nimam rojstnega dneva. Ga imam pač poleti in ...
Toliko smo prisluhnili njej, povem vam pa še, da je rojena četrtega v mesecu in da pri deljenju rojstnega leta (upoštevamo le zadnji dve cifri – npr.: namesto 1977 vzamemo samo 77) z mesecem rojstva dobimo celo število. Odgovor ("da" ali "ne") na vprašanje *"Ali so v letu rojstva Nataše potekale olimpijske igre?"* nam možnosti rešitev zelo skrči, pravilna pa je tista, ki vsebuje same sode števke in kjer se 8 ne ponovi več kot dvakrat.
Datum vpišite v križanko v skrajšani obliki (npr. 5. 5. 67, če je oseba rojena 5. maja 1967), seveda brez vmesnih pik.

Naloga 6

Mojcina nova telefonska številka je 175–34–80. Vsota števk te številke je večja od vsote števk njene stare telefonske številke, ki pa je prav tako sestavljena iz samih različnih števk in ne vsebuje števke 0. Je pa vsota števk stare številke tudi večja od 25.
Če veste, da je v stari številki več lihih kot sodih števk, da so prve tri zaporedne in da je četrta najvišja, je to dovolj za rešitev.

Naloga 7

V majhnem mestecu na severu države Bukudan živijo še prav nenavadni ljudje. Pa jih imenujmo kar vitezi in oprode, da bo reševanje naloge bolj domače. Seveda so vitezi tisti, ki vedno govorijo resnico, oprode pa vedno lažejo.
Lepega jutra se je zbudil Amnez brez enega svojih najvrednejših zakladov – brez zlatega kipca svoje izvoljenke. Krajo je takoj prijavil, na njegovo presenečenje pa so osumili kar 4 moške, ki so se na noč kraje potikali okoli Amnezove hiše. Ker je bil Amnez izredno bogat in ugleden prebivalec mesteca (seveda tudi vitez), se je sojenje pričelo še istega popoldneva.
Na sojenje so pripeljali 3 osumljence, četrti (Holm) pa ni mogel prisostvovati sojenju, ker je bil ravno v bolnišnici, kjer so mu nameščevali gips.
Sodnik je torej osumljencem zastavil direktno vprašanje *"Kdo je ukradel kipec?"*, odgovori pa so bili protislovni, kar je bilo tudi pričakovati.

Guf: *"Baltazar je ukradel konja."*
Baltazar: *"Sartez je ukradel konja."*
Sartez: *"Holm je tisti, ki je ukradel konja."*

Nato pa je še eden od treh obtožencev dodal: *"Druga dva lažeta."*
Na srečo je sojenju prisostvoval tudi nadarjen mlad logik, ki je omogočil, da so krivca hitreje odkrili. Sodniku je razložil, kdo je, mu pokazal razna mednarodna priznanja (od teh tudi enega s slovenskega državnega tekmovanja v logiki) in sodnik mu je predal besedo. Mladi logik je lahko zdaj enega od treh osumljencev že poslal domov, saj je z njihovimi odgovori ugotovil, da ni kriv. Nato je logik enega od ostalih dveh vprašal, ali je drugi vitez, in ko je dobil odgovor "da" ali "ne", je vedel, kdo je ukradel kipec.
Število črk imena tatu ti da rešitev.

Naloga 8

	1 1 3 1 1	2 1 1 2	3 1 1 3	2 2	2 1	3 3	4 3 4	1 3 1	4 3 4	3 3	2 1	2 2	3 1 1 3	2 1 1 2	1 1 3 1 1
1,1,3,1,1															
2,3,2															
3,1,1,3															
2,2															
2,2															
3,3															
4,3,4															
1,3,1															
4,3,4															
3,3															
1,1															
2,2															
3,1,1,3															
2,1,1,2															
1,1,3,1,1															

Drugo številko ti da vsota pobarvanih polj tega gobelina na območju zgoraj desno, ki ga od gobelina odrežeta vodoravna črta med peto in šesto vrsto in navpična črta med enajstim in dvanajstim stolpcem.

Naloga 9

Pet prijateljev se je prejšnjo soboto po dolgem času ponovno zmenilo, da gredo skupaj na večerjo. Po spodaj navedenih podatkih ugotovite, kdo je kaj jedel, zaporedno številko jedi na menuju in koliko je vsak plačal!

Prijatelji: Borut, Cene, Mateja, Pavle, Petra
Jedi: kalamari, meso na žaru, pizza, sezonska solata, zelenjavni krožnik
Št. na menuju: 5, 13, 34, 55, 67
Cena: 379, 635, 750, 865, 1000

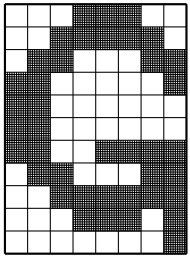
1. Solata je na menu uvrščena kot peta zaporedna jed, Petra pa je naročila št. 55.
2. Naročili so št. 67 in kalamare za 635 SIT, pa še Cene je nekaj naročil.
3. Mateja je naročila pizzo, katere številka je na listu naročenih jedi takoj za številko jedi, ki stane 1000 SIT.
4. Pavle je naročil jed za 750 SIT, kar ni zelenjavni krožnik.
5. Za št. 34 so plačali 865 SIT.

R E Š I T V E

Naloga 1

Vemo, da mora biti število bonbonov deljivo s 3 in manjše od 130. V sami nalogi ni dovolj podatkov za rešitev, saj nam ostane kar 6 možnosti. Te so: 111, 114, 117, 123, 126, 129. Ko pa rešimo še $3V$, ugotovimo, da število vsebuje cifro 6 – torej so otroci pojedli 126 bonbonov.
Za križanko pride v poštev 621 ali 612 in ko rešimo še $6V$, ostane samo še 612.

Naloga 2



Naloga 3

Naloga je preprosta kombinacija dveh enačb z dvema neznankama. Recimo da število označimo z xy.
Za prvo trditev velja $(10x + y) - 4 = 2(x + y)$, za drugo pa $(10x + y) + 6 = 4(x + y)$. Po razrešitvi sistema dveh enačb dobimo $x = 1$, $y = 4$, rešitev je število 14.
Za križanko:
$13V$: številu prištejemo 2 in števki obrnemo; 6 zapišemo na mesto prve števke, 1 pa na mesto tretje števke.
$16V$: rešitev je kar 14.

Naloga 4

Najprej je $34155 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23$. Možne kombinacije starosti in vsota starosti:

1. oseba	2. oseba	3. oseba	vsota
$69 = 23 \cdot 3$	$99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$	5	173
$69 = 23 \cdot 3$	$33 = 3 \cdot 11$	$15 = 3 \cdot 5$	117
$69 = 23 \cdot 3$	$9 = 3 \cdot 3$	$55 = 5 \cdot 11$	133
$69 = 23 \cdot 3$	11	$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$	125
23	$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$	$55 = 5 \cdot 11$	105
23	$99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$	$15 = 3 \cdot 5$	137
23	$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$	$33 = 3 \cdot 11$	101

Od teh odpadejo tiste tri, katerih vsota je večja od 130. Ker nam v nalogi navedeno 1. vprašanje še ne da dovolj podatkov, mora biti odgovor na to vprašanje "ne", saj bi v nasprotnem že poznali rešitev – 101, ki pa tako odpade. Po istem principu odpade zaradi 2. vprašanja vsota 105.
Od preostalih možnosti pa izberemo večjo – torej 125.

Naloga 5

Po podatkih, ki nam jih je dala Nataša, sklepamo, da je bila rojena med letoma 1982 in 1989 (vključno z njima), saj le tako lahko trenutno obiskuje osnovno šolo. Mesec rojstva je $6.$, $7.$ ali $8.$, saj se je rodila poleti (september odpade, ker je 7 let dopolnila že pred prvim šolskim dnevom).
Ker nam odgovor na vprašanje o OI možnosti zelo skrči, mora to biti ravno "da". Ostanejo še te možnosti (deljenje leta z mesecem rojstva):

1. $84 : 6 = 14$
2. $84 : 7 = 12$
3. $88 : 8 = 11$

Same sode števke vsebujeta 1. in 3. možnost, vendar pa je dobra 1., saj 3. vsebuje preveč osmic.
Rešitev je $4.\ 6.\ 84.$

Naloga 6

Vsota števk stare telefonske številke je strogo omejena med 25 in 28. Možne kombinacije so:

1. $1, 2, 3, 4, 7, 9$
2. $1, 2, 3, 5, 6, 9$
3. $1, 2, 3, 5, 7, 8$
4. $1, 2, 3, 5, 7, 9$
5. $1, 2, 3, 6, 7, 8$
6. $1, 2, 4, 5, 6, 8$
7. $1, 2, 4, 5, 7, 8$
8. $2, 3, 4, 5, 6, 7$

Ker je med števkami več lihih kot sodih, ostanejo še možnosti 1. – 4. V križanki pa je zadnja števka $4N$ enaka 1 (sledi iz $16V$), torej je rešitev 234971, ostale pa odpadejo zaradi pogoja, da so prve tri števke zaporedne.

Naloga 7

Najprej moramo ugotoviti, koga je mladi logik poslal domov na začetku. Predpostavimo, da je Guf izjavil, da druga dva lažeta. Če je Guf vitez, mora biti Baltazar kriv, Guf pa nedolžen. Če je Guf oprodа, potem ne velja, da sta Baltazar in Sartez oba lagala; vsaj eden od njiju je govoril resnico. To pomeni, da je kriv ali Sartez (če je govoril resnico Baltazar) ali Holm (če je govoril resnico Sartez); v obeh primerih pa bi bil Guf nedolžen. Če je bil torej Guf tisti, ki je izjavil drugo izjavo, je nedolžen, ne glede na to, ali je vitez ali oprodа. Logik bi to seveda spoznal in ga upravičeno poslal domov.

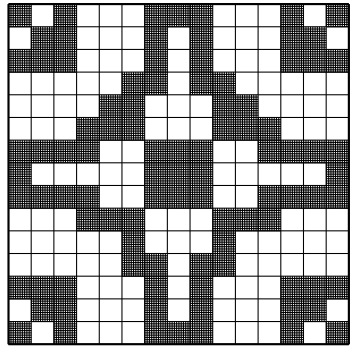
Tako se je tudi zgodilo, kajti če bi drugo izjavo izrekla Baltazar ali Sartez, logik ne bi našel podlage, da pošlje domov kogarkoli. Dokaz za to prepuščam reševalcu.

Tako ostaneta še Baltazar in Sartez. Eden od te dvojice je z odgovorom na logikovo zadnje vprašanje trdil, da je drugi vitez ali da je oprodа. Če je eden trdil, da je drugi vitez (odgovoril logiku pritrdilno), je logik vedel, da sta oba istega tipa. Oba ne moreta biti viteza, saj se njuni obtožbi izločujeta, zato morata biti oba oprodi in sta njuni izjavi neresnični. Niti Sartez niti Holm nista ukradla kipca, Guf je bil že oproščen, torej je krivec Baltazar.

Če pa je eden trdil, da je drugi oprodа, dobimo dve rešitvi in logik še ne bi mogel določiti krivca. Tudi ta dokaz prepuščam reševalcu.

Rešitev za v križanko je torej 8, to je število črk v imenu Baltazar.

Naloga 8



Število pobarvanih kvadratkov na opisanem odseku je 7.

Naloga 9

ime	jed	št. na menuju	cena (SIT)
Borut	zelenjavni krožnik	13	1000
Cene	sezonska solata	5	379
Mateja	pizza	34	865
Pavle	meso na žaru	67	750
Petra	kalamari	55	635

K o n č n a r e š i t e v

Križanka dvojčica 1

7	1		6	2	1
7	2	5	1	3	4
3	3	1	2	4	
4	4	4		9	4
6	5	1	6	7	8
2	6	3	2	1	4

Križanka dvojčica 2

8	4		1	7	8
2	6	4	3	7	7
6	2	1	2	5	
7	2	8		4	9
2	6	3	2	1	4
4	6	8	4	4	7

Luca Lovrečić

Imamo tri reči: steklenico A, ki drži točno liter in pol, steklenico B, za katero se na prvi pogled zdi, da je litrska, ter vodo, kolikor je želimo. Kako preveriti, če je B res točno litrska, oziroma večja ali morda manjša?

Rešitev

Napolnimo B, prelijemo v A, znova napolnimo B in toliko prelijemo v A, da je A polna. Potem vodo iz A zlijemo proč. V B je v tem trenutku ostanek, ki je točno pol litra, če je B litrska, oziroma manj (več), če je B manj (več) kot litrska. B znova prelijemo v A, spet napolnimo B in ponovno prelijemo v A. Če je B litrska, je A ravno polna, če je B manjša, A še ni polna, če pa je B večja, se nekaj vode celo razlije iz A.

Reševanje gre zelo podobno, če najprej napolnimo A. Zanimivo je, da je v obeh primerih ista poraba vode. Če je naloga prelahka, lahko predpostavimo, da je prostornina steklenice A 1,25 l ali 1,6 l ali kaj podobnega.

Anton Cedilnik

NALOGA Z RAZPREDELNICO

Rešimo jo drugače

Predlagam potek reševanja:

1. Narišem primerno tabelo (število stolpcev določa naloga, število vrstic ni omejeno).
2. Berem nalogo in podatke sproti vpisujem v tabelo.
   - Stavek lahko zapišemo v že delno izpolnjeno vrstico ali v še prazno vrstico.
   - V tabelo vpišemo vse podatke.
3. Zlagamo vrstice, dopolnjujemo prazne prostore.
   To delamo, dokler ne dobimo končne rešitve.

Prednosti takega reševanja nalog:

- časovno hitrejše kot z razpredelnico na že znan način,
- napačno reševanje hitro opazimo,
- pomenbna in praktična uporaba simbolov kot npr. zanikanje, veljavnost, ali, hkrati...
- ob uporabi barvnih svinčnikov je preglednost večja.

Menim, da ob takem reševanju, ni potrebna dodatna razlaga učencev.

Za prikaz, kako stavke vpisujemo v tabelo, sem izbrala nalogi z lanskega tekmovanja.

1. Študentski pari (5. in 6. razred)

DEKLE	FANT	KOČA	VRH
– Maruša	– Tomaž	Duplje	– Triglav – Kanin
– Andreja – Tamara			Krn
Tamara		– K. P. Skalarja	
– Maruša	Jure	– Duplje	
	Tomaž		– Triglav
Maruša			– Kanin
	– Aljaž – Gregor		Razor
Meta	– Gregor		
		– Planika	Kanin
	– Gregor	– Pogač. dom	Triglav

2. Študentski pari (7. in 8. razred)

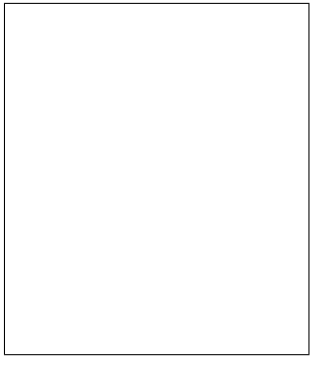
DEKLE	FANT	GORA	VIŠINA
	Peter	– Razor – Špik	$2332\ \mathrm{m}$
Irena		Prisojnik	$x+1$
	Igor		x
Sonja	Borut	– Šklatica	nižja kot gora, kjer je Andrej
Jelka	Andrej	Škrlatica	$2738\ \mathrm{m}$
			Razor takoj za Škrlatico
Jana		– Špik – Razor	
– Mojca	David		
	Igor		$2472\ \mathrm{m}$

POMAGAJ UROŠU

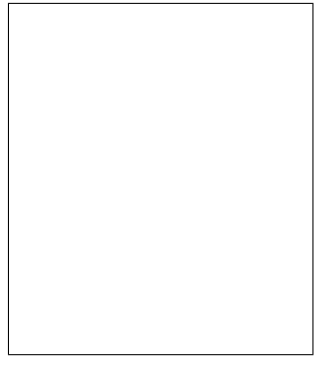
Med počitnicami se je Uroš igral. Imel je posodo z vodo, plastična jajca (*Kinder*), orehe in vijake. Svojih ugotovitev ni narisal, stori to ti.

1. naloga

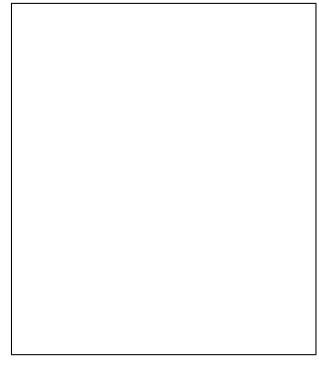
a) Jajce z vodo je dal v posodo z vodo. Ugotovil je, da jajce vedno plava.



Jajce je polno vode.

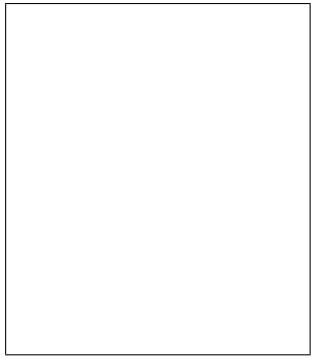


Jajce ni polno vode.

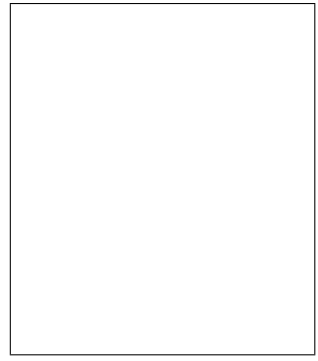


V jajcu ni vode.

b) V jajce je dal vijak. Tudi jajce z vijakom plava. Ko je spustil v vodo vijak, je vijak potonil.

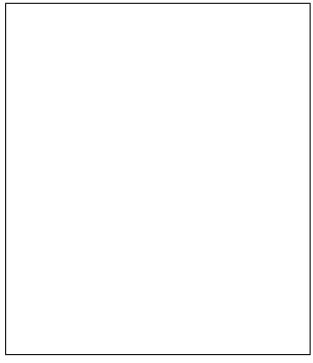


V jajcu je vijak.

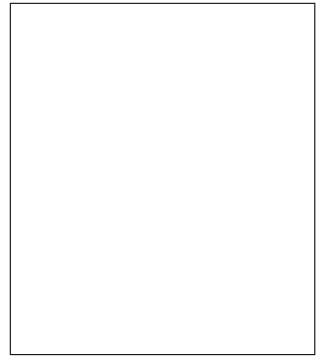


Vijak gre na dno.

c) Poskusil je še z orehom, ki je največ 2-krat večji kot vijak. Ugotovil je, da jajce z orehom plava in da tudi sam oreh plava.



V jajcu je oreh.



Oreh plava.

POMAGAJ UROŠU REŠITI NALOGE. ALI SO TVOJE REŠITVE PRAVILNE, LAHKO PREVERIŠ NA DVA NAČINA:

– prebereš v rešitvah,
– naloge opraviš praktično.

2. naloga

Pomagaj Urošu in upoštevaj, da imata na voljo: posodo z vodo, jajce, vijak in oreh.

Kaj naj da Uroš v jajce, da jajce:

a) potone,
b) lebdi,
c) plava?

3. naloga

Z Urošom imata na voljo 3 jajca, 3 vijake, 3 orehe in posodo z vodo.

Kaj naj da Uroš v jajca, da:

a) vsa 3 potonejo,
b) vsa 3 lebdijo,
c) vsa 3 plavajo?

4. naloga

Z Urošom imata na voljo iste stvari kot pri 3. nalogi.

Kaj naj da Uroš v jajca, da istočasno:

a) prvo potone, drugo plava, tretje lebdi;
b) dva plavata in eno potone;
c) eno plava in dva potoneta;
č) eno plava in dva lebdita;
d) eno potone in dva lebdita;
e) eno lebdi in dva plavata;
f) eno lebdi in dva potoneta?

R e š i t v e

2. naloga

a) Jajce je polno, v jajcu sta vijak in voda.
b) Jajce ni polno, v jajcu je vijak in nekaj vode.
c) V jajcu ni nič ali je vijak ali oreh ali voda ali dve stvari od že naštetega.

3. naloga

Odgovori so za vsako jajce enaki kot pri 2. nalogi.

4. naloga

Odgovore poišči v rešitvah 2. naloge.

ČE SI PREDVIDEL DRUGAČEN ODGOVOR, KOT JE V REŠITVAH, GA PREVERI PRAKTIČNO.

Marija Ahčin