ŠESTI LETNIK — 1996–1997 – 1

DEL REVIJE

# LOGIKA

# &

# RAZVEDRILNA MATEMATIKA

Revijo sta za splet pripravila Nada in Marko Razpet

na podlagi datotek, ki jih je izdelal Darjo Felda.

# V S E B I N A

Naloge za osnovnošolce ..... 3
Evropski matematični kenguru ..... 15
Gödlova odkritja ..... 23
Japonska otroška igra Amida ..... 29
Medalji na matematični olimpiadi ..... 32

**Izdaja:** Založniško podjetje LOGIKA d.o.o., Svetčeva 11, 1240 Kamnik,
št. žiro računa: $50140 - 603 - 57434$

**Za izdajatelja:** Izidor Hafner

Revija *Logika & Razvedrilna matematika* je vpisana v register časopisov pri *Uradu za informiranje* pod registrsko številko *949*. Po mnenju *Urada za informiranje* št. *23/89–92* šteje revija *Logika & Razvedrilna matematika* med proizvode informativnega značaja, za katere se plačuje davek od prometa po stopnji $5\%$.

Revijo *Logika & Razvedrilna matematika* subvencionira *Ministrstvo za šolstvo in šport*

**Člani časopisnega sveta:** prof. dr. Frane Jerman, prof. dr. Tomaž Pisanski in Darjo Felda, prof.

**Strokovni pokrovitelj:** Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko – Oddelek za teoretično računalništvo

**Glavni in odgovorni urednik:** dr. Izidor Hafner

**Sodelavci:** Urša Demšar, Gregor Dolinar, Urška Drčar, Petra Ipavec, Dušanka Kocić, Katka Kurent, Meta Lah, Nika Novak, Hiacinta Pintar, Maja Pohar, Tanja Soklič, Mirjana Todorovič in Aleš Vavpetič

**Jezikovni pregled:** računalniški program *Besana*

**Generalni sponzor:** Marand d.o.o., zastopstvo Borland

**Sponzorja:** Časopisno podjetje *Dnevnik*, NIL d.o.o.

**Tisk:** Tiskarna "Planprint", Rožna dolina c. IV/32–36, Ljubljana

**Ilustrirala:** Ana Hafner

**Naklada:** 3000 izvodov

© 1996 LOGIKA d.o.o.

ISSN $0354 - 0359$

**LOGIKA & RAZVEDRILNA MATEMATIKA**
letnik *VI*, št. 1, 1996/97

*Cena revije:* v prosti prodaji 370 SIT, za naročnike 330 SIT in vključuje $5\%$ prometni davek

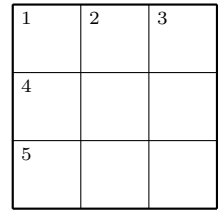
# NALOGE ZA OSNOVNOŠOLCE

**1.** VODORAVNO

**1.** kvadrat števila $15$
**4.** večkratnik števila *1 vodoravno*
**5.** same enake števke

NAVPIČNO

**1.** število $700$ daj na polovico in nato od dobljenega števila odštej število $5 \cdot 17$
**2.** kvadrat števila $5$ pomnožen z $11$
**3.** isto kot *5 vodoravno*



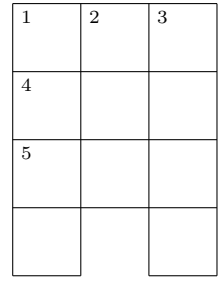

**2.** V tej križanki ni števke $0$.

VODORAVNO

**1.** tri zaporedne števke
**4.** kvadrat števila $11$
**5.** vsota števk je $9$

NAVPIČNO

**1.** vsota števk je $6$
**2.** tretjini števila $1113$ prištej tretjino števila $168$
**3.** vsota števk je enaka kot pri številu *5 vodoravno*




**3.** Dvomestno število z enakima števkama pomnožimo samo s sabo in dobimo število, ki je večje od $1500$ in manjše od $2500$. Katero je to število?

**4.** Janža in Pika sta imeli tri kozarce po $2$, $3$ in $5$ decilitrov. V njih je bila voda, poleg tega pa še v vsakem neka enocelična pražival: paramecij, evglena ali ameba. Bile so različnih starosti: $6$, $10$ in $12$ ur, a ne nujno v takem vrstnem redu. Ugotovi, v katerem kozarcu je bila posamezna pražival in koliko je le-ta stara, če ti Pika in Janža, ki nikoli ne lažeta, povesta:

(1) *Najmlajša pražival je imela največ vode, najstarejša pa najmanj.*
(2) *Ameba je bila zadovoljna s svojimi tremi decilitri vode.*
(3) *Evglena je bila starejša od paramecija.*

**5.** Evglena, mrežovc, paramecij in ameba so se znašli v skupnem kozarcu vode. Po kratkem klepetu (praživali so kar zgovorne) so ugotovili, da so skupaj stari $30$ ur. Ugotovi, koliko je katera pražival stara, če veš naslednje:

(1) *Ameba je stara toliko kot paramecij in evglena skupaj.*
(2) *Mrežovc je 2-krat mlajši od amebe, a 3-krat starejši od paramecija.*

**6.** Marko je šel na potep s kolesom iz Ljubljane v neko bližnjo vas. Naprejgrede je kolesaril s hitrostjo $5\ \mathrm{km/h}$, nazajgrede pa je polovico poti prevozil z isto hitrostjo,

za drugo polovico pa je rabil $2$ uri. Naprejgrede je potoval enako časa kot nazajgrede. Koliko je vas oddaljena od Ljubljane?

**7.** (a) Kolikšna je povprečna hitrost kolesa, če prevozi $2\ \mathrm{km}$ v eni uri?
(b) Kako dolga je pot, če jo kolesar v $3$ urah prevozi s povprečno hitrostjo $3\ \mathrm{km/h}$?
(c) Koliko časa porabi kolesar za $10\ \mathrm{km}$ dolgo pot, če vozi s povprečno hitrostjo $5\ \mathrm{km/h}$?

**8.** Pred $140$ milijoni let so se na neki velikanski planjavi znašli štirje dinozavri. Bili so tako visoki, da bi se jih vsak ustrašil. Imenovali so se Arči, Brontek, Cento in Dinos. Iz zanesljivih virov vemo, da je bil Dinos tako visok kot preostali trije skupaj. Brontek je bil $2$-krat večji od Centa, a $3$-krat manjši od Arčija. Če Dinosovi velikosti odšteješ $3$ metre in to, kar dobiš, deliš s $4$, dobiš Brontkovo velikost. Kako visok je vsak od dinozavrov?

**9.** Dinozavri Dino, Godzi in Trito so skakali v daljino. Dino je skočil dvakrat dlje kot Godzi in Trito skupaj. Godzi je skočila $5$ metrov več kot Trito in $5$ metrov manj kot Dino. Kako daleč je kdo skočil?

**10.** Na šolski proslavi so Mojca, Mare in Alenka zaigrali na klavir, kitaro in violino, a ne nujno v takem vrstnem redu. Seveda ne vsi skupaj, nekdo na začetku, nekdo v sredini in nekdo od njih na koncu. Ugotovi, kdo je kaj igral in kdaj, če veš:
(1) Na začetku so vsi poslušali violino, ki pa je ni igrala Mojca.
(2) Mare ni igral klavirja, Alenka pa ni nastopila na sredini.
(3) Na koncu je zabrenkala kitara, a je ni igrala Alenka.

**11.** V triu so igrali bobnar, trobentač in basist. Vemo, da jim je ime Zvone, Tone in Franc. Na zabavi so odigrali skladbo, ki je bila dolga eno uro, pa vendar niso vsi hkrati igrali, saj je recimo prvo tretjino prevladoval boben. Ugotovi, kaj je kdo igral in katero tretjino (prvo, drugo ali tretjo) je prevladoval kateri instrument, če veš:
(1) Tonetov inštrument, ki ni trobenta, je prevladoval zadnjo tretjino.
(2) Zvone ne igra trobente.

**12.** Če je nekdo tvoj prijatelj, potem te ne opravlja, ti ne laže in ti ni nevoščljiv. Mateja, Vesna, Aleš, Mojca, Rok, Alenka, Jure in Peter so vsi v istem razredu. Vsaka punca je prijateljica natanko enega fanta in vsak fant je prijatelj natanko ene punce. Ugotovi vse štiri pare, če veš:
(1) Mateja je z Mojco opravljala Roka.
(2) Mojca je nevoščljiva Petru, ker ima boljše ocene od nje.
(3) Vesna je rekla Petru, Alešu in Roku, da sta Mojca in Rok dobra prijatelja.

**13.** Vesna, Tina, Saša in Irena so štiri prijateljice. Darilo je znak prijateljstva in tako je vsaka od njih podarila določeni od njih neko stvar (plišastega kužka, barvice, punčko ali čokolado), tako da je vsaka od njih dobila točno eno od teh daril. Ugotovi, katera je kaj dobila in od katere, če veš:

(1) Vesna je od Saše dobila kužka.

(2) Tina je dobila eno od igrač.

(3) Irena je podarila barvice.

**14.** Kači kobra in klopotača sta bili oddaljeni druga od druge $1$ kilometer. Nato sta se začeli plaziti druga k drugi. V kolikšnem razmerju sta hitrost kobre in hitrost klopotače, če veš, da je kobra preplazila $\frac{2}{3}$ celotne poti, ko sta se srečali.

**15.** Razdalja med gadom in modrasom je $4$ kilometre. Veš, da je gad $3$-krat hitrejši od modrasa. Kje se srečata, če gresta drug drugemu nasproti?

**16.** VODORAVNO

**1.** $10^4 - 10^3 - 10^2 - 10^1 - 10^0$

**3.** zrcalno število

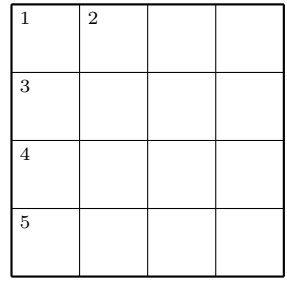
**4.** številu $1V$ odštej $3$ in dobljeno deli z $2$

**5.** številu $1V$ odštej $9$ in dobljeno deli s $3$

NAVPIČNO

**1.** števke enakomerno padajo

**2.** vsota števk je $24$




**17.** V križanki ni števke $0$.

VODORAVNO

**1.** vsota števk je $2$

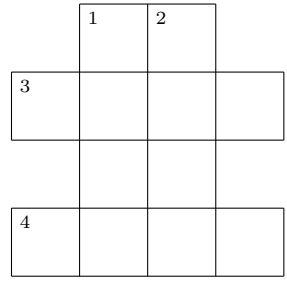
**3.** števke enakomerno rastejo

**4.** število $3V$ pomnoži z $2$ in dobljenemu prištej $7$

NAVPIČNO

**1.** števke rastejo s korakom $1$

**2.** števke rastejo s korakom $2$




**18.** Pokaži, da naslednje seštevanje ni mogoče. Različne črke seveda pomenijo različne števke.

$$\begin{array}{cccccc} & & D & R & S & A \\ + & S & M & U & \check{C} & A \\ \hline & S & A & N & K & A \end{array}$$

**19.** Začelo je snežiti. V treh urah je bil lonček, katerega prostornina je $15,12\ \mathrm{cm}^3$, poln snežink. Koliko snežink je padlo v lonček, če veš, da je v $1\ \mathrm{mm}^3$ deset snežink? Koliko snežink pade na sekundo?

**20.** Posamezna snežinka je široka $2\ \mathrm{mm}$. Koliko snežink moraš zložiti eno zraven druge, da boš naredil obroč okoli Ekvatorja, ki je dolg približno $40\,000\ \mathrm{km}$?

**21.** Sneguljčica, Pepelka in Trnuljčica so se sprehajale po gozdu. Vsaka je nabrala nekaj jagod: $1\ \mathrm{kg}$, $2\ \mathrm{kg}$ in $3\ \mathrm{kg}$, toda vsaka drugo sorto: robide, borovnice ali maline. Ugotovi, katera je nabrala katere jagode in koliko le-teh, če veš:

(1) Sneguljčica je nabrala $2\ \mathrm{kg}$ več od tiste, ki je nabirala borovnice.

(2) Trnuljčica ni nabrala najmanj jagod in tudi ni nabrala robid.

**22.** Ostržkov nos je bil najprej dolg $5\ \mathrm{cm}$. Nato se je zlagal očetu in nos mu je postal dvakrat daljši. Pozneje je srečal učitelja, kateremu se je tudi zlagal in posledica je bila, da se mi je nos podaljšal še za $4\ \mathrm{cm}$. Na srečo je pozneje srečal dobro vilo, ki mu je za 7-krat skrajšala nos. Kako dolg nos ima Ostržek sedaj?

**23.** Otoka *Sončev vzhod* in *Palmin list* sta oddaljena drug od drugega $12\ \mathrm{km}$. Istočasno gresta okoli obeh otokov ladji. Okoli *Sončevega vzhoda* taka, ki povzroči valove s hitrostjo $2\ \mathrm{km/h}$, okoli *Palminega lista* pa taka, ki povzroči valove s hitrostjo $4\ \mathrm{km/h}$. Na kolikšni razdalji od *Sončevega vzhoda* se srečajo oboji valovi in čez koliko časa je to?

**24.** Ko vržemo kamen v vodo, nastanejo valovi v obliki krogov, kar gotovo veste. Na kolikšni površini imamo valovanje, če se valovi širijo s hitrostjo $4\ \mathrm{m/min}$ in to polovico minute?

**25.** Janezek je prosil očeta za denar, ker si je želel kupiti novo kolo: *"Očka, poslušaj! Recimo, da imam šahovsko polje velikosti* $4 \times 4$*, to je* $16$ *polj. Zamisli si, da na prvo polje položiš* $1$ *tolar, na drugo polje* $2$ *tolarja (to je* $2$*-krat več kot na prvo polje), na tretje polje* $2$*-krat več kot na drugo polje in tako naprej: na vsako naslednje polje položiš* $2$*-krat več kot na polje pred njim. Rad bi, da mi daš toliko denarja, kolikor ga bo prišlo na zadnje polje."* Oče, ker je pač slišal sina govoriti o enem oz. dveh tolarjih, je takoj ustrelil: *"Ni problema, sinko,"* a je nekaj ur kasneje to pošteno obžaloval. Izračunaj še ti, koliko denarja je Janezek dobil!

**26.** Imaš tabelo $3 \times 2$, to je $6$ polj. Na prvo polje položi $1$ tolar, na drugo $3$ tolarje, na tretje polje $3$-krat več kot na drugo polje in tako naprej: na vsako nadaljnje polje $3$-krat več kot na polje pred njim. Koliko je vseh tolarjev na tabeli?

**27.** V neki ulici stanujejo družine Kovač, Novak, Breznik in Vogelnik. Iz mlekarne jim vsako jutro prinesejo sveže mleko, vsem skupaj $12,5$ litrov. Novakovi dobijo $1$ liter manj kot Kovačevi, a $1$ liter več od Breznikovih. Vogelnikovi dobijo pol litra več od Novakovih. Koliko litrov dobi vsaka družina na dan?

**28.** V rdeč zaboj gre $20$ zavitkov mleka po $1$ liter, v moder zaboj pa $20$ zavitkov mleka po pol litra. Koliko litrov mleka dobi trgovina, če dobi $4$ polne rdeče zaboje, $5$ polnih modrih zabojev, do polovice napolnjen moder zaboj in do treh četrtin napolnjen rdeč zaboj?

**29.** Učenci $6.$, $7.$ in $8.$ razreda so sestavili vsak svojo nogometno ekipo. Tekmovali so vsak z vsakim (torej se bile odigrane 3 tekme!).

| EKIPA | ZMAGE | PORAZI | NEODL. | DANI GOLI | DOBLJ. GOLI |
|---|---|---|---|---|---|
| 6. r. | | | | 1 | |
| 7. r. | | | | 3 | |
| 8. r. | | | | | 1 |

Izpolni razpredelnico do konca in povej rezultate tekem, če veš še:

(1) $6.$ razred je obe tekmi izgubil.

(2) Ena od tekem se je končala neodločeno $1:1$.

(3) Danih golov na vseh tekmah skupaj je bilo $6$.

**30.** Na nogometnem prvenstvu so v končni razvrstitvi prva tri mesta zavzele države Argentina, Brazilija in Španija. Skupaj so nabrale kar $100$ točk. Kakšna so bila pravila točkovanja, ni važno, nas zanima le, kakšen je bil vrstni red teh držav in koliko točk je posamezna država nabrala. Veš pa še: Španija je imela $2$ točki več od Brazilije, le-ta pa je imela $1,5$-krat manj točk od Argentine.

**31.** Čebelica Maja je od ponedeljka do petka letala od cveta do cveta ter nabirala med. V sredo je nabrala $12$ skodelic, kar je $3$-krat več kot v ponedeljek in $4$-krat več kot v četrtek. V torek je nabrala $2$-krat več skodelic kot v četrtek. V petek pa je bila tako pridna, da je nabrala toliko skodelic, kot jih je prej skupaj od ponedeljka do četrtka. Koliko skodelic je Maja nabrala v teh petih dnevih?

**32.** Muha, hrošč, lastovica in kobilica so skakale v višino. No, kobilica je res skočila in to za $100$ metrov manj kot je poletel hrošč. Lastovica je poletela kilometer visoko v zrak, kar je $5$-krat višje od muhe. Če seštejemo vse višine skupaj, dobimo $1304$ metre. Koliko je posamezna živalca skočila (oz. poletela)?

**33.** Trije prašički so se ujeli v past hudobnega volka. Le-ta jih ni in ni hotel spustiti. Nazadnje je dejal: *"Postavil vam bom neko logično nalogo. Če jo pravilno rešite, ste prosti, sicer pa vas bom kar takoj požrl."*

*Iz enega kupčka gline naredimo en kipec pa še nekaj gline ostane. Iz ostankov od* 6 *kupčkov gline lahko naredimo nov kupček gline. Koliko kipcev lahko naredimo iz* 36 *kupčkov gline?*

Med tremi prašički ni bilo pametnega brata, zato, jasno, niso znali rešiti naloge. Toda ni treba, da volk to zve! Pomagajte trem prašičkom in takoj rešite nalogo!

**34.** Pametni pujs je neumnim bratom naložil veliko dela: kuhanje, likanje, pranje, čiščenje, pospravljanje,... – skratka, dela za cel teden. Seveda so se pritožili, pa je brat dejal: *"Dobro. Če rešite naslednjo nalogo, bodo celotno delo opravili moji roboti, ki sem jih izumil nalašč zato."*

*Iz enega hloda naredimo* 2 *stola, pa še nekaj lesa ostane. Od ostankov* 4 *hlodov pa lahko naredimo še en stol. Koliko stolov lahko naredimo iz* 12 *hlodov?*

Pomagajte neumnim pujskom in rešite to nalogo, saj res nima smisla, da oni garajo, če obstajajo roboti, ki lahko opravijo vse delo namesto njih!

**35.** Zvezdica Zaspanka je danes popoldne spala 2-krat več kot včeraj popoldne. Če bi danes spala še 12 ur več, bi spala 5-krat več kot včeraj. Koliko časa je spala danes popoldne in koliko včeraj?

**36.** Prijatelji Peter, Mojca in Aleš se pišejo Novak, Lekše, Gruden, a ne nujno v tem vrstnem redu. Vsak naredi nekaj za svoje zdravje: eden jè veliko sadja in zelenjave, drugi teče vsak dan, tretji pa gre zgodaj spat. Ugotovi, kako se kdo piše in kaj vsak počne za svoje zdravje, če veš:

(1) Niti oseba Lekše niti oseba Gruden ne hodita zgodaj spat.
(2) Fant, ki jè veliko sadja, se ne piše Gruden. Tudi Mojca se ne piše Gruden.
(3) Peter nikoli ne teče.

**37.** Karla, Meta, Urša in Petra jejo veliko zelenjave. Vsaka pa ima svojo najljubšo zelenjavo (paprika, paradižnik, korenček, koleraba, a ne nujno v istem vrstnem redu), za katero misli, da je najbolj zdrava. Povej, katera ima katero zelenjavo, če veš:

(1) Začetna črka zelenjave in imena ustrezne deklice nista enaki.
(2) Meta se je zelo težko odločila med papriko in paradižnikom.
(3) Karla ne mara paradižnika, Urša pa ne kolerabe.

**38.** V ponedeljek ima Mojca zelo natrpan urnik: šola, balet, obisk pri babici in klavir, a ne nujno v takem vrstnem redu. Ugotovi, od kdaj do kdaj ima posamezen opravek, če veš:

(1) Pri babici je na obisku ob 13:00 in ostane $2$ uri, klavir pa konča ob 17:00.
(2) Šolo, ki traja $4$ ure, konča opoldne.
(3) Med začetkom šole in koncem baleta je $12$ ur.
(4) Ko odide od babice, ima do začetka baleta $3$ ure.
(5) Klavir in balet trajata skupaj $3$ ure.

**39.** Ne boste verjeli, ampak Andrej, Tine in Roman so odkrili časovni stroj. Vsak od njih se je tako nekam prestavil (v leto $1820$ oz. v leto $3600$), pa tudi v različnih deželah so pristali: Argentina, Turčija in Romunija. Povej, kdo se je kam (letnica, kraj) prestavil, če veš:
(1) Tine se je prestavil najbolj nazaj v čas, Andrej pa za $20$ let pozneje.
(2) Začetnica države in imena ustreznega fanta nista enaki.
(3) Romanovo leto je $2$-krat večje od Tinetovega.
(4) Roman se ni premaknil v Turčijo.

**40.** Miha, Peter in Vesna so v šoli pisali spis. Vsak je imel drugačno pisalo (nekdo svinčnik), pa tudi vsak je pisal z drugačno barvo. Povej, kdo je s čim pisal in v kakšni barvi, če veš:
(1) Peter je pisal s črno barvo.
(2) Nalivnik je imel modro črnilo.
(3) Miha ni pisal z modro.
(4) Kuli je bil zelen.

**41.** Alenka in Petra sta zbirali barvne kulije. Skupaj sta imeli $36$ rdečih, modrih in črnih kulijev. Povej, koliko katerih je imela vsaka, če veš:
(1) Petra ima $2$-krat več modrih kulijev kot Alenka rdečih kulijev.
(2) Alenka ima $10$ modrih in črnih kulijev.
(3) Petra ima rdečih kulijev toliko, kolikor Alenka; črnih kulijev pa ima $6$.
(4) Alenka ima $4$ črne kulije manj od Petre.

**42.** Tomaž je bil na obisku pri sošolki Petri. Na steni v njeni sobi je opazil portret nekega moškega. Ker je bil radoveden (tako kot vsi od nas), je vprašal Petro, kdo to je. Le-ta pa je bila zvita in mu je odgovorila: *"Mati tega moškega je tašča moje matere."* Tomaž ni bil pretirano bister, a vseeno ga je zanimalo, v kakšnem sorodstvu je Petra s tem moškim. Povejte mu to vi!

**43.** Po več letih je na obisk h gospe Novak prišel njen sošolec iz osnovne šole. Zagledal se je v sliko, na kateri je bil nek mladenič. Zanimalo ga je, kdo to je. Gospa Novak pa mu je odgovorila: *"Kot veš, nimam ne bratov ne sester. Toda mati mladeniča na sliki je otrok moje matere."* Povejte še vi, kdo je fant s slike.

**44.** Inšpektor za mostove, Jože, je prejšnji teden pregledal $5$ različnih mostov. Da si je ogledal te mostove, se je vozil povsod po deželi. Čeprav je imel vsak most različno letnico izgradnje in tudi drugega arhitekta, je inšpektor ugotovil, da so mostovi v odličnem stanju. Iz danih podatkov povej, katera reka teče pod vsakim mostom, potem leto, v katerem je bil most zgrajen ($1982$, $1984$, $1986$, $1988$, $1990$) in pa tudi dolžino mostov v metrih ($70$, $75$, $80$, $88$, $90$) ter ime arhitekta, ki je naredil načrt za most.

(1) Most, narejen leta $1988$, je načrtoval ali Novak ali Grbež.

(2) Most zgrajen leta $1988$ je sicer krajši kot tisti, pod katerim teče Sava, a daljši od tistega nad Sočo.

(3) Med mostovoma, od katerih je eden nad Ljubljanico, drugi pa narejen leta $1984$, je enega načrtoval Ribič, drugi pa je $5$ metrov daljši od tistega, ki ga je zgradil Požarnik.

(4) Dva mostova sta nad rekama Krka in Sora, enega od njiju je zgradil Požarnik, drugi pa je bil zgrajen leta $1982$.

(5) Most, ki ga je načrtoval Vidmar, je $5$ metrov krajši od tistega, ki se razteza nad Soro.

(6) Most, ki je $80$ metrov dolg, je bil narejen ali leta $1982$ ali leta $1990$.

(7) $75$ metrov dolg most je načrtoval ali Novak ali Ribič.

**45.** Kolesarja sta drug od drugega oddaljena $20$ milj. Istočasno začneta kolesariti drug proti drugemu, oba z enako hitrostjo $10$ milj na uro. V istem trenutku začne leteti tudi tečna muha s hitrostjo $15$ milj na uro. Muha leti od nosa prvega kolesarja do drugega in nato nazaj k prvemu, pa tako naprej, dokler se kolesarja ne srečata (in jo zmečkata). Kako dolgo razdaljo je muha preletela?

**46.** (a) Oče in hči imata skupaj $100$ let. Če očetova leta pomnožimo s $4$ in delimo z $9$, dobimo hčerina leta. Koliko je vsak star?

(b) Mati in sin sta skupaj stara $45$ let. Koliko je stara mati in koliko sin, če je bila mati stara $25$ let, ko je rodila sina.

(c) Todi je star $24$ let. Todi je $2$-krat starejši kot je bila Irena takrat, ko je bil Todi star toliko, kolikor je Irena sedaj. Koliko je stara Irena?

**47.** Imamo posodo za $8$ litrov, ki je polna bencina. Tega želimo razdeliti na dva enaka dela (po $4$ litre, jasno), imamo pa le posodo za $5$ litrov in posodo za $3$ litre. Kako lahko to storimo (s pomočjo teh dveh posod)?

**48.** V eni steklenici je $1$ l soka, v drugi pa $1$ l mleka. Iz prve steklenice vzamemo $1$ dcl soka in ga zlijemo v drugo steklenico. Nato iz druge steklenice (v kateri je sedaj $1$ dcl soka in $1$ l mleka) vzamemo $1$ dcl tekočine in jo zlijemo nazaj v prvo steklenico.

Ali je količina soka v prvi steklenici večja kot količina mleka v drugi steklenici?

**49.** Vrv je speljana preko škripca. Na eni strani vrvi je utež za $55\ \mathrm{kg}$, na drugi strani pa začne plezati $55\ \mathrm{kg}$ težki Jure. Ali bo utež začela padati ali pa se bo dvigovala?

**50.** Riba ima rep težek $20\ \mathrm{dag}$, njena glava pa tehta toliko kot rep in pol trupa. Trup tehta toliko kot glava in rep skupaj. Koliko tehta riba?

**51.** Imamo skodelice za $2$, $3$, $4$ in $5$ decilitrov. V prvi je temperatura vode $50°\mathrm{C}$, v drugi $20°\mathrm{C}$, v tretji $50°\mathrm{C}$ in v četrti $40°\mathrm{C}$. Nato vodo iz vseh skodelic zmešamo skupaj. Kakšno temperaturo ima nastala zmes?

**52.** V Ljubljani je bil zbor znanstvenikov. Neka deklica jih je opazovala in dejala: "Koliko vas je! Zagotovo vas je vsaj sto!"' Znanstveniki so ji odgovorili: *"Ni nas sto! Če bi nas bilo dvakrat toliko, kolikor nas je, pa še polovica tega in še polovica te polovice in če bi bila z nami še ti, potem bi nas bilo sto."* Deklica je tako dobila podatek, koliko znanstvenikov je bilo v zboru. Povej to še ti!

**53.** Štirje učenci so reševali logične naloge.
*"Jaz sem jih rešil kar 120,"* je rekel Tine.
*"Jaz pa četrtino manj kot ti,"* je povedal drugi učenec.
*"Zanimivo, jaz pa četrtino več kot ti,"* je rekel Tinetu tretji učenec.
*"Po mojem izračunu smo vsi štirje rešili štirikrat več nalog kot Tine,"* je ugotovil četrti, Peter.
Koliko nalog je rešil Peter?

## REŠITVE

**1.**

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 5 |
| 6 | 7 | 5 |
| 5 | 5 | 5 |

**2.**

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 |
| 1 | 2 | 1 |
| 1 | 7 | 1 |
| 1 | | 2 |

**3.** To je število 44.

**4.** Paramecij: $5\ \mathrm{dcl}$ vode – $6$ ur, evglena: $2\ \mathrm{dcl}$ vode – $12$ ur in ameba: $3\ \mathrm{dcl}$ vode – $10$ ur.

**5.** Evglena: $10$ ur, mrežovc: $6$ ur, paramecij: $2$ uri in ameba: $12$ ur.

**6.** Vas je oddaljena $20\ \mathrm{km}$ od Ljubljane.

**7.** (a) $2\ \mathrm{km/h}$, (b) $9\ \mathrm{km}$ in (c) $2$ uri.

**8.** Arči – $18\ \mathrm{m}$, Brontek – $6\ \mathrm{m}$, Cento – $3\ \mathrm{m}$ in Dinos – $27\ \mathrm{m}$.

**9.** Dino je skočil $10$ metrov, Godzi $5$ metrov, Trito pa sploh ni skočil.

**10.** Začetek: Alenka – violina, sredina: Mojca – klavir in konec: Mare – kitara.

**11.** 1. tretjina: Zvone – boben, 2. tretjina: Franc – trobenta in 3. tretjina: Tone – bas.

**12.** **Vesna** je **Juretova** prijateljica (ker se je v (3) vsem ostalim zlagala). **Rok** ni ne Matejin ne Mojčin prijatelj (saj sta ga pod (1) opravljali), torej je **Alenkin**. **Mojca** je **Aleševa** prijateljica (2) in zato **Mateja Petrova**.

**13.** Vesna: kužka – od Saše, Tina: punčko – od Vesne, Saša: barvice – od Irene in Irena: čokolado – od Tine.

**14.** Kobra je bila $2$-krat hitrejša od klopotače.

**15.** Srečata se $3\ \mathrm{km}$ daleč od mesta, kjer je štartal gad.

**16.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 8 | 8 | 9 |
| 6 | 3 | 3 | 6 |
| 4 | 4 | 4 | 3 |
| 2 | 9 | 6 | 0 |

**17.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| | 3 | 5 | |
| 2 | 4 | 7 | 5 |

**18.** $A = 0$ (saj $A + A = A$ je možno le za $A = 0$). Sedaj je $D + M$ ali $D + M + 1$ enako $10$ ($0$ ne more biti, sicer bi bila oba $M$ in $D$ enaka $0$, to pa je že $A$). Torej gre ena decimalka naprej, pa dobimo $S + 1 = S$. Protislovje.

**19.** $151200$ snežink je padlo v lonček in v eni sekundi pade $14$ snežink.

**20.** Za ves Ekvator rabimo $20$ milijard snežink.

**21.** Sneguljčica: $3\ \mathrm{kg}$ robid, Trnuljčica: $2\ \mathrm{kg}$ malin in Pepelka: $1\ \mathrm{kg}$ borovnic.

**22.** Ostržkov nos je sedaj dolg $2\ \mathrm{cm}$.

**23.** Valovi se srečajo na razdalji $4\ \mathrm{km}$ od *Sončevega vzhoda*, to je čez $2$ uri.

**24.** Površina valovanja čez polovico minute je $4\pi\ \mathrm{m}^2$.

**25.** Janezek je dobil $32\,768$ tolarjev, zagotovo si je uspel kupiti novo kolo.

**26.** Na tabeli je $346$ tolarjev.

**27.** Kovačevi – $4$ l, Novakovi – $3$ l, Breznikovi – $2$ l in Vogelnikovi – $3,5$ l.

**28.** Trgovina dobi $150$ litrov mleka.

**29.**

| EKIPA | ZMAGE | PORAZI | NEODL. | DANI GOLI | DOBLJ. GOLI |
|---|---|---|---|---|---|
| 6. r. | 0 | 2 | 0 | 1 | 3 |
| 7. r. | 1 | 0 | 1 | 3 | 2 |
| 8. r. | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 |

Rezultati: 6. r. : 7. r. = 1:2, 6. r. : 8 .r. = 0:1 in 7. r. : 8. r. = 1:1.

**30.** Prva Argentina – $42$ točk, druga Španija – $30$ točk in tretja Brazilija – $28$ točk.

**31.** Od ponedeljka do petka je Maja nabrala $50$ skodelic medu.

**32.** Muha – $200$ m, hrošč – $102$ m, lastovica – $1000$ m in kobilica – $2$ m. Ampak zmagala je kobilica, saj so ostali trije goljufali, ker so poleteli.

**33.** Iz $36$ kupčkov gline dobimo $36$ kipcev in $6$ kupčkov gline. Iz $6$ kupčkov gline dobimo $6$ kipcev in še en kupček gline, iz tega pa še en kipec. Torej je vseh kipcev skupaj $43$.

**34.** Iz $12$ hlodov naredimo $27$ stolov.

**35.** Včeraj popoldne je Zvezdica Zaspanka spala $4$ ure, danes popoldne pa $8$ ur.

**36.** Mojca Novak hodi zgodaj spat. Peter Lekše jè veliko sadja in zelenjave. Aleš Gruden veliko teče.

**37.** Karla – paprika, Meta – paradižnik, Urša – korenček in Petra – koleraba.

**38.** 8:00 – 12:00 šola, 13:00 – 15:00 pri babici, 16:00 – 17:00 klavir in 18:00 – 20:00 balet.

**39.** Andrej: $1820$ – Turčija, Tine: $1800$ – Romunija in Roman: $3600$ – Argentina.

**40.** Miha – zelen kuli, Peter – črn svinčnik in Vesna – moder nalivnik.

**41.** Alenka: 5 rdečih, 8 modrih in 2 črna kulija. Petra: 5 rdečih, 10 modrih in 6 črnih kulijev.

**42.** Na steni je portret Petrinega očeta.

**43.** Na sliki je sin gospe Novak.

**44.** Krka: $1990$ – $80\ \mathrm{m}$ – Požarnik, Soča: $1986$ – $70\ \mathrm{m}$ – Vidmar, Ljubljanica: $1988$ – $85\ \mathrm{m}$ – Grbež, Sora: $1982$ – $75\ \mathrm{m}$ – Novak in Sava: $1984$ – $90\ \mathrm{m}$ – Ribič.

**45.** Muha je preletela razdaljo $15$ milj.

**46.** (a) Oče je star $69$ let in $12$ tednov, hči pa $30$ let in $40$ tednov.
(b) Mati je stara $35$ let, sin pa $10$ let.
(c) Irena ima sedaj $18$ let.

**47.** Potek reševanja zapišimo kar v tabelo. V prvem stolpcu piše, kateri korak po vrsti je narejen, v preostalih stolpcih pa koliko je bencina po vrsti v 8-, 5- in 3-litrski posodi.

| KORAK | 8-l posoda | 5-l posoda | 3-l posoda |
|---|---|---|---|
| 0 | 8 | 0 | 0 |
| 1 | 3 | 5 | 0 |
| 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 6 | 2 | 0 |
| 4 | 6 | 0 | 2 |
| 5 | 1 | 5 | 2 |
| 6 | 1 | 4 | 3 |
| 7 | 4 | 4 | 0 |

**48.** Količini sta enaki, saj kolikor je mleka v prvi steklenici, toliko ga v drugi manjka in je nadomeščen s sokom.

**49.** Glede na to, da sta utež in Jure enako težka, bosta ves čas na isti višini (tako kot pri tehtnici, ki je v ravnovesju, če je na levi in desni strani enaka teža). Ker Jure pleza, se torej premika gor in zato se dviguje tudi utež.

**50.** Riba je težka $1,6\ \mathrm{kg}$ (rep $20\ \mathrm{dag}$, trup $80\ \mathrm{dag}$ in glava $60\ \mathrm{dag}$).

**51.** V bistvu moramo zračunati povprečje, to je:

$$\frac{2\cdot 50+3\cdot 20+4\cdot 50+5\cdot 40}{2+3+4+5}\ {}^{\circ}\mathrm{C}=40{}^{\circ}\mathrm{C}.$$

**52.** V zboru je $x$ znanstvenikov, potem je $2x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+1=100$. Torej je deklica videla $36$ znanstvenikov.

**53.** Drugi učenec je rešil toliko manj od Tineta, kolikor je tretji več, torej sta skupaj rešila dvakrat toliko nalog kot Tine. Zaradi svoje izjave je zato Peter rešil toliko nalog kot Tine, to je $120$.

*Katka Kurent*

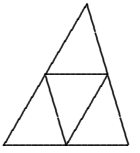
# EVROPSKI MATEMATIČNI KENGURU

V peti številki prejšnjega letnika revije smo objavili naloge za osnovnošolce, tokrat pa se lahko preskusite v reševanju nalog za srednješolce.

## Prvi in drugi letnik

1. Koliko števk ima število $2^{10}$?

   **(A)** 2 **(B)** 3 **(C)** 10 **(D)** 12 **(E)** drugo



2. Koliko trikotnikov je na sliki?

   **(A)** 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 8 **(E)** drugo

3. Če zamenjam števki dvomestnega števila, se le-to poveča za 45. Katero od naštetih števil ima to lastnost?

   **(A)** 36 **(B)** 27 **(C)** 54 **(D)** 72 **(E)** drugo

4. Med odmorom je Peter v krog, ki ga je na tablo narisal profesor matematike, vrisal štiri tetive. Na največ koliko delov je na ta način lahko razdelil krog?

   **(A)** 8 **(B)** 11 **(C)** 16 **(D)** 25 **(E)** drugo

5. Koliko je desettisoč tristo enaintrideset krat sto devet?

   **(A)** 2093379 **(B)** 993379 **(C)** 1093379 **(D)** 1379093 **(E)** drugo

6. Na neki avtocesti je največja dovoljena hitrost 130 km/h, če dežuje, pa je največja dovoljena hitrost znižana na 110 km/h. V deževnem vremenu je torej največja dovoljena hitrost zmanjšana približno za

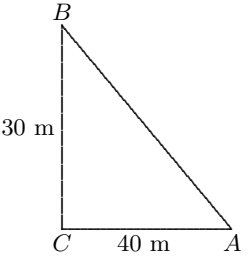
   **(A)** 20 % **(B)** 15,4 % **(C)** 18,1 % **(D)** 84,6 % **(E)** 11 %

7. Sem realno število in sem enako osemkratniku nasprotne vrednosti kvadrata svoje obratne vrednosti. Kdo sem?

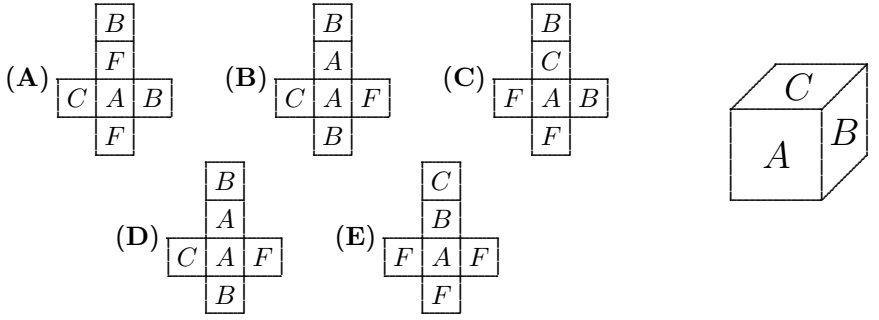
   **(A)** $-\frac{1}{2}$ **(B)** 8 **(C)** 0 **(D)** 2 **(E)** $-2$

8. Tekač teče po progi, ki ima obliko pravokotnega trikotnika, kot je narisano na sliki. Koliko preteče tekač, če progo preteče v celoti? Pri tem poznaš dolžini stranic $AC$ in $BC$.

   **(A)** 120 m **(B)** 140 m **(C)** 160 m
   **(D)** 180 m **(E)** 200 m



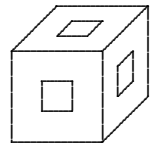
9. Katera izmed spodnjih mrež predstavlja narisano kocko?




10. Trgovec je cene svojih artiklov povišal najprej za $10$ % in nato še za $5$ %. Ker pa je zaradi tega prodaja padla, se je trgovec odločil, da bo cene znižal najprej za $5$ % in nato še za $10$ %. Katera trditev je pravilna?

(**A**) Cene se niso spremenile. (**B**) Cene so narasle.
(**C**) Cene so padle. (**D**) Nekatere cene so narasle, druge so padle.
(**E**) O cenah ne moremo reči ničesar.

11. Kocko z robom dolžine $3$ z vseh strani preluknjamo tako, da v smeri vseh treh osi iz nje izrežemo kvadre, katerih osnovne ploskve so kvadrati s stranico dolžine $1$, kot kaže slika. Kolikšna je prostornina nastalega telesa?



(**A**) $16$ (**B**) $17$ (**C**) $18$ (**D**) $19$ (**E**) $20$

12. Decimalni zapis števila $\sqrt{2}$

(**A**) vsebuje končno število decimalk (**B**) je periodičen
(**C**) je periodičen, pri čemer pa periode ne poznamo (**D**) ni periodičen
(**E**) vsebuje le števke $1$, $2$ in $4$

13. Koliko števk potrebujemo za zapis števila $2^{12} \cdot 5^8$?

(**A**) $20$ (**B**) $12$ (**C**) $10$ (**D**) $96$ (**E**) drugo

14. Zamisli si, da ima igralna "kocka" $8$ ploskev, ki so označene s številkami od $1$ do $8$. Vsaki ploskvi $P$ je vzporedna ploskev $P'$. Vsota številk na ploskvah $P$ in $P'$ je vedno enaka. Koliko znaša?

(**A**) $9$ (**B**) $10$ (**C**) $12$ (**D**) To ni mogoče
(**E**) Odvisna je od posameznega primera

15. Za katero vrednost spremenljivke $x$ je napačna le ena od naslednjih izjav:
"$x$ je naravno število."
"$x^2 - 3x$ je negativno celo število."
"$x + \frac{1}{x}$ je celo število."?

**(A)** $1$ **(B)** $2$ **(C)** $3$ **(D)** $4$ **(E)** $5$

16. Števila $a$, $b$ in $c$ so sorazmerna s števili $1$, $2$ in $4$. S katerimi števili so sorazmerna števila $a(b+c)$, $b(c+a)$ in $c(a+b)$?

**(A)** $3$, $4$ in $5$ **(B)** $5$, $10$ in $12$ **(C)** $3$, $5$ in $6$ **(D)** $1$, $4$ in $16$ **(E)** drugo

17. Ali je kub polovice trikratnika nekega števila enak trikratniku polovice kuba istega števila?

**(A)** Da, to velja za vsa števila.
**(B)** To velja le za število $0$.
**(C)** To velja le za število $1$.
**(D)** To velja le za števili $0$ in $1$.
**(E)** Dokazano je, da to ne velja za nobeno število.

18. Število $0,027027027027027...$ je enako

**(A)** $\frac{27}{99}$ **(B)** $\frac{27}{101}$ **(C)** $\frac{1}{37}$ **(D)** $\frac{1}{27}$ **(E)** drugo

19. Za katero vrednost števila $p$ imata enačbi $(p+1)x = 3$ in $p(x-1) = 1+p$ isto rešitev?

**(A)** $1$ **(B)** $0$ **(C)** $3$ **(D)** $-2$ **(E)** drugo

20. Števili $a$ in $b$ naj bosta pozitivni realni števili ali $0$. Enačba $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ velja

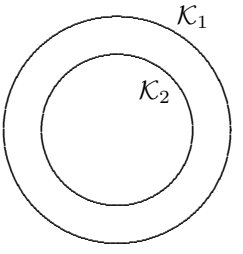
**(A)** vedno **(B)** če je $a + b = 0$ **(C)** če je $a * b = 0$ **(D)** če je $a = b$
**(E)** Nikdar ne velja.

21. Katera izmed naslednjih številskih trojic ne predstavlja dolžin stranic pravokotnega trikotnika?

**(A)** $(6, 8, 10)$ **(B)** $(5, 12, 13)$ **(C)** $(7, 24, 25)$ **(D)** $(9, 40, 41)$
**(E)** $(11, 52, 55)$

22. $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ sta krožnici z istim središčem in polmerom $R$ oziroma $\frac{2}{3}R$. Razmerje med ploščinama lika znoter $\mathcal{K}_2$ in lika med $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ je

**(A)** $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{2}{3}$ **(C)** $\frac{4}{5}$ **(D)** $\frac{5}{4}$ **(E)** $\frac{3}{2}$



23. Vsota kotov pravilnega $n$-kotnika je:

**(A)** $(n-2)\pi$ **(B)** $(n^2-6n+10)\pi$ **(C)** $n\pi$ **(D)** $2n\pi$ **(E)** $n\frac{\pi}{2}$

24. Na neki tekmi je tekač zasedel $1996$. mesto. Naknadno so bili diskvalificirani vsi tisti tekmovalci, ki so se uvrstili na mesta, ki so večkratniki števila $6$ (torej $6.$, $12.$, $18.$, ...). Kakšna je nova uvrstitev omenjenega tekača (po diskvalifikacijah)?

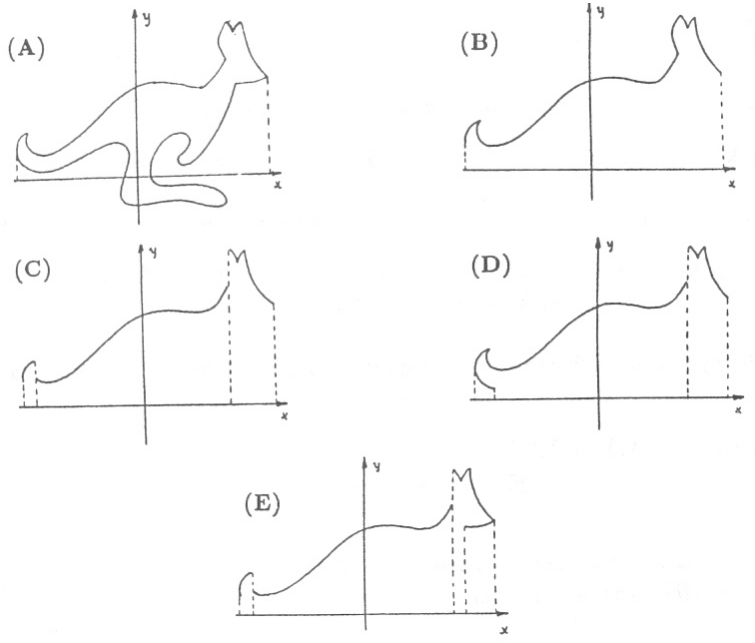
**(A)** $1663$ **(B)** $1664$ **(C)** $1662$ **(D)** $332$ **(E)** $333$

25. Definirajmo novo operacijo na naslednji način: $a \circ b = ab + a + b$. Za katero vrednost neznanke $b$ velja $3 \circ 5 = 2 \circ b$?

**(A)** $\frac{23}{2}$ **(B)** $6$ **(C)** $4$ **(D)** $7$ **(E)** $\frac{15}{2}$

## Tretji in četrti letnik

1. Med spodnjimi grafi poišči tistega, ki predstavlja funkcijo:




2. Trgovec 1. januarja zviša cene za $20$ %. Mesec kasneje jih želi spustiti na začetno raven. Približno za koliko odstotkov mora znižati cene?

**(A)** $20$ % **(B)** $12$ % **(C)** $15,4$ % **(D)** $16,7$ % **(E)** $22$ %

3. Koliko paralelogramov je na sliki?



**(A)** 7 **(B)** 12 **(C)** 19 **(D)** 32 **(E)** drugo

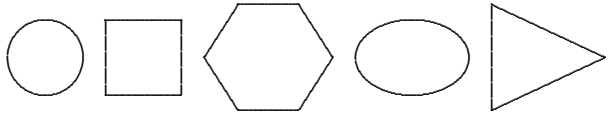
4. Število $0,027027027027027...$ je enako

**(A)** $\frac{27}{99}$ **(B)** $\frac{27}{101}$ **(C)** $\frac{1}{37}$ **(D)** $\frac{1}{27}$ **(E)** drugo

5. Ocena ustnega dela vrtnarskega izpita šteje $2/5$ skupne ocene, ocena pisnega dela pa $3/5$ skupne ocene. Nek študent je oceni zamenjal in opazil, da se je skupna ocena povečala za $1$. Kakšni sta njegovi oceni (na pisnem in na ustnem delu)?

**(A)** $8$ in $12$ **(B)** $12$ in $8$ **(C)** $10$ in $10$ **(D)** $4$ in $9$ **(E)** drugo

6. Spodnji liki predstavljajo pokrove na odtočnih kanalih. Položimo jih na odprtine, ki imajo enako obliko, toda nekoliko manjšo površino (površina odprtine je $0,9$-kratnik površine pokrova). Pri tem moramo biti pazljivi, saj nekateri izmed pokrovov lahko padejo v odprtino kanala. Koliko pokrovov je torej primernih, to je takšnih, ki ne morejo pasti v odtočno odprtino?



**(A)** $1$ **(B)** $2$ **(C)** $3$ **(D)** $4$ **(E)** $5$

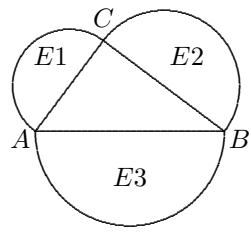
7. Na neki tekmi je tekač zasedel $1996$. mesto. Naknadno so bili diskvalificirani vsi tisti tekmovalci, ki so se uvrstili na mesta, ki so večkratniki števila $6$ (torej $6.$, $12.$, $18.$, ...). Kakšna je nova uvrstitev omenjenega tekača (po diskvalifikacijah)?

**(A)** $1663$ **(B)** $1664$ **(C)** $1662$ **(D)** $332$ **(E)** $333$

8. Število $x = 0,99999...$

**(A)** ne obstaja. **(B)** je enako $1$. **(C)** Dokazano je, da velja $x^2 + x + 1 < 3$.
**(D)** Dokazano je, da velja $x + \frac{1}{x} > 2$. **(E)** je iracionalno.

9. Na zunanji strani trikotnika $ABC$ konstruiramo tri polkroge tako, da stranice trikotnika predstavljajo njihove premere (glej skico). Ploščine teh treh polkrogov označimo z $E1$, $E2$ in $E3$. Če velja $E1+E2 = E3$, potem za trikotnik $ABC$ lahko rečemo, da




**(A)** je enakokrak z vrhom $C$ **(B)** je enakostraničen
**(C)** je pravokoten s pravim kotom pri oglišču $C$
**(D)** je poljuben **(E)** ne obstaja

10. Aleš ima v predalu $10$ rdečih, $20$ zelenih in $40$ rumenih nogavic. Koliko nogavic mora vzeti iz predala, če želi biti prepričan, da ima zagotovo dve nogavici iste barve, torej par, pri čemer nogavice iz predala jemlje na slepo, torej ne da bi gledal v predal?

**(A)** $2$ **(B)** $4$ **(C)** $11$ **(D)** $36$ **(E)** $70$

11. Če velja $r + \frac{1}{r} = 6$, potem je $r^3 + \frac{1}{r^3}$ enako

**(A)** $15$ **(B)** $18$ **(C)** $96$ **(D)** $198$ **(E)** drugo

12. Za katero vrednost števila $p$ imata enačbi $(p+1)x = 3$ in $p(x-1) = 1+p$ isto rešitev?

**(A)** $1$ **(B)** $0$ **(C)** $3$ **(D)** $-2$
**(E)** Nobena vrednost števila $p$ ne ustreza pogojem.

13. V ravnino razporedimo $5$ točk, pri čemer nobene tri točke ne ležijo na isti premici. Koliko različnih premic lahko načrtamo skozi teh pet točk?

**(A)** $25$ **(B)** $20$ **(C)** $15$ **(D)** $10$ **(E)** $\frac{25}{2}$

14. Vsota $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{64}$ je enaka

**(A)** $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $\frac{127}{128}$ **(D)** $\frac{63}{64}$ **(E)** drugo

15. Koliko naravnih števil izpolnjuje neenačbo $|2 - |x|| \leq 5$?

**(A)** $7$ **(B)** $8$ **(C)** $13$ **(D)** $15$ **(E)** drugo

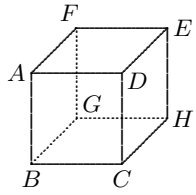
16. Če so $a$, $b$ in $c$ tri naravna števila, za katera velja $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, potem lahko rečemo naslednje:

**(A)** Števila $a$, $b$ in $c$ ne obstajajo.
**(B)** Edina rešitev je $a = b = c$.
**(C)** Obstaja neskončno rešitev.
**(D)** Števila $a$, $b$ in $c$ izpolnjujejo enačbo $a + b + c = 1$.
**(E)** Vsaj eno od teh treh števil je manjše ali enako $3$.

17. Enakost $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$ velja

**(A)** za realno število. **(B)** za $-1 \leq x \leq 1$. **(C)** za $x \geq 1$.
**(D)** za $x \leq -1$. **(E)** za $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

18. Kocka $ABCDEFGH$ ima rob z dolžino $a$. $M$ je točka na ploskvi $ADEF$ in $P$ točka na robu $GH$. Kaj lahko rečemo o prostornini tetraedra $BCMP$?




(**A**) Vedno znaša $\frac{a^3}{6}$. (**B**) Vedno znaša $\frac{a^3}{8}$.
(**C**) Največja je, kadar sta $M$ in $P$ oglišči.
(**D**) Najmanjša je, kadar sta $M$ in $P$ oglišči.
(**E**) Lahko je enaka nič.

19. Kolikšno je število števk števila števk števila $1996^{1996}$?

(**A**) $3$ (**B**) $4$ (**C**) $5$ (**D**) $6$ (**E**) $7$

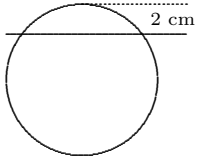
20. Koliko anagramov, pa naj imajo pomen ali ne, lahko sestavimo iz črk besede $MATRIKE$?

(**A**) $7$ (**B**) $28$ (**C**) $72$ (**D**) $365$ (**E**) $5040$

21. Če je $f(\frac{x}{x-1}) = \frac{1}{x}$ za $x \neq 0$ in $x \neq 1$, potem je za $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ vrednost $f(\frac{1}{\cos^2\theta})$ enaka

(**A**) $\cos^2\theta$ (**B**) $\sin^2\theta$ (**C**) $\mathrm{tg}^2\,\theta$ (**D**) $\mathrm{ctg}^2\,\theta$ (**E**) drugo

22. Žoga s premerom $10$ cm plava na vodi. Njena najvišja točka je $2$ cm nad vodno gladino. Kolikšen je premer kroga, omejenega s površino vode na žogi?

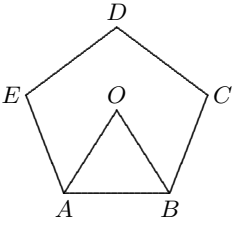



(**A**) $6$ cm (**B**) $7$ cm (**C**) $8$ cm
(**D**) $9$ cm (**E**) drugo

23. Število $0,101001000100001...$ (število ničel med dvema enkama narašča po 1)

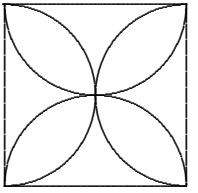
(**A**) je naravno (**B**) je racionalno (**C**) ni racionalno (**D**) je enako $\frac{\pi}{12}$
(**E**) ne obstaja

24. Naj bo lik $ABCDE$ pravilni petkotnik. Točka $O$ leži v notranjosti petkotnika, tako da skupaj z ogliščema $A$ in $B$ tvori enakostranični trikotnik $ABO$. Koliko meri kot $DEO$?




(**A**) $36°$ (**B**) $42°$ (**C**) $45°$
(**D**) $54°$ (**E**) $60°$

25. Lik $ABCD$ je kvadrat s stranico $a$, v katerega s pomočjo polkrogov s premerom $a$ narišemo rozeto (glej sliko). Koliko meri ploščina te rozete?



**(A)** $a^2(\frac{\pi}{2})$ **(B)** $a^2(\frac{\pi}{2}-1)$ **(C)** $a^2(2-\frac{\pi}{4})$
**(D)** $\sqrt{3}\frac{a^2}{2}$ **(E)** drugo

*Gregor Dolinar* in *Darjo Felda*

# GÖDLOVA ODKRITJA

V devetnajstem stoletju je matematično raziskovanje doživelo velik razmah. Nekateri osnovni, do tedaj nerešeni matematični problemi so bili dokončno razvozlani, porajala so se nova področja matematike, stara področja pa so postavili na trdne temelje s pomočjo novih raziskovalnih tehnik. Še posebej odkritje neevklidskih geometrij je povzročilo, da so znanstveniki želeli preveriti že postavljene osnove raznih področij matematike in jih dopolniti, ob tem pa so postavili aksiomske temelje mnogim področjim, ki so se do tedaj razvijala le na podlagi intuicije. Že v devetnajstem stoletju, predvsem pa po letu 1900, so začeli globlje raziskovati osnove matematike, to se pravi dejstva in predpostavke, na katerih matematika temelji, in lastnosti matematičnih teorij in metod.

Na prelomu stoletja je v teh raziskovanjih prišlo do določenega zastoja, kajti odkrili so nekatere paradokse, ki so do dna zamajali temelje tedanjih matematičnih teorij (npr. Russellova antinomija o množici vseh množic, ki je skoraj uničila Cantorjevo teorijo množic, namreč ali množica vseh množic vsebuje samo sebe ali ne). V prvi četrtini dvajsetega stoletja so se oblikovale tri glavne smeri mišljenja, ki so se ukvarjale z raziskovanjem osnov matematike in poskušale najti take osnovne sisteme, kjer podobnih paradoksov ne bi bilo. Te smeri so bile intuicionizem, logicizem in formalizem.

Prva smer, intuicionizem, trdi, da matematika preučuje abstraktne objekte (npr. točke, števila, množice), ki obstajajo neodvisno od matematika, ki se z njimi ukvarja. Matematika je za intuicioniste samozadosten intelektualen proces, ki se ukvarja z abstraktnimi miselnimi konstrukcijami, te pa se pokoravajo raznim zakonom. Skratka, če stvari ne jemljemo preresno, si lahko matematiko predstavljate kot množico raznovrstno pisanih žog, balonov, kroglic, hokejskih pakov in sneženih kep, matematiki pa so stari bradati možički, ki te žoge, balone in ostale predmete navdušeno premetavajo sem ter tja in se obmetavajo z njimi, vse skupaj pa leti po zraku pokoravajoč se nekim čudnim paragravitacijskim zakonom... Znani angleški matematik in logik, ki je zagovarjal intuicionistične ideje, je bil Bertrand Russell.

Logicizem trdi, da je matematika le veja logike. Vse matematične pojme lahko reduciramo do abstraktnih lastnosti in jih torej lahko izpeljemo s pomočjo osnovnih logičnih principov, če jih uporabimo na teh abstraktnih lastnostih. Tu pa nimamo več žogic in starih bradatih palčkov, ki bi se zabavali z njimi, ne, logicisti so zamišljeni mogočni gospodje s po petimi naočniki na nosu, ki kar naprej logično sklepajo o čemerkoli že in rešijo na dan vsaj triindvajset strašno kompliciranih razpredelčnih nalog, s takole recimo tritisočdevetstopetnajstimi različnimi lastnostmi petstotriindvajsetih osebkov, ki so nastale, ko so poskusili prevesti dejstvo, da je $2+2=4$, v logično obliko... Glavni zagovornik tega matematičnega gibanja je bil nizozemski matematik in filozof L.E.J. Brouwer.

Formalizem trdi, da je matematika sestavljena iz končnih procesov s simboli, ki potekajo po določenih pravilih. Nekateri izmed teh procesov in simbolov imajo lahko nek pomen, drugi so brez konkretnega pomena. Kdo so formalisti? To so dirigenti, ki kraljujejo nad velikanskim orkestrom, sestavljenim iz štiric, ki igrajo violine, dvojk, ki pihajo v klarinete, m-jev, ki razbijajo po klavirjih in vseh ostalih številk in črk - glasbenikov. Orkester na balkonu dvorane igra četvorko, dirigent pa vzhičeno opazuje črke in številke in predstavnike

ostalih znamenj, ki v dvorani pod njim dosledno in natančno vsi naenkrat zbrano korakajo v ritmu četvorke... Glavni predstavnik formalizma je bil nemški matematik David Hilbert.

Hilbert je že leta 1905 predlagal, da bi klasično matematiko do neke ustrezne mere formulirali kot formalno aksiomatsko teorijo in dokazali, da je dosledna, oziroma neprotislovna. To pomeni, da ne vsebuje protislovij, oziroma da ne vsebuje hkrati dveh stavkov, izmed katerih bi bil eden negacija drugega. Pred Hilbertom so doslednost aksiomatskih teorij dokazovali tako, da so pojme, ki so bili v neki teoriji nedefinirani, interpretirali v drugi teoriji (npr. realna števila iz aritmetike kot točke v ravnini v geometriji) in sicer na tak način, da so aksiomi začetne teorije s tem postali resnični. S tem seveda niso dokazali neprotislovnosti prvotne teorije, temveč so ta problem le prevedli na problem neprotislovnosti druge teorije.

Hilbert pa je želel doslednost neke teorije dokazati tako, da bi direktno dokazal dejstvo, da sistem ne vsebuje protislovja. Vse osnovne matematične postulate teorije naj bi zapisali v seznam, potem pa s pomočjo logičnih principov (tako preprostih izjav kot zapletenejših pravil sklepanja) iz njih izpeljali vse izreke teorije. Doslednost takega sistema pomeni, da nobeni dve končni izpeljavi (to se pravi izpeljavi, ki vsebujeta le končno korakov) ne vodita do dveh izrekov, izmed katerih bi bil eden negacija drugega. Hilbert je s tem načinom v bistvu uvedel novo teorijo, imenovano teorija dokazov ali metamatematika, ki kot objekte proučuje dokaze neke formalne matematične teorije.

Matematiki vsega sveta so sprejeli Hilbertov izziv in poskušali na razne načine dokazati doslednost različnih matematičnih sistemov, vendar nikomur ni uspelo. Leta 1931 pa je v nemški matematični reviji Monatshefte für Mathematik und Physik (vol. 38, 1931) izšel članek 'Über formal unentschiedbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme' ('O formalno neodločljivih stavkih Principie Mathematice in sorodnih sistemov'). Avtor članka je bil Kurt Gödel, takrat petindvajsetletni avstrijski matematik, ki je s tem člankom popolnoma uničil vse upe, da bi lahko kadarkoli resnično dokazali doslednost kateregakoli formalnega sistema.

Kurt Gödel se je rodil 28. aprila 1906 v kraju Brünn v Avstriji, študiral matematiko na dunajski univerzi in postal leta 1930 tudi njen član. Kasneje je postal tudi član Institute for Advanced Studies v Princetonu (1938 - 1952). Leta 1940 je emigriral v Ameriko, leta 1948 dobil ameriško državljanstvo in od leta 1953 poučeval kot redni profesor na Princetonu. Umrl je 14. januarja 1978 v Princetonu, New Jersey, ZDA.

Gödel je dokazal dva pomembna izreka:

- **Prvi Gödlov izrek o nepopolnosti** trdi, da je vsak neprotisloven sistem nepopoln (oziroma, da v vsakem neprotislovnem sistemu obstaja vsaj en resničen stavek, ki v tem sistemu ni dokazljiv).

- **Drugi Gödlov izrek o neprotislovnosti** pravi, da neprotislovnosti nekega sistema ne moremo dokazati v sistemu samem (oziroma, da neprotisloven sistem ne more dokazati lastne neprotislovnosti, ne da bi postal protisloven).

Konkretno je Gödel drugi izrek dokazal za Aritmetiko, namreč da neprotislovnosti Aritmetike ne moremo dokazati drugače, kot da privzamemo neprotislovnost drugih višjih sistemov, prvi izrek pa je dokazal najprej za Whitehead-Russelov sistem, opisan v njunem

gigantskem delu Principia Mathematica, kasneje pa še splošno za poljubne neprotislovne sisteme.

Gödlov originalni dokaz teh dveh tako zelo pomembnih izrekov je zelo težak in dolg, zato sem se odločila, da ga predstavim v skrajšani in poenostavljeni obliki, kot ga je prof. Raymond Smullyan, ameriški matematik in logik, predstavil v svoji knjigi 'Poznate naslov te knjige' (v originalu 'What's the Title of This Book? - The Riddle of Dracula and other Logical Puzzles'), ki je leta 1987 izšla v slovenščini pri Državni založbi Slovenije. V bistvu je v tej knjigi predstavljen le dokaz prvega Gödlovega izreka in to v obliki uganke o vitezih in oprodah. Ravno tako s pomočjo ugank o vitezih in oprodah pa sta oba Gödlova izreka (zraven pa še nekateri drugi pomembni izreki, kot npr. Löbov izrek, Kripke - De Jongh - Sambinov izrek, itd.) dokazana v Smullyanovi knjigi 'Za vedno neodločeno' (v originalu 'Forever Undecided'), ki je v slovenščini izšla leta 1992, pri založbi Logika d.o.o. Oglejmo si torej, kakšno zvezo imajo vitezi in oprode z matematičnimi sistemi.

Na nekem otoku G sredi prostranstva južnih morij živijo samo *vitezi*, ki vedno govore resnico, in *oprode*, ki vedno lažejo. Nekateri vitezi so se na nek način dokazali (opravili kakšno junaško dejanje, rešili kako dekle iz težav ali pa ubili hudobnega zmaja) in se imenujejo *potrjeni vitezi*, ravno tako pa so se dokazali nekateri oprode (in rešili svojega gospodarja viteza iz težav, v katere se je spravil med opravljanjem kakega junaškega dejanja, reševanjem kakega dekleta iz težav ali pa ubijanjem hudobnega zmaja) in se zato imenujejo *potrjeni oprode*. Na tem otoku se domačini združujejo v različna društva, vsak prebivalec pa je lahko včlanjen v več kot eno društvo. Če vzamemo poljubnega domačina X in poljubno društvo C, oseba X lahko trdi, da je član društva C, ali pa, da ni član društva C. Vemo še, da veljajo naslednji štirje pogoji:

$E_1$: Množica vseh potrjenih vitezov sestavlja društvo.

$E_2$: Množica vseh potrjenih oprod sestavlja društvo.

*$C$ (pogoj o komplementu)*: Če je C društvo, množica vseh domačinov, ki niso včlanjeni v C, sestavlja društvo $\bar{C}$, ki se imenuje komplement društva C.

$G$: Za vsako društvo C obstaja vsaj en prebivalec otoka, ki trdi, da je član društva C (seveda je njegova trditev lahko tudi napačna - lahko je namreč oproda).

Dokazali bi radi,

1. da na otoku obstaja vsaj en nepotrjen vitez in
2. da na otoku obstaja vsaj en nepotrjen oproda.

*Dokaz dejstva, da na otoku obstaja vsaj en nepotrjen vitez:*
Po pogoju $E_1$ množica $E$ vseh potrjenih vitezov sestavlja društvo. Po pogoju C množica $\bar{E}$ vseh otočanov, ki niso potrjeni vitezi, sestavlja društvo. Po pogoju $G$ vsaj en prebivalec otoka trdi, da je član društva $\bar{E}$, ali drugače, ta prebivalec trdi, da ni potrjen vitez.

Vendar oproda ne more trditi, da ni potrjen vitez (ker je res, da oproda ni potrjen vitez). Torej to trdi vitez. Ker pa je v resnici vitez, njegova trditev drži, torej res ni potrjen vitez. Potemtakem je vitez, ni pa potrjen vitez.

□

*Dokaz dejstva, da na otoku obstaja vsaj en nepotrjen oproda:*
Po pogoju $E_2$ množica potrjenih oprod sestavlja društvo. Po pogoju $G$ vsaj en prebivalec otoka trdi, da je potrjen oproda (trdi, da je član društva potrjenih oprod). Ta oseba ne more biti vitez (saj noben vitez ne bi trdil, da je oproda), torej je oproda. Zato je njegova trditev napačna in ne more biti potrjen oproda. To pomeni, da je oproda, vendar ni potrjen oproda.

□

Tako smo na našem otoku našli nepotrjenega viteza in nepotrjenega oprodo. Zdaj pa si oglejmo, kako bi prevedli to uganko na matematične sisteme.

Neki logik ima knjigo, imenovano *Knjiga stavkov*. Strani so zaporedno oštevilčene, na vsaki strani je zapisan natančno en stavek. Noben stavek ne nastopa na več kot eni strani. Številki strani, na kateri nastopa stavek X, rečemo *oznaka strani* stavka X.

Vsak stavek v tej knjigi je seveda resničen ali pa neresničen. Nekateri resnični stavki se zdijo našemu logiku popolnoma očitni, zato je vzel te samoumevne resnice za *aksiome* svojega logičnega sistema. Ta sistem vsebuje tudi določena *pravila sklepanja*, ki logiku omogočajo, da *dokaže* razne resnične stavke in da *ovrže* razne neresnične stavke. Logik je popolnoma prepričan, da je njegov sistem *dosleden*, namreč, da je vsak stavek, dokazljiv v tem sistemu, tudi resničen, vsak v tem sistemu ovržen stavek pa neresničen. Logik pa ni prepričan, da je njegov sistem *popoln*, namreč, da so vsi resnični stavki dokazljivi in vsi neresnični stavki ovrgljivi. Ali so v tem sistemu vsi resnični stavki dokazljivi? Ali so vsi napačni stavki ovrgljivi? To sta vprašanji, na kateri bi logik rad dobil odgovor.

Ta logik pa ima še drugo knjigo, ki se imenuje *Knjiga množic*. Tudi v tej knjigi so strani zaporedno oštevilčene. Na vsaki strani je opis ene množice naravnih števil. Množico števil, ki je opisana kjerkoli v knjigi, imenujemo *zapisana množica*. Vzemimo katerokoli število n. Lahko se zgodi, da množica, zapisana na strani n v Knjigi množic, vsebuje n. Če je tako, pravimo, da je n *neobičajno število*. Če imamo sve števili, n in h, pravimo, da je h *pridruženo število* številu n, če v stavku na strani h v Knjigi stavkov trdimo, da je število n neobičajno.

Dane imamo naslednje štiri pogoje:

$E_1$: Množica oznak strani vseh dokazljivih stavkov je zapisana množica.

$E_2$: Množica oznak strani vseh ovrgljivih stavkov je zapisana množica.

$C$: Za vsako zapisano množico A je množica $\bar{A}$ - množica vseh števil, ki niso v A - zapisana množica.

$H$: Za vsako zapisano množico A obstaja taka zapisana množica B, da ima vsako število iz B pridruženo število iz A, vsako število, ki ni v B, pa ima pridruženo število, ki ni v A.

Ti štirje pogoji zadostujejo, da lahko odgovorimo na logikovi vprašanji. Kako bomo to storili? Ne gre za nič drugega kot za preoblečeno uganko z vitezi in oprodami. Oznake strani resničnih stavkov imajo vlogo vitezov, oznake strani neresničnih vlogo oprod, oznake dokazljivih stavkov vlogo potrjenih vitezov in oznake ovrgljivih stavkov vlogo potrjenih oprod. Zapisane množice imajo vlogo društev.

Da bi rešili ta problem, moramo najprej dokazati pogoj, ki ustreza pogoju G:

*Pogoj G*: Za vsako zapisano množico A obstaja stavek, ki je resničen, če in samo če je njegova oznaka član množice A.

*Dokaz pogoja G*:
Da bi dokazali pogoj G, vzemimo poljubno zapisano množico A. Naj bo B množica, ki jo zagotavlja pogoj H, n pa naj bo oznaka strani, na kateri je zapisana množica B. Po pogoju H ima število n pridruženo število h v A, če je v množici B, če pa n ni v B, ima pridruženo število h izven množice A. Trdimo, da je stavek X na strani h tisti stavek, ki ga iščemo. Stavek X pravi, da je število n neobičajno - ali drugače povedano, da je n element množice B (ker je množica B zapisana na strani n). Če je stavek X resničen, je n res v B in torej h v A. Če je torej X resničen, je njegova oznaka strani h član množice A. Recimo, da je X neresničen. Potem n ni v B in h ni v A. Torej je stavek X resničen, če in samo če je njegova oznaka strani elememt množice A. □

Ker smo dokazali pogoj G, je preprosto odgovoriti na logikova vprašanja: imamo podatek, da je množica A oznak vseh dokazljivih stavkov zapisana množica. Po pogoju C je tudi množica $\bar{A}$ vseh oznak, ki niso oznake dokazljivih stavkov, zapisana množica. Po pogoju G obstaja stavek X, ki je resničen, če in samo če oznaka strani stavka X pripada $\bar{A}$. Če trdimo, da oznaka strani stavka X pripada množici $\bar{A}$, to pomeni, da oznaka strani stavka X ne pripada A, to pa pomeni, da X ni dokazljiv. Torej je stavek X resničen, če in samo če ni dokazljiv. To pomeni, da je stavek X resničen in nedokazljiv ali pa neresničen in dokazljiv. Rekli pa smo, da noben neresničen stavek ni dokazljiv v sistemu. *Torej je stavek X resničen, ni pa dokazljiv.*

Da bi dobili neresničen stavek, ki ni ovrgljiv, vzemimo za A množico oznak strani vseh stavkov, ki so ovrgljivi. Ko uporabimo pogoj G, dobimo stavek Y, ki je resničen natanko tedaj, kadar je njegova oznaka strani oznaka strani ovrgljivega stavka. Y je resničen in ovrgljiv ali pa neresničen in neovrgljiv. Prva možnost odpade, saj noben ovrgljiv stavek ni resničen. *Torej je Y neresničen in neovrgljiv.*

*Kaj smo v bistvu sploh dokazali?*
V vsakem matematičnem sistemu obstajajo dobro definirani izrazi, ki jim lahko rečemo *stavki*, ti pa so razdeljeni na resnične in neresnične. Nekateri resnični stavki so vzeti kot *aksiomi* sistema, dana pa so tudi *pravila sklepanja*, ki nam omogočajo, da nekatere stavke dokažemo in druge ovržemo. Poleg stavkov sistem vsebuje *imena* različnih množic naravnih števil, ki jih lahko razumemo kot opise nekih lastnosti v sistemu, opisane v metamatematičnem zapisu. Vsaki množici, ki ima v sistemu ime, rečemo *definirana množica* - to so tiste množice, ki so v prejšnjem problemu zapisane. Gödel je vsakemu stavku sistema in vsaki definirani množici na poseben način priredil določeno naravno število, imenovano Gödelovo število, in to tako, da je stavke lahko uredil v takem vrstnem redu, da so veljali pogoji $E_1$, $E_2$, $C$ in $H$. Kaj sploh pomenijo ti pogoji:

$E_1$: Ta pogoj nam preprosto pove, da dokazljivost gledamo kot lastnost stavkov sistema.

$E_2$: Ta pogoj pove, da tudi ovrgljivost gledamo kot lastnost stavkov sistema.

$C$: Ta pogoj trdi naslednje: če je z definirano množico A opisana neka lastnost (v metamatematičnem jeziku), je z njenim komplementom, ki je v sistemu tudi definirana množica, opisana negacija prvotne lastnosti.

$H$: Za vsako število n obstaja stavek, ki trdi, da je število n neobičajno. Ta stavek ima neko Gödlovo število, recimo $n^*$. Izkaže se, da je za vsako definirano množico A, množica vseh števil n, za katere je $n^* \in A$, recimo ji B, tudi definirana množica. Ker je število $n^*$ pridruženo številu n, smo s tem ravno dobili pogoj H.

Stavek X, o katerem govorimo, je ekvivalenten svoji lastni nedokazljivosti. Tak stavek dejansko mora biti resničen, vendar nedokazljiv (tako kot mora biti oseba, ki trdi, da ni potrjen vitez, nepotrjen vitez) in ga v sistemu s pomočjo Gödlovega oštevilčenja eksplicitno konstruiramo. (Lepa razlaga, kako se to naredi, je podana v knjigi pod točko [7].)

Gödlova odkritja imajo daljnosežne posledice. Kažejo namreč, da je nemogoče poiskati absoluten dokaz doslednosti kateregakoli sistema, ki bi ustrezal Hilbertovi zahtevi. Povedo nam tudi, da obstaja neskončno resničnih aritmetičnih stavkov, ki jih s poljubnimi danimi pravili sklepanja ne moremo formalno izpeljati iz nobenega nabora aksiomov. Izkaže se, da z aksiomatskim pristopom v nekem sistemu nikakor ne moremo zaobjeti celotnega pojma resnice, namreč, da bi iz nekaj podanih aksiomov lahko izpeljali vsako resnično trditev. Kako bi se potem lahko približali pojmu logično-matematične resnice, pa je vprašanje, na katerega danes še ne poznamo odgovora.

**Literatura:**

[1] *The Foundations of Mathematics*, The New Encyclopaedia Britannica, Encyclopaedia Britannica Inc., London, 1992, 23. knjiga, str. 552 - 560.

[2] *Western Philosophical Schools and Doctrines*, The New Encyclopaedia Britannica, Encyclopaedia Britannica Inc., London, 1992, 25. knjiga, str. 562 - 650.

[3] *The History and Kinds of Logic - 20th Century Logic*, The New Encyclopaedia Britannica, Encyclopaedia Britannica Inc., London, 1992, 23. knjiga, str. 239 - 242.

[4] *Gödel Kurt*, The New Encyclopaedia Britannica, Encyclopaedia Britannica Inc., London, 1992, 5. knjiga, str. 323.

[5] Raymond Smullyan, *Poznate naslov te knjige*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1987.

[6] Raymond Smullyan, *Za vedno neodločeno*, Logika d.o.o., Kamnik, 1992.

[7] *The World of Mathematics, A Small Library of the Literature of Mathematics from A'h-mosé to Albert Einstein*, Tempus Books of Microsoft Press, Washington, 1988, Volume Three, Part IX, Mathematical Truth and the Structure of Mathematics.

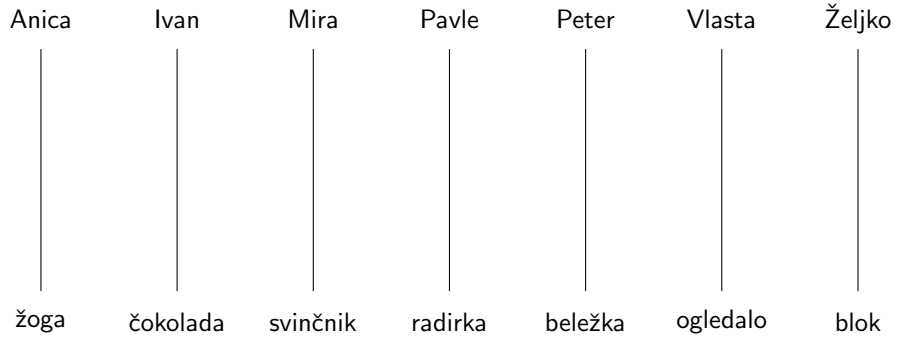
*Urška Demšar*

# JAPONSKA OTROŠKA IGRA AMIDA

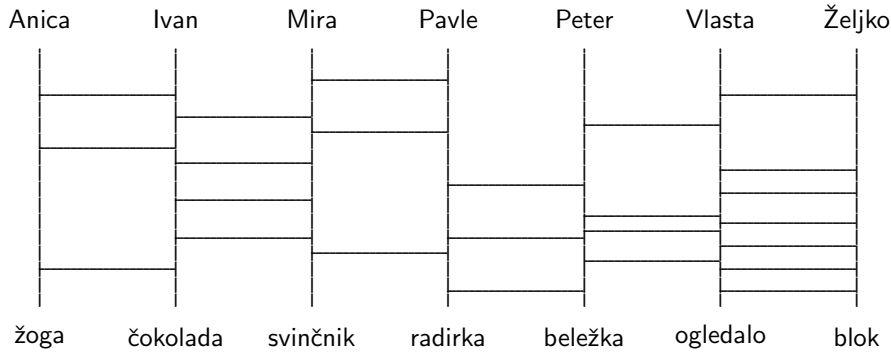
V članku *Japonska dječja igra "amida" i njezina "matematika"* je profesor Vladimir Devide opisal igro, ki je zanimiva za logiko, saj na njenih osnovah lahko sestavimo različne logične naloge.

Obstaja zanimiva otroška igra, ki je zelo razširjena na Japonskem, s katero lahko otroci izmenjujejo predmete, naslove, naloge itn. Obravnavali bomo primer, ko v igri sodeluje sedem otrok. Tako bo vsakomur jasno, kako igro prilagoditi drugačnemu številu udeležencev. Predpostavimo torej, da v igri sodelujejo otroci Vlasta, Pavle, Mira, Ivan, Peter, Željko in Anica. Izdelati moramo loterijo, s bo vsak dobil po enega od sedmih predmetov, npr.: žogo, čokolado, svinčnik, radirko, beležko, ogledalo in blok.

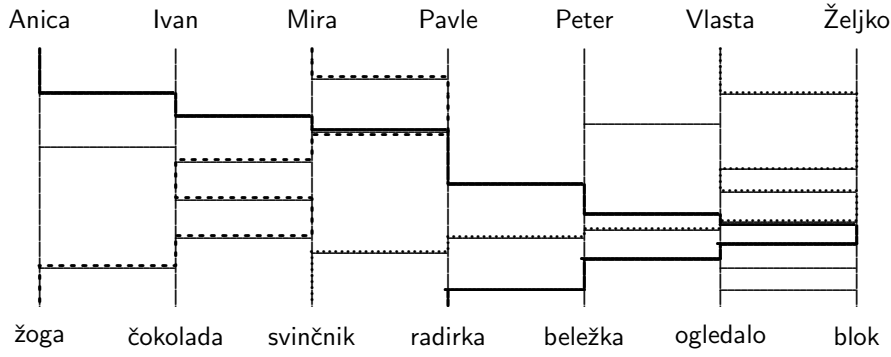
Na list papirja otroci najprej narišejo sedem vzporednih navpičnic. Na vrhu vsake navpičnice napišejo svoja imena, vsako enkrat, recimo po abecednem vrstnem redu ali kako drugače. Poudariti moramo, da izhod igre ni odvisen od tega razporeda. Na dnu navpičnic pa napišejo imena predmetov, pod vsako en predmet. Tudi to ni odločilno za izhod igre. Tako dobimo skico:




To seveda ne pomeni, da bo Anica dobila žogo, Ivan čokolado itn. Odločilni del igre šele nastopi pozneje, sestoji pa iz naslednjega: vsak udeleženec igre vriše v shemo nekaj vodoravnih prečnih črt, ki spajajo sosednje navpičnice. Vsak jih lahko nariše poljubno mnogo in to kjerkoli, edina omejitev je ta, da se nobeni dve vodoravni črti (ne njegove, ne tiste, ki so bile narisane pred tem) ne smeta vodoravno nadaljevati druga za drugo, to je, ne smeta se končati oziroma začeti v isti točki neke navpičnice. Ko otroci vrišejo svoje črte, dobimo shemo na naslednji sliki:




S tem je določeno, kaj bo kdo dobil v tej igri, po naslednjem pravilu: da bi kdo prišel do svojega predmeta, gre vzdolž svoje navpičnice do prve vodoravne prečke, gre po tej prečni črti do sosednje navpičnice (levo ali desno), nato se spusti po njej do prve vodoravne črte, po le-tej preide na sosednjo navpičnico itn., dokler ne prispe na spodnji konec neke navpičnice, kjer ga čaka njegov predmet. Na tretji sliki je vrisana taka pot za Anico z debelo črto, za Miro s črtkano in za Vlasto pikčasto črto. Bralec bo z lahkoto določil poti za ostale udelažence in ugotovil, da bo Ivan dobil beležko, Pavle čokolado, Peter blok in Željko ogledalo.




Nekdo se lahko vpraša: *"Kaj pa če dva dobita isti predmet?"* V tem je ravno odlika igre "Amida", da je vedno pravična do udeleženih. V nobenem primeru se ne more zgoditi, da bi se poti dveh različnih udeležencev končali na spodnjem koncu iste navpičnice. V to se ni težko prepričati in to je "matematika" te igre.

Če gremo na drugi sliki od nekega predmeta od spodaj navzgor, tako da se vzpenjamo do prve prečke, preko katere preidemo na sosednjo navpičnico, potem pa gremo po novi navpičnici spet navzgor do prve prečke itn., bomo na koncu prišli do vrha natanko določene navpičnice, to je tam, kjer je ime udeleženca, ki bo dobil izbrani predmet. Nihče drug ga torej ne more dobiti.

"Matematiko" igre "Amida" lahko razvijamo še naprej: ni se težko prepričati, da bo vsaka prečka prehojena natanko pri dveh različnih poteh. To pomeni, da je končen rezultat odvisen od vseh prečk, to je: nobene ne smemo izpustiti, da bi bil rezultat "Amide" isti. V to se lahko prepričamo takole: izberimo neko prečko in eno od smeri (levo ali desno).

Če gremo v določenem krajišču navzgor, na nasprotnem pa navzdol, bo vsaki izbiri smeri ustrezala pot nekega udeleženca igre do njegovega predmeta.

Če označimo zgornja in spodnja krajišča navpičnic s števili od 1 do 7 po shemi:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

vidimo, da je končni efekt potovanj navzdol neka prerazporedba (permutacija) števil od 1 do 7. To, da bo Anica dobila radirko, pomeni, da gre 1 v 4, to, da Mira dobi žogo, pomeni, da gre 3 v 1, to, da Vlasta dobi svinčnik pa pomeni, da gre 2 v 5. Ivan dobi beležko, to je, 2 gre v 5. Pavle dobi čokolado, torej 4 v 2. *Peter dobi blok* prevedemo v "5 gre v 7", *Željko dobi ogledalo* pomeni "7 gre v 6". Naša "Amida" določa torej permutacijo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Z malo premisleka lahko z "Amido" realiziramo inverzno permutacijo, ali pa z dvema zaporednima "Amidama" kompozicijo permutacij. Ne bo vam težko modificirati igre, tako da navpičnice niso na listu papija, ampak na plašču pokončnega valja. Ali bi se kdo znašel v "Amidi", kjer bi namesto navpičnic nastopali "meridiani" Möbiusovega traku? Se lahko domislite še kaj v zvezi z "Amido"?

---

**Evropski matematični kenguru**

**Rešitve za 1. in 2. letnik:**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E | B | B | B | E | B | E | A | C | C | E | D | C | A | B | C | B | C | E | C | E | C | A | B | D |

**Rešitve za 3. in 4. letnik:**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | D | E | C | D | A | B | B | C | B | D | E | D | D | A | E | C | A | B | E | B | C | C | B | B |

# MEDALJI NA MATEMATIČNI OLIMPIADI

Od 5. do 17. julija so v Bombayu v Indiji organizirali *37. mednarodno matematično olimpiado*, na kateri je sodelovalo 75 držav z vseh kontinentov. Slovenija je tokrat četrtič nastopila s svojo ekipo. Potem ko so slovenski srednješolci leta 1993 v Istanbulu (Turčija) prejeli dve bronasti medalji in pohvalo, v letih 1994 in 1995 pa v Hong Kongu oziroma Torontu (Kanada) po tri pohvale, so se letos vrnili iz Indije z dvema bronastima odličjema. Prejela sta ju tretješolec Matjaž Konvalinka z *Gimnazije Bežigrad* iz Ljubljane in četrtošolec Igor Klep s *Srednješolskega centra Ptuj*. Poleg njiju so bili v ekipi še Polona Grešak (*Gimnazija in ekonomska srednja šola Trbovlje*), Tadej Starčič (*Gimnazija Bežigrad*), Andrej Zorko (*Gimnazija in ekonomska srednja šola Brežice*) ter Sašo Živanovič (*Srednješolski center Celje – Gimnazija Lava*). Vodja ekipe je bil Matjaž Željko, asistent na *Fakulteti za matematiko in fiziko*, član mednarodne tekmovalne komisije pa Darjo Felda, asistent na *Fakulteti za elektrotehniko*.

Čeprav je olimpiada tekmovanje posameznikov, si po vzorcu iz športa večkrat ogledamo razvrstitev držav po uspešnosti. Letos so prvih deset mest zasedle ekipe Romunije, ZDA, Madžarske, Rusije, Velike Britanije, Kitajske, Vietnama, Južne Koreje, Irana in Nemčije. Slovenija je pristala v sredini tabele skupaj z Južno Afriko takoj za Švedsko (ena srebrna in ena bronasta medalja ter pohvala), Avstrijo (ena srebrna medalja) in Finsko (dve bronasti medalji in dve pohvali). Za nami so se med drugim uvrstili Španija, Danska, Mehika, Nizozemska, Irska, Švica in Portugalska, če naštejem le nekatere.

Mednarodna matematična olimpiada je srečanje najboljših mladih matematikov srednješolcev iz sodelujočih držav. Država gostiteljica pošlje uradna povabila za udeležbo preko diplomatskih predstavništev. Pri nas nato *Ministrstvo za šolstvo in šport* preda vabila *Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije* oziroma *Komisiji za popularizacijo matematike v srednji šoli*, ki deluje v okviru *Društva*. V vsakem šolskem letu se že v septembru začnejo prve enotedenske priprave na matematično olimpiado, ko se okrog 15 dijakov zbere na tako imenovanih *raziskovalnih dnevih iz matematike*. Tem srednješolcem se pridruži še okrog 25 do 30 sovrstnikov na celoletnih pripravah, ki obsegajo samostojno reševanje nalog in vsak mesec po en popoldan skupnega dela z enim od vodij celoletnih priprav. Pred odhodom na olimpiado imajo dijaki še en teden strnjenih priprav.

Po pravilih sme na matematični olimpiadi nastopiti največ šest tekmovalcev iz posamezne države. *Komisija za popularizacijo matematike* razpiše letno dva izbirna testa, na katerih se kandidati srečajo s po tremi nalogami "olimpijskega" tipa in ki odločilno vplivata na izbor slovenske ekipe. Pri izboru se upoštevajo tudi uspehi na državnem tekmovanju, na *mednarodnem matematičnem tekmovanju mest*, v katerega je Slovenija vključena od leta 1990, in na *mednarodnem iskanju matematičnih talentov*, katerega naloge najdete v tej reviji.

Na sami olimpiadi morajo tekmovalci rešiti šest nalog in sicer v dveh zaporednih dneh po tri naloge, vsakič imajo na voljo štiri ure in pol. Vsaka vabljena država lahko pošlje do šest predlogov nalog, ki jih predstavniki države gostiteljice pregledajo. Po navadi izmed

vseh predlogov izberejo okrog 30 nalog različnega tipa in različne težavnosti. Naloga mednarodne tekmovalne komisije, v kateri je po en predstavnik vsake države, je izbrati "olimpijskih šest" nalog in jih prevesti v jezike sodelujočih držav. Letos je bila prvi dan tekmovanja kot ena od lažjih nalog tale:

*Naj bo $ABCD$ pravokotna tabla z $|AB| = 20$, $|BC| = 12$, razdeljena na $20 \times 12$ enotskih kvadratov. Naj bo nadalje $r$ dano pozitivno celo število. Kovanec smemo prestaviti z enega kvadrata na drugega, če in samo če je razdalja med središčema teh kvadratov enaka $\sqrt{r}$.*
*Poiskati je treba zaporedje prestavitev kovanca, s katerim prenesemo kovanec s kvadrata, ki ima oglišče $A$, do kvadrata, ki ima oglišče $B$.*

1. *Pokaži, da tega ni mogoče napraviti, če je $r$ deljiv z 2 ali s 3.*
2. *Dokaži, da to lahko napravimo, če je $r = 73$.*
3. *Ali se da to napraviti, če je $r = 97$?*

Izdelke dijakov posamezne države najprej pregledata član tekmovalne komisije iz te države in vodja ekipe, nato pa izdelke predstavita mednarodnim ocenjevalcem.

Čeprav je Slovenija majhna država, smo s štirimi bronastimi medaljami in sedmimi pohvalami v štirih letih dosegli opazen uspeh. Mladi matematiki si zaslužijo priznanje za vloženi trud, njihovi mentorji pa za nepogrešljivo pomoč pri tem. Zahvala gre tudi *Ministrstvu za šolstvo in šport* ter *Ministrstvu za znanost in tehnologijo*, ki sta v veliki meri omogočili nastope na olimpiadah.

*Darjo Felda*