PETI LETNIK — 1995–1996 – 6

DEL REVIJE

LOGIKA

&

RAZVEDRILNA MATEMATIKA

Revijo sta za splet pripravila Nada in Marko Razpet
na podlagi datotek, ki jih je izdelal Darjo Felda.

V S E B I N A

Uporaba logike pri bridžu 3
Križarji, templjarji in kralji 10
Gobelini 21
Georg Cantor 30
Tekmujmo v razvedrilni matematiki 35
Logika po svetu 40

Izdaja: Založniško podjetje LOGIKA d.o.o., Svetčeva 11, 1240 Kamnik,
št. žiro računa: $50140 - 603 - 57434$

Za izdajatelja: Izidor Hafner

Revija *Logika & Razvedrilna matematika* je vpisana v register časopisov pri *Ministrstvu za informiranje* pod registrsko številko *949*. Po mnenju *Ministrstva za informiranje* št. *23/89–92* šteje revija *Logika & Razvedrilna matematika* med proizvode informativnega značaja, za katere se plačuje davek od prometa po stopnji 5%.

Revijo *Logika & Razvedrilna matematika* subvencionira *Ministrstvo za šolstvo in šport*

Člani časopisnega sveta: prof. dr. Frane Jerman, prof. dr. Tomaž Pisanski in Darjo Felda, prof.

Strokovni pokrovitelj: Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko – Oddelek za teoretično računalništvo

Glavni in odgovorni urednik: dr. Izidor Hafner

Sodelavci: Urša Demšar, Gregor Dolinar, Urška Drčar, Petra Ipavec, Alenka Kavčič, Dušanka Kocić, Katka Kurent, Meta Lah, Nina Milač, Nika Novak, Hiacinta Pintar, Maja Pohar, Darja Polak, Tanja Soklič, Mirjana Todorovič in Aleš Vavpetič

Jezikovni pregled: računalniški program *Besana*

Generalni sponzor: Marand d.o.o., zastopstvo Borland

Sponzorja: Časopisno podjetje *Dnevnik*, NIL d.o.o.

Tisk: Tiskarna "Planprint", Rožna dolina c. IV/32–36, Ljubljana

Ilustrirala: Ana Hafner

Naklada: 2300 izvodov

© 1996 LOGIKA d.o.o.

ISSN $0354 - 0359$

LOGIKA & RAZVEDRILNA MATEMATIKA
letnik V, št. 6, $1995/96$

Cena revije: v prosti prodaji 330 SIT, za naročnike 295 SIT in vključuje 5% prometni davek

UPORABA LOGIKE PRI BRIDŽU

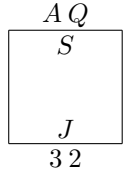
1. UVOD

Ker sem z več strani dobil namig, da bi bilo bolj zanimivo pogledati uporabo logike v bridžu, kot pa reševanje logičnih nalog na primeru bridža, sem se odločil, da tokrat pokažem, kako pomembna je logika za vsakega bridžista. O tej temi sem že predaval na seminarju iz logike za učitelje v okviru poglavja *Verjetnostna logika*.

Preden se lotimo problema, moramo postaviti pravila igre, ki bodo za nas nekoliko poenostavljena. Imeli bomo štiri igralce, ki mečejo karte v smeri urinega kazalca. Igralce bomo imenovali po straneh neba. Ko bomo risali diagrame, bo tako spodnji igralec *Jug*, levo od njega bo *Zahod*, zgoraj *Sever* in na desni *Vzhod*. Skupaj bosta vedno igrala Jug in Sever proti Zahodu in Vzhodu, problem pa bo zastavljen tako, da bomo za par Jug-Sever morali narediti čim večje število vzetkov, po domače štihov. Vedno bomo sedeli na položaju Juga in reševali problem, kot ga srečamo tudi pri bridžu. Poleg svojih kart bomo namreč videli tudi partnerjeve, ki so med našo igro položene na mizo, zato jim velikokrat rečemo tudi *miza*. Tudi nasprotnika vidita vsak poleg svojih kart še karte Severa, zato moramo računati na to, da nam ne bosta podarila nobenega vzetka. Zanimala nas bo le ena barva, zato seveda igralci ne bodo imeli isto število kart v barvi, v kateri bo postavljen problem. Prav tako bomo po vsakem vzetku smeli igrati naslednjo karto iz katerekoli strani. Mislimo si, da je bilo vmes odigranih nekaj vzetkov, potem pa smo prišli na vrsto zopet mi, ki smo se ponovno lotili naše barve iz diagramov. Vedeti moramo še, da je vseh kart v naši nedefinirani barvi trinajst in da so po moči razvrščene od asa proti dvojki (oznake : A, K, Q, J, T, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2). Prvih pet oznak je iz angleščine in pomenijo asa (angl. *As*), kralja (*King*), damo (*Queen*), fanta (*Jack*) in desetko (*Ten*).

2. LOVLJENJE VMES (angleško IMPASS)

2.1. Koliko vzetkov imamo v naslednji kombinaciji



Odgovor: Odgovor bi se lahko glasil 1.5, vendar sem prepričan, da bi skoraj vsak pravi kvartopirec med vami protestiral. Ali je eden ali pa dva. Vendar leži resnica res nekje vmes. Če igramo prvo karto iz Juga in igra Zahod tudi malo karto, mora Sever igrati damo. Na ta način bomo namreč naredili dva vzetka v primeru, ko ima Zahod kralja in enega, ko ga ima Vzhod. Dva vzetka naredimo torej v polovici primerov, enega pa v drugi polovici, zato je verjetnost za dva vzetka 50-odstotna, za število vzetkov pa lahko rečemo, da je 1.5. Morda bi kdo lahko rekel, kaj pa v primeru, da je pri Vzhodu samo kralj in bi bilo bolje igrati asa, saj bi kralja ujeli le na ta način. Odgovor je, da je to zelo slaba igra, saj je verjetnost, da ima Vzhod le kralja, zanemarljivo majhna (v tem primeru bi imel Zahod

vseh preostalih osem kart). Kot vidite, bomo opazovali tudi število kart pri nasprotnikih.

2.2. Podobni problemi:

a)
$A\,Q\,J$
S
J
$4\,3\,2$

b)
$A\,3\,2$
S
J
$Q\,J\,T$

c)
$A\,8\,5\,2$
S
J
$Q\,J\,T\,9$

d)
$A\,J\,2$
S
J
$Q\,T\,3$

e)
$A\,Q\,3$
S
J
$J\,T\,2$

f)
$A\,J\,T$
S
J
$Q\,3\,2$

Odgovori: V vseh primerih boste lovili kralja pri Zahodu, torej morate prvo karto odigrati iz Juga. Če ima Zahod res kralja, boste vsakič naredili tri vzetke, razen pri **c)** primeru štiri. Omembe vredno je še, da v vseh primerih, razen pri **a)**, lahko igrate s strani Juga visoko karto, tako da ne boste imeli večjih problemov s tem, s katere strani boste igrali po prvem vzetku. Le pri primeru **a)** je potrebno posebej poudariti, da boste, potem ko vzamete prvi vzetek s fantom na Severu, tudi v drugo morali igrati malo karto z Juga.

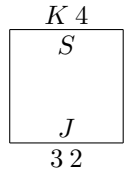
3. IZOGIBANJE (angleško EXPASS)

3.1. Koliko vzetkov lahko naredimo v tem primeru:

$A\,3\,2$
S
J
$Q\,5\,4$

Odgovor: Sedaj seveda ne bi imelo nobenega smisla igrati najprej damo iz strani Juga, saj bi v primeru, da ima Zahod kralja, le-tega enostavno igral in naredili bi le vzetek z asom. Tokrat moramo razmišljati nekoliko drugače. Če želimo napraviti dva vzetka, igramo najprej asa in nato malo karto s Severa proti dami. Če ima Vzhod kralja, bomo v vsakem primeru naredili še drugi vzetek. Če ga igra takoj, igramo s strani Juga malo karto in bo dama kasneje naredila vzetek. V primeru, da igra Vzhod malo karto, bomo z damo naredili vzetek takoj. Če je kralj pri Zahodu, seveda ne moremo narediti drugega vzetka, razen v primeru, da ima samega kralja. Torej lahko rečemo, da so tokrat možnosti za dva vzetka celo nekoliko večje kot 50 odstotkov.

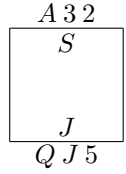
3.2. Podobno bi ravnali v naslednjem primeru:



Odgovor: Sedaj imamo pol vzetka, če igramo majhno karto iz Juga. V primeru, da je as pri Zahodu, bomo naredili en vzetek. Če bo Zahod najprej igral majhno karto, bomo s kraljem naredili vzetek takoj, sicer pa kasneje. Če pa je kralj pri Vzhodu, nam ne bo uspelo narediti vzetka, razen v primeru, da bi igrali na samega asa pri Vzhodu. Za to igro smo že videli, da bi bila slaba strategija, saj bi moral imeti Zahod vseh ostalih osem kart, kar je malo verjetno.

4. PRIMERI

4.1. Poskusimo ugotoviti, kateri od obeh načinov, impass ali expass, je nekoliko uspešnejši pri naslednjem primeru:



Odgovor: Najprej lahko ugotovimo, da imamo v vsakem primeru dva vzetka, saj imamo tri od štirih najvišjih kart. V najslabšem primeru lahko izgubimo en vzetek, ostala dva pa sta naša.

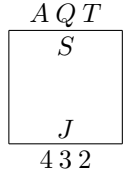
Če lovimo kralja pri Zahodu, bomo igrali damo z Juga. Vendar bo Zahod, za katerega upamo, da ima kralja, le-tega enostavno odigral. Ta štih bomo sicer vzeli z asom, prav tako bomo naredili še enega s fantom, tretji pa bo pripadel nasprotnikoma.

Podobno bo, če se bomo izogibali kralju pri Vzhodu. Ta ga bo namreč ob prvi priložnosti vzel in zopet bomo naredili le dva vzetka.

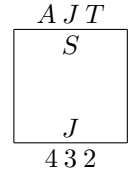
Vse torej kaže, da bomo v vsakem primeru naredili natanko dva vzetka. Morda je kdo vseeno opazil malenkostno boljšo igro? Če namreč najprej odigramo asa in je pri enem od nasprotnikov sam kralj, bomo naredili vse vzetke. To je sicer res malo verjetno, a, ker nas nič ne stane, ni razloga, da ne bi poskusili s to igro.

4.2. Koliko vzetkov in s kolikšno verjetnostjo boste naredili v naslednjih dveh primerih:

a)



b)



Odgovor: V primeru **a)** lahko napravite enega, dva ali tri vzetke, odvisno od razporeditve

kart pri nasprotnikih. Ako ima Zahod obe manjkajoči figuri, se pravi kralja in fanta, potem bomo naredili vse tri vzetke. Igrali bomo namreč malo karto z Juga in odigrali najmanjšo možno karto s Severa, ki še vzame. Nato bomo vajo še enkrat ponovili.

Če ima Vzhod eno od manjkajočih kart, mu bomo z isto igro sicer dali prvi vzetek, zato pa bomo v drugo uspešni in tako naredili dva vzetka. V primeru, da pa sta obe figuri pri Vzhodu, nam naša igra prinese le en vzetek.

Verjetnosti za posamezno število vzetkov ni težko izračunati, če vemo, da so štiri možne razdelitve iskanih figur: kralj in fant pri Zahodu, kralj pri Zahodu, fant pri Zahodu ali nobena od obeh kart pri Zahodu. Za tri vzetke je ugodna prva možnost, zato je verjetnost 25-odstotna, za dva vzetka prideta v poštev drugi dve možnosti, torej je verjetnost 50-odstotna in za en vzetek imamo zadnjo možnost in 25-odstotno verjetnost.

Ker je bilo pri nasprotnikih sedem manjkajočih kart, bi bila zelo zanimiva naloga pokazati, da je naša strategija optimalna.

V primeru **b)** seveda ne morete narediti več kot dva vzetka. Ker je eden siguren, z asom namreč, je vprašanje le, kdaj dveh ne moremo narediti. S podobnim razmislekom kot v primeru **a)** lahko hitro ugotovimo, da se bo to zgodilo le, ko sta obe manjkajoči visoki figuri, kralj in dama, pri Vzhodu. Naredili bomo torej en vzetek v 25-ih odstotkih, v preostalih 75-ih pa dva.

4.3. Še dva podobna primera:

a)

$A\ J\ 4$
S
J
$K\ 3\ 2$

b)

$A\ J\ T$
S
J
$K\ 3\ 2$

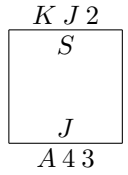
Odgovor: Tokrat nam manjka dama. Zopet lahko privzamemo, da je uspešno lovljenje dame (50 odstotkov) bolj verjetno, kot pa, da je prav ta karta od manjkajočih sedmih pri enem od nasprotnikov v dvoje. Na žalost nam situacije iz življenja pri tem ne morejo pomagati, zato razmislimo o optimalni strategiji.

V primeru **a)** igramo najprej kralja, če je dama morda pri Vzhodu sama, nato pa jo z malo karto iz Juga lovimo pri Zahodu. Če igra torej Zahod tudi malo karto, bomo iz Severa igrali fanta, v upanju, da je dama pri Zahodu. Verjetnost je torej zopet nekoliko večja kot 50 odstotkov, da bomo naredili tri vzetke.

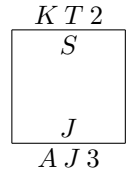
Primer **b)** je sicer na moč podoben primeru **a)**, le da tokrat lahko ujamemo damo tako pri Zahodu, kot pri Vzhodu. Če nam torej kakšna višja sila prišepne, kje je dama, imamo zagotovljene tri vzetke. Poskusite.

4.4. Poskusite sami rešiti dva podobna problema:

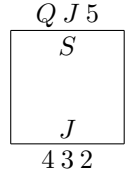
a)



b)



4.5. Rešimo še en primer expassa:

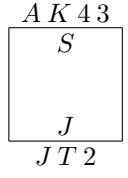


Odgovor: Ker imata nasprotnika najvišji dve karti, je očitno, da se borimo za en vzetek. Začeli bomo z majhno karto z Juga. Če bo Zahod igral asa ali kralja, smo si vzetek že zagotovili. Če pa bo igral majhno karto, bomo s Severa igrali figuro. Če nam jo vzame Vzhod, bomo to igro ponovili ob prvi priložnosti.

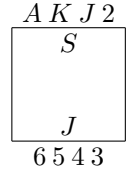
Izračunajmo si še verjetnost, da pridemo do enega vzetka. Zopet so možne štiri razdelitve obeh visokih kart pri nasprotnikih. Zahod ima lahko obe karti, lahko ima samo asa ali samo kralja, možno pa je tudi, da sta obe karti pri Vzhodu. Ker je za nas neugoden le zadnji primer, lahko rečemo, da nam kombinacija kart iz diagrama zagotavlja 0,75 vzetka.

4.6. Kako narediti vse vzetke:

a)



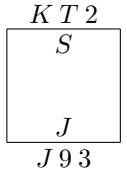
b)



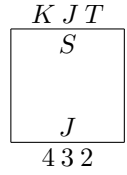
Odgovor: Zopet bomo lovili damo pri Zahodu. Splača se prvič igrati asa, če je slučajno sama dama pri Vzhodu, nato pa fanta ali desetko iz Juga in loviti damo pri Zahodu. V primeru **a)** bomo vedno naredili štiri vzetke, če je dama pri Zahodu in so karte pri nasprotnikih razdeljene 3-3, v primeru **b)** pa le, če so bile karte prvotno razdeljene 3-2 pri nasprotnikih. To pomeni, da eden od nasprotnikov ni imel štirih, saj tako naša četrta karta ne bi bila visoka. Kot že v prejšnjih primerih, je ta strategija optimalna : približno 50-odstotna. Če bi namreč poskusili z igro asa in kralja v prvem in drugem štihu, bi pridobili en vzetek le v primeru, da je dama v *dvojcu* (anleško *double*) pri Vzhodu, kar so štirje primeri (dama in ena od manjkajočih štirih kart). Izgubili bi pa na ta način damo v tretje pri Zahodu, kar je šest primerov (dama in kombinacije dveh od štirih manjkajočih kart). V prvem primeru je ta igra še nekoliko slabša, ker bi s tako igro naredili le dva vzetka namesto štirih, če ima Zahod damo in tri majhne karte.

4.7. Še dva primera nižjih možnih razporeditev kart:

a)



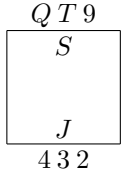
b)



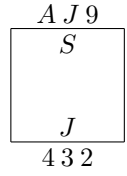
Odgovor: Tu seveda lahko naredimo največ dva vzetka, saj nam manjka najvišja karta - as. V obeh primerih pa imamo siguren en vzetek, ker imamo toliko visokih kart, da nam nasprotnika ne moreta vzeti več kot dame in asa. Zato se moramo potruditi, da naredimo po možnosti dva vzetka. Glede na to, da asa ne moremo ujeti, se bomo osredotočili na damo. V obeh primerih lahko hitro ugotovimo, da bomo v naši nameri uspeli, če je dama pri Zahodu, sicer pa ne, le igrati moramo pravilno. Najbrž ste že ugotovili, da moramo dvakrat igrati z Juga in loviti damo pri Zahodu.

4.8. Za konec si poglejmo še dva nekoliko težja problema:

a)



b)



Odgovor: V primeru **a)** se zopet borimo le za en vzetek, saj sta najvišji karti pri nasprotnikih. Ena možnost bi bila, da uporabimo tehniko expassa in igramo majhno karto iz Juga. V primeru, da tudi Zahod igra majhno karto, igramo iz Severa damo. Na ta način smo se poskusili izogniti asu in kralju pri Zahodu. To pomeni, da bomo uspeli le v četrtini primerov, ko sta namreč obe karti pri Zahodu. V ostalih treh primerih nam bo Vzhod vzel damo z eno od obeh figur, nakar bomo dali še dva vzetka drugi figuri in fantu.

Kaj pa, če se na asa in kralja ne oziramo, saj ta dva vzetka tako ali tako pripadata nasprotnikoma in se osredotočimo le na fanta ? Če ga bomo z impassom lovili pri Zahodu, kar je v polovici primerov, bomo naredili en vzetek. Ta strategija je bila torej kar dvakrat uspešnejša.

V primeru **b)** nam manjkajo tri ključne karte: kralj, dama in desetka. Ker je možnih razdelitev teh kart pri nasprotnikih kar osem, si jih zapišimo (glej preglednico).

Zahod	Vzhod
$K\,Q\,T$	–
$K\,Q$	T
$K\,T$	Q
$Q\,T$	K
K	$Q\,T$
Q	$K\,T$
T	$K\,Q$
–	$K\,Q\,T$

Ponujata se dve možni igri za drugi vzetek. Ena je, da pozabimo na desetko in igramo majhno karto z Juga z namenom, da, v primeru majhne karte s strani Zahoda, igramo fanta iz Severa. Ta igra je uspešna le, ko ima Zahod obe figuri, torej v prvih dveh primerih, zato je njena verjetnost 25-odstotna. V ostali primerih nam bo namreč Vzhod vzel fanta z eno od figur, nato pa bomo z asom in devetko preslabi, da bi proti drugi visoki figuri in desetki, ki ju imata še nasprotnika, naredili več kot le en vzetek.

Druga možnost je, da lovimo desetko pri Zahodu in hkrati upamo, da ima vsaj še eno od obeh figur. Poglejmo si, kako bi v tem primeru potekala igra. Najprej bi igrali majhno karto iz Juga, na majhno karto Zahoda pa bi igrali devetko iz Severa, ki bi jo Vzhod vzel na primer z eno izmed obeh figur. Ob prvi naslednji priložnosti bi nato lovili drugo figuro pri Zahodu. Ta igra je uspešna v prvem, tretjem in četrtem primeru od osmih, torej 37,5-odstotna, kar je seveda veliko bolje.

Upam, da boste tudi sami lahko sestavili nekaj podobnih problemov, saj je možnosti nič koliko, predvsem z nižjimi kartami.

Lahko bi dodali še kakšno barvo, kar bi nas počasi pripeljalo do pravega bridža, to pa je seveda že povsem druga tema.

Matija Šenk

KRIŽARJI, TEMPLJARJI IN KRALJI

(ali kako se lahko s pomočjo logike naučiš tudi nekaj zgodovine)

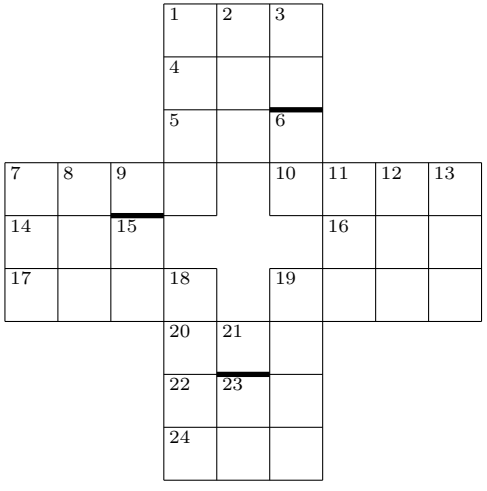
1. NALOGA: KRIŽARSKE VOJNE

Sredozemski prostor so ob koncu 11. stoletja obvladovale islamske države, bizantinsko cesarstvo in krščanski zahod. Na muslimanskem in bizantinskem vzhodu so obstajale prave države, krščanski zahod pa se je v tem obdobju komaj rešil barbarstva, kamor sta ga pahnila preseljevanje narodov in gospodarsko nazadovanje po razpadu zahodnega dela rimskega cesarstva. Kraljeva oblast v zahodnih deželah je vse bolj slabela in krajevni fevdalni gospodje, ki so bili teoretično kraljevi vazali, so vse bolj sami nadzorovali in branili svoje ozemlje, česar posledica so bili številni majhni lokalni spopadi in vojne. Cerkev teh spopadov ni mogla preprečiti, zato jih je skušala vsaj "pokristjaniti" in jim dati verski pečat. Vitezi so tako postali pobožni junaki, ki naj bi v imenu Boga varovali duhovnike in cerkveno posest, branili pomoči potrebne, siromake, vdove in sirote, njihov največji in najvišji cilj pa naj bi bil boj proti nevernikom. Taka miselnost o pravični vojni proti pripadnikom drugih ver je v 11. stoletju prevladovala po vsej zahodni Evropi. Krščanski svet je bil za viteze domovina, ki jo je bilo treba braniti pred napadalci, Palestina in Jeruzalem pa še posebej, saj je to kraj, kjer je živel in trpel Kristus. Abasidski kalifi so *Karlu Velikemu* dovolili, da je postal krščanski zahod varuh svetih krajev, kamor so se zahodnoevropski kristjani odpravljali na množična romanja. V 11. stoletju pa je začel kalif *Ali Hakim* kristjane preganjati in zaradi vedno pogostejših turških vpadov je bilo do svetih krajev vedno težje ali celo nemogoče priti. To je bil eden izmed razlogov, zakaj je papež *Urban II* na koncilu v Clermontu 27. novembra, leta, ki ga v številski križanki najdeš pod *19. navpično*, pozval ves krščanski svet na križarsko vojno, da bi spet zavzeli svete kraje. Na oblačilih so imeli vitezi izvezen križ, od tod ime križarji.

Dolgotrajni križarski pohod so spremljali pokoli, plenjenje in uničevanje, ki so trajali vse do 15. julija 1099, ko so križarji končno zavzeli Jeruzalem. Leta 1100 je bilo po koncu prve križarske vojne ustanovljeno frankovsko Jeruzalemsko kraljestvo in vanj so se po še nekaj bolj ali manj neuspelih križarskih pohodih iz Evrope počasi, toda vztrajno zgrinjali frankovski priseljenci in vojaki. Oblast križarjev pa je bila krhka, saj jim je šlo le za nadvlado nad premaganim muslimanskim prebivalstvom. In leta, ki ga v številski križanki najdeš pod *19. vodoravno*, ko je sirijski emir *Zengi* uspešno osvojil večino križarskih trdnjav in je Frankom ostal le še ozek pas ozemlja, je Evropa spet sklicala novo križarsko vojno, ki sta jo vodila dva evropska vladarja, francoski kralj *Louis VII* in nemški cesar *Konrad III.* A *Zengi* in njegov sin *Nur er Din* sta bila premočna in po nekaj letih bojev se je zdesetkana križarska vojska vrnila domov. *Nur er Din* je zavzel ne samo križarske države, temveč večino ozemelj na Bližnjem vzhodu in tudi Egipt, kjer je postavil za svojega namestnika vezirja *Saladina*. *Saladin* je v bitki pri Hatinu leta, ki ga v križanki najdeš pod *18. navpično*, Franke popolnoma potolkel in spet zavzel Jeruzalem, Franki so ostali le še v priobalnem pasu, kamor jim je prišla na pomoč tretja križarska vojska, na čelu z nemškim cesarjem *Friderikom Barbarosso*, francoskim kraljem *Filipom II Avgustom* in angleškim

kraljem *Rihardom Levjesrčnim*, ki je imel mogočno vojsko, dovolj disciplineranih vojakov in izpopolnjene oblegovalne naprave, tako da je leta 1192 prispel vsega dvajset kilometov od Jeruzalema in sklenil s *Saladinom* premirje. Tako je križarska država še naprej životarila, prešibka, da bi bila za muslimansko okolico resnično nevarna in premočna, da bi jo lahko uničili. Četrta, peta in šesta križarska vojska so skrenile s poti in se neslavno končale daleč od Jeruzalema in Svete dežele. Leta, ki ga v križanki najdeš pod *10. vodoravno*, se je pod vodstvom francoskega kralja *Louisa IX Svetega* začela sedma križarska vojna z namenom, ne samo da spet "osvobodi" Jeruzalem, temveč da osvoji tudi Egipt, a tudi ta križarski pohod se je končal s popolnim neuspehom in Franki so po porazu lahko le utrjevali tiste maloštevilne postojanke, ki so jih v Sveti deželi še imeli. Sirija in Egipt sta leta 1281 postala spet enotna in sta leta, ki ga v križanki najdeš pod *17. vodoravno*, dokončno premagala Franke, ki so Sveto deželo zapustili brez upa na vrnitev. Jeruzalemski kralj je sicer nominalno še obstajal, državo in prestolnico pa je imel na Cipru. S tem se je končala epopeja, ki je trajala dvesto let in je pognala v spopad z ene in druge strani mogočne in drzne osebnosti in ki je spočela medsebojno sovraštvo, nezaupanje in nerazumevanje za mnoga stoletja.

Če bi rad izvedel letnice prelomnih dogodkov v križarskih vojnah, reši številsko križanko:



Vodoravno:

1. Peta potenca.
4. Kvadrat *6 navpično* (*6N*).
5. Kvadrat *3N*.
7. Kvadrat.
10. Dvakratnik četrte potence.
14. Večkratnik obratnega števila od *5V*.
16. Deveta potenca.
17. K *10V* prištej dvomestno praštevilo iz števk, ki se ponavljata v *19V*.
19. Število oblike *AABB* oz. dvakrat po dve enaki števki.
20. Najmanjši tromestni kvadrat.
22. Produkt *15N* in *6V*.
24. K *20V* prištej največjo trimestno četrto potenco.

Navpično:

1. Dvakratnik *19N*.
2. Tri sode števke.
3. Praštevilo.
6. Enaki števki.
7. Isto kot *11N*.
8. Dvakratnik *11N*.
9. Čisto nič.
11. Praštevilo iz istih števk kot *16V*.
12. K *16V* prištej najmanjše praštevilo.
13. Tri zaporedne sode števke.
15. Zaporedni lihi števili.
18. K *19V* prištej lastne desetice in enice in odštej 1.
19. Tri lihe in ena soda števka.
21. Isto kot *9N*.
23. Večkratnik *3N*.

2. NALOGA: TEMPLJARSKI VITEŠKI RED

Ivanovci in templjarji – dva vojaška meniška redova – so bili v dvanajstem in trinajstem stoletju edina stalna frankovska vojska. Sestavljali so jo menihi, ki so bili zadolženi za obrambo večine križarskih trdnjav. Ivanovci so ostali zvesti vojaškemu poslanstvu do današnjih dni in njihov red še vedno obstaja na Malti (malteški vitezi svetega groba), templjarji, prevplivni in prebogati, pa so žalostno končali za časa vladanja francoskega kralja *Filipa IV Lepega*.

Templjarski red je tako kot drugi vojaški redovi zrasel iz življenjskih izkušenj tistih, ki so v času križarskih vojn bivali v Sveti deželi. Začetki tega reda so nam slabo znani. Okoli leta 1118 je začel *Hugo Paynski*, vitez iz Champagne in sorodnik svetega Bernarda, z nekaterimi svojimi prijatelji organizirati varstvo romarjev po poteh proti Jeruzalemu in Jerihi. Vitezi so se odločili za življenje v uboštvu, v skladu z meniškimi pravili avguštincev, jeruzalemski kralj in cerkvene oblasti v Sveti deželi pa so določili njihove obveznosti za področje vojskovanja in obrambe.

V Evropi sta navdušenje teh "Kristusovih vitezov" in misel, da je križarska vojna neke vrste prečiščena oblika vojaške službe, omogočala izoblikovanje redovnih pravil, ki jih je leta 1128 red sprejel. Bratje so se morali neustrašno boriti proti sovražnikom vere. Odgovorni so bili neposredno velikemu mojstru reda, redovnemu kapitlju in papežu. Bili so neodvisni od cerkvenih oblasti, nad redom je imel oblast samo papež. Templjarski red je bil organiziran po sistemu komend, ki so se družile v redovne province, na čelu le-teh pa so bili komturji. Red je vodil veliki mojster, ki ga je izvolilo trinajst redovnih dostojanstvenikov. Red, v katerem so si bili vsi bratje, so sestavljali vitezi in oprode, katerih dolžnost je bilo vojskovanje, kleriki, katerih dolžnost je bila molitev, in navadni bratje z določenimi praktičnimi znanji. Red se je razvijal zaradi podarjenih posesti: kraljeva palača na ploščadi Salomonovega templja je dala redu tudi ime. *Hugo Paynski* in njegovi tovariši so na obiskih po Evropi dobivalo v dar ogromne posesti, ki so postale osnova za mrežo komend v zahodni Evropi. Premoženje templjarskega reda se je množilo tudi na druge načine: imeli so pravico do nabirk, dohodki so dotekali iz volil, od ladijskih prevozov za romarje v Sveto deželo, iz bančnih in menjalniških poslov, ki so postali nujni del odnosov med zahodno Evropo in Vzhodom. Templjarji so sprejemali redne denarne pologe od vladarjev in evropskih velikašev: francoski in angleški kralj sta zaupala državni zaklad v varstvo pariški oziroma angleški centrali templjarskega reda. Templjarske hiše so sprejemale v hrambo tudi dragulje in dragocenosti, izplačevale rente in kavcije, opravljale denarne posle na daljavo, predvsem s pomočjo italijanskih trgovcev. Red je imel v takratnem finančnem življenju Evrope vidno in odločilno vlogo in si je pridobil pretiran sloves, da je neizmerno bogat. To pa je bil tudi vzrok za njegovo pogubo.

V zgodovini križarskih vojn imajo templjarji bistveno mesto. Z vojaškega vidika je bil red templjarjev izkušena, poklicna vojska, ki jo je bilo mogoče sklicati ob vsakem času: tristo vitezov na konjih, oprode, lokostrelci in pehota. Templjarji so imeli v vlogi čuvarjev velikih trdnjav v Sveti deželi odločilno vlogo pri obrambi križarskih držav na ozemlju današnje Sirije in Palestine. Politična vloga templjarskega reda je bila prav tako ogromna. Po letu 1170 je bila kraljeva oblast v Jeruzalemu tako šibka, da je začel veliki templjarski mojster po svoje upravljati križarske države in se pri tem nemalokrat povezal s Saraceni. V 13. stoletju so podpirali velikaše v boju proti jeruzalemskemu kralju in so bili praktično resnični

gospodarji križarskega vzhoda.

Propad križarskih držav je potegnil leta 1291 v svoj vrhunec tudi templjarski red. Pojavljale so se obtožbe na račun ošabnosti, nadutosti, skoposti, neizmernem bogastvu, vsemu temu so svetovalci francoskega kralja *Filipa IV Lepega* dodali še neutemeljene obtožbe o hereziji in čarovništvu in tako oktobra 1307 templjarski red dokončno uničili. Papež *Klement V* je leta 1312 na koncilu v mestu Vienne red ukinil in mu v imenu Francije zaplenil vse premoženje. Veliki mojster templjarskega reda *Jacques de Molay* je 18. marca 1314 umrl na grmadi, pred tem pa preklel svoje sodnike, in tako sta nekaj mesecev za njim umrla tudi *Filip IV Lepi* in njegov sokrivec papež *Klement V*.

S tem pa templjarskega reda ni bilo konec. Res so ga upravno ukinili, a bivši templjarji so se skrivoma organizirali naprej. Imena skrivnih velikih mojstrov lahko sledimo tja do XVIII. stoletja. Poleg tega so templjarska in podobne srednjeveške organizacije prednice prostozidarjev, katerih zveza obstaja še danes in imajo podobna organizacijska pravila, kot so jih nekoč imeli templjarji.

Templjarji so imeli svoj razpoznavni znak v obliki, ki jo boš videl, če rešiš naslednjo uganko – gobelin. Nižji bratje so imeli bel znak našit na črnih plaščih, rdečega na belih plaščih pa so lahko nosili le visoki dostojanstveniki in vitezi templjarskega reda.

												1	2		2	1								
				5	5	6						4	2		2	4					6	5	5	
				5	3	1	6	7	5	4	2	3	2	4	5	7	6	1	3	5			
				5	5	6	6	7	5	1	2	3	2	1	5	7	6	6	5	5			
	5	5	5																				
	5	3	5																				
	6	1	6																				
		6	6																				
		7	7																				
		5	5																				
1	4	4	1																				
2	2	2	2																				
		3	3																				
2	2	2	2																				
1	4	4	1																				
		5	5																				
		7	7																				
		6	6																				
	6	1	6																				
	5	3	5																				
	5	5	5																				

3. NALOGA: PREKLETI KRALJI

V začetku štirinajstega stoletja je *Filip IV*, kralj legendarne lepote, vladal nad Francijo kot neomejen gospodar. Premagal je bojevito ošabnost visokih velikašev, premagal uporne Flamce, Angleže v Akvitaniji, celo papeža s silo preselil v Avignon, si podredil parlamente in koncile. S tremi polnoletnimi sinovi mu je bilo zagotovljeno nasledstvo, njegova hči je bila poročena z angleškim kraljem *Edvardom II* in med njegovimi vazali je bilo še šest drugih kraljev. Nobeno bogastvo ni ušlo njegovi roki, obdavčil je cerkvene posesti, oropal Jude, udaril po družbah lombardskih bankirjev. Davki so bili neznosni, gospodarske krize so povzročale propade in pomanjkanje, oboje pa je spet porajalo nemire, ki jih je kralj zatiral v krvi. Vse se je moralo ukloniti pred njegovo oblastjo. A v glavi tega mirnega in grozovitega vladarja je živela narodna misel, zanj so bili državni razlogi močnejši od vseh drugih. Prvi francoski kralj, ki je združil Francijo v eno državo, je doživel veličino Francije, Francozi pa so bili nesrečni. Ena sama oblast se je upala postaviti po robu: neodvisni viteški red templjarjev, močna vojaška, verska in finančna organizacija, ki se je rodila za križarske vojne in je v njih žela slavo in bogastvo. Neodvisnost in bogastvo templjarjev sta bila trna v kraljevi peti. Zoper nje je skoval največji pravosodni proces, kar jih pozna zgodovina, saj je bilo vanj vpletenih skoraj petnajst tisoč obtožencev, trajal pa je sedem let. Po sedmih letih so na grmado obsodili templjarskega velikega mojstra *Jacquesa de Molaya* in to je bil konec templjarske organizacije (čeprav je po nekaterih virih skrivoma delovala še nekaj stoletij). *Jacques de Molay* je na grmadi preklel kralja in ves njegov rod. In glej, *Filip IV* je umrl 29. 11. 1314, zadet od kapi, le nekaj mesecev za svojim nasprotnikom templjarjem. Ob njegovem grobu v opatiji Saint-Denis so stali njegovi trije sinovi, vsi trije po milosti usode bodoči francoski kralji, poslednji iz neposredne veje Capetingov, kajti nihče izmed njih ni zapustil moških potomcev. Templjarjeva kletev se je tako uresničila leta 1328, ko je umrl zadnji izmed teh treh nesrečnih kraljev. Ti pa ugotovi, kako jim je bilo ime, kakšne vzdevke jim je dalo ljudstvo, kdaj so vladali in s kom so bili poročeni.

1. Eden izmed treh sinov je bil poročen enkrat, eden dvakrat in eden trikrat.
2. Trije zaporedni kralji so bili: *Filip IV Lepi*, kralj z vzdevkom Prepirljivec in kralj, ki je vladal od leta 1316 do 1322.
3. Trije zaporedni kralji so bili: *Louis X*, kralj z vzdevkom Dolgi in kralj, ki je bil trikrat poročen.
4. Prve žene vseh treh bratov so bile burgundske princese in so bile med seboj v sorodu: dve sestri (*Jeanne* in *Blanche de Bourgogne*) in njuna sestrična (*Margarete de Bourgogne*), s katero je bil poročen prestolonaslednik *Filipa IV Lepega*.
5. Med dvema *Filipoma* je vladal natanko en kralj.
6. Druga žena kralja, ki je vladal v letih od leta 1314 do 1316 je bila mlada neapeljska princesa *Clemence de Hongrie*, ki je pustila svojo sončno Campagno in po hudem neurju v Ligurskem morju, kjer je zgubila vso svojo doto in si komaj rešila življenje, prispela v neprijazno, obubožano in lačno Francijo, da se je v nekem lovskem dvorcu brez razkošja in na hitro poročila s človekom, ki ga nikoli prej ni srečala, francoskim kraljem. In povrhu vsega je bila kraljica le kratek čas, kajti dobro leto po njeni poroki je njen mož umrl, njen sin, *Jean I Postumus*, ki se je rodil pet mesecev po očetovi smrti, pa je umrl nekaj dni po porodu.

7. Tretja žena najmlajšega izmed bratov, ki je imel enak vzdevek kot njegov oče, je bila njegova lastna sestrična *Jeanne d'Eure*, hči brata *Filipa IV Lepega*, *Louisa d'Eure*.
8. *Charles IV* se je od prve žene razvezal, da se je lahko poročil z *Marie de Louxembourg*, ki pa je (skupaj z otrokom) umrla na porodu.
9. Vse tri burgundske princese so bile obsojene zaradi prešuštva, *Margareta* in *Blanche* sta bili zaprti na gradu Gaillard, mogočni prastari utrdbi, ki jo je zgradil že *Richard Levjesrčni*, angleški kralj, *Jeanne* pa v gradu Dourdan. Kaj se je nato zgodilo z njimi? Ko je najstarejši brat postal francoski kralj, je ukazal svojo ženo umoriti. Srednji brat je ženi odpustil in jo sprejel nazaj, še preden je postal kralj, najmlajši brat pa je, ko je dobil prestol, prosil Vatikan za razvezo od *Blanche* in jo tudi dobil.

Tako se je končala vladavina neposredne veje *Capetingov*, kraljev, ki so svoje moške prednike lahko neposredno sledili do *Huguesa Capeta*. Po smrti zadnjega izmed treh bratov je na oblast prišla valoiška veja rodovine s *Filipom VI*, sinom brata *Filipa IV Lepega*, *Charlesa de Valoisa*, katerega druga žena pa je bila *Blanche de Navarre*, hčerka *Jeanne II de Navarre*, ki je bila hči *Margarete de Bourgogne* in *Louisa X* in za katero se ni nikoli ugotovilo, ali je bil kralj v resnici njen oče, zato ga tudi ni smela naslediti na prestolu Francije.

4. NALOGA: DINASTIJA CAPETINGOV

Poslednje kralje izmed *Capetingov* si že spoznal v prejšnji nalogi, v celotni dinastiji *Capetingov* pa je bilo vsega skupaj 14 kraljev. Vladavina *Capetingov* se je začela leta 987, ko je bil *Hugues Capet* izvoljen za francoskega kralja, ker ni bilo nobenega direktnega dediča karolinške dinastije več (ta je izhajala od *Karla Velikega*, od tod ime *Karolingi*). *Capetingi* so nato skozi trinajst generacij vedno imeli dediče, vse do kralja *Charlesa IV Lepega*, ki je umrl brez prestolonaslednika in je bil zadnji capetinški kralj. Capetinška dinastija je pomenila za tedanjo Francijo močno in trdno oblast. Ti kralji so prvič poenotili vse do tedaj razpršene francoske državice v eno samo veliko državo, omejili so oblast fevdalcev in vpeljali prvo obliko parlamenta. V času njihovega vladanja so v Evropi potekale križarske vojne in *Capetingi* so se znašli med voditelji mnogih križarskih pohodov. Njihovi vazali niso bili samo francoski velikaši, temveč tudi kralji, angleški, neapeljski, orgski kralj. A s smrtjo zadnjega izmed njih leta 1328 se je njihova dinastija po skoraj štiristo letih končala in na prestol Francije je prišla *Valoiška* rodbina.

Ugotovi imena desetih, tebi še neznanih capetinških kraljev (iz seznama *Capetingov* je izpuščen prvi kralj, *Hugues Capet*, pa tudi zadnji trije, ki si jih spoznal v prejšnji nalogi), njihove vzdevke in letnice rojstva in smrti, če veš:

1. Med desetimi *Capetingi* so prvi štirje *Filipi*, štirje *Louisi* (od *VI* do *IX*), *Henrik I* in *Robert II*.
2. Deset zaporednih kraljev:
   - *Robert II*
   - kralj brez vzdevka
   - eden izmed obeh kraljev z istim imenom in vzdevkom
   - prvi izmed *Louisov*

- kralj z vzdevkom *Mlajši*
- *Filip II*
- kralj, ki je živel v letih od 1187 do 1226
- svetniški kralj z vzdevkom *Sveti*
- *Filip III*
- kralj, ki je živel v letih od 1268 do 1314

3. Deset zaporednih kraljev:
   - kralj z vzdevkom *Pobožni*
   - eden izmed obeh kraljev, katerega ime se pojavi samo enkrat
   - *Filip I*
   - kralj, ki je živel v letih od 1081 do 1137
   - kralj z istim imenom kot njegov oče, vnuk in pravnuk
   - kralj z vzdevkom *Avgust*
   - kralj z vzdevkom *Lev*
   - kralj, ki je živel v letih od 1214 do 1270
   - kralj z vzdevkom *Pogumni*
   - kralj z istim imenom in vzdevkom kot njegov pra-pra-pra-pra-praded
4. Edini vzdevek, ki se pojavi dvakrat, je *Lepi*, ostali vzdevki se pojavijo samo enkrat. Eden izmed vzdevkov je *Debeli*.
5. *Capetov* sin je živel v letih od 970 do 1031, vnuk v letih od 1008 do 1060 in pravnuk od 1052 do 1108.
6. Eden izmed *Louisov* je živel v letih od 1121 do 1180, dva izmed *Filipov* pa od 1165 do 1223 in od 1245 do 1285.

5. NALOGA: SIMBOLI FRANCOSKEGA KRALJESTVA

Ker se že skozi večino nalog ukvarjamo s francoskimi kralji, si oglejmo še simbole tega velikega in močnega kraljestva iz časa *Capetingov*. V nalogi – razpredelnici poišči pet gesel iz po treh besed, ki predstavljajo razne simbole.

1. Prve besede gesel so: 'droit', 'fleur', 'l'Ile', 'main' in 'roi', druga beseda je štirikrat 'de' in enkrat 'au', tretje besede pa so 'ban', 'chapeau', 'France', 'justice' in 'lys'.
2. Gesla predstavljajo kraljevo posest, pravico velikašev, simbol francoskega kralja, simbol pravice in vzdevek *Huguesa Capeta*.
3. Prva beseda gesla, ki predstavlja simbol pravice, je 'main'.
4. Druga beseda gesla, ki predstavlja simbol francoskega kralja, je 'de'.
5. V geslu s prvo besedo 'l'Ile' je tretja beseda 'France', vendar druga beseda v tem geslu ni 'au' in geslo ne predstavlja pravice velikašev.
6. Druga beseda v geslu, ki predstavlja pravico velikašev, ni 'au'.
7. Druga in tretja beseda nekega gesla sta 'de' in 'justice', prva beseda tega gesla pa ni 'droit'.

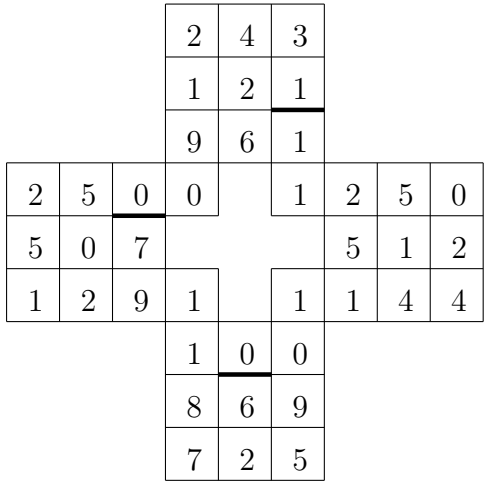
8. Geslo, ki predstavlja kraljevo posest, se ne začne z 'roi' in ne konča s 'chapeau'. Ti dve besedi sta prva in tretja beseda istega gesla.
9. Geslo, ki predstavlja simbol francoskega kralja, se ne začne z 'droit' in se konča z 'lys'. Druga beseda gesla, ki se začne z 'droit', ni 'au'.
10. Geslo, ki predstavlja vzdevek *Huguesa Capeta*, je edino geslo, ki ima drugo besedo različno od drugih gesel.

In kaj pomenijo tako dobljena gesla? Tega pa ti tu ne povem! Če te zanima, najprej reši nalogo, nato pa preveri rezultate v rešitvah, kjer boš našel tudi nekaj zapisanega o vsakem izmed gesel.

Rešitve nalog

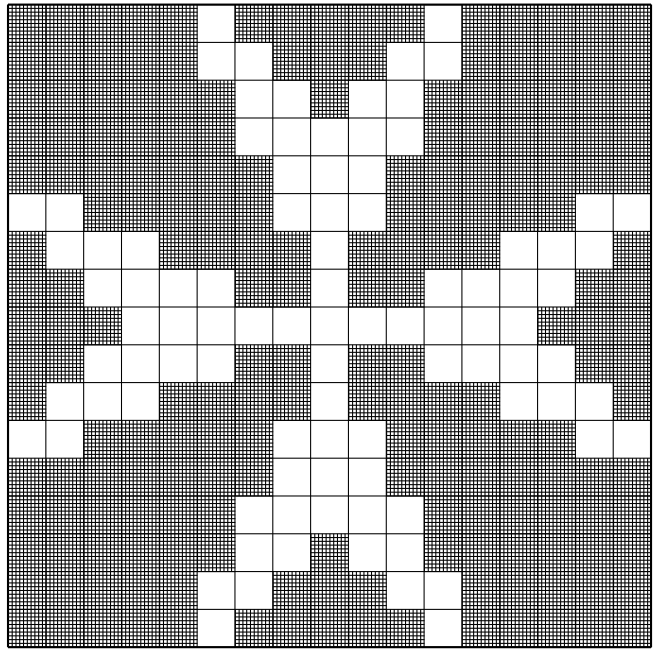
1. Križarske vojne

Številska križanka



2. Templjarski viteški red

Rešitev gobelina je templjarski štirikotni križ na osem rogljev.



3. Prekleti kralji

Preglednica poslednjih Capetingov:

Kralj	Vladal	Poročen z
Filip IV Lepi	1286 – 1314	
Louis X Prepirljivec	1314 – 1316	1. Margarete de Bourgogne 2. Clemence de Hongrie
Filip V Dolgi	1316 – 1322	1. Jeanne de Bourgogne
Charles IV Lepi	1322 – 1328	1. Blanche de Bourgogne 2. Marie de Louxembourg 3. Jeanne d'Eure

4. Dinastija Capetingov

Preglednica Capetingov (rešitev naloge so kralji od 2 do 11):

	Ime	Vzdevek	Živel:
1	Hugues Capet	/	938 – 996
2	Robert II.	Pobožni	970 – 1031
3	Henrik I.	/	1008 – 1060
4	Filip I.	Lepi	1052 – 1108
5	Louis VI.	Debeli	1081 – 1137
6	Louis VII.	Mlajši	1121 – 1180
7	Filip II.	Avgust	1165 – 1223
8	Louis VIII.	Lev	1187 – 1226
9	Louis IX.	Sveti	1214 – 1270
10	Filip III.	Pogumni	1245 – 1285
11	Filip IV.	Lepi	1268 – 1314
12	Louis X.	Prepirljivec	1289 – 1316
13	Filip V.	Dolgi	1294 – 1322
14	Charles IV.	Lepi	1295 – 1328

5. Simboli francoskega kraljestva

Simbol	Geslo v francoščini	Geslo v slovenščini
simbol francoskega kralja	fleur de lys	lilijin cvet
simbol pravice	main de justice	roka pravice
kraljeva posest	l'Ile de France	pokrajina v Franciji
vzdevek Huguesa Capeta	roi au chapeau	dobesedno: kralj s klobukom
pravica velikašev	droit de ban	pravica sklica

Lilijin cvet je bil simbol francoskega kralja od vsega začetka kraljevine. Francoska krona v času *Capetingov* je imela vdelanih osem lilijinih cvetov iz draguljev, ravno tak lilijin cvet pa je bil vdelan v žezlo, ki ga je kralj ob kronanju v Reimsu držal v desni roki. V levi roki je ob tem držal 'roko pravice', slonokoščeno dlan z iztegnjenimi palcem, kazalcem in sredincem, prstanec in mezinec pa sta bila skrčena. Trije iztegnjeni prsti so ponazarjali Sveto trojico in opominjali, da je kralj oblast dobil od Boga. Ob kronanju so kralja tudi mazilili s svetim oljem, ki naj bi prišlo z neba in ki je zagotavljalo, da je kralj po božji volji prejel oblast nad celotno državo in s tem nadaljeval linijo vladarjev, ki naj bi segala vse do Salomona.

Kraljeva oblast je bila dedna, podedoval jo je vedno najstarejši kraljevi sin. Ko je karolinška dinastija ob koncu 10. stoletja ostala brez dedičev, je prišlo do prevrata in *Hugues Capet*, vodja prevrata, se je pustil izvoliti za kralja, od tod tudi vzdevek "le roi au chapeau". Kronan je bil leta 987. V času njegovega kronanja je bila Francija razdrobljena na posestva, na katerih so živeli velikaši in se kar naprej bojevali med seboj. V zvezi s tem je bila tudi njihova pravica sklicevanja vojske – 'droit de ban'. Vsak velikaš je lahko po mili volji skliceval svoje podložnike za vojno proti kateremukoli drugemu velikašu, s katerim je bil v sporu in šele *Filip IV Lepi* je to pravico velikašev ukinil in odredil, da lahko vojsko sklicuje le kralj. Velikaši so imeli tudi pravico do kovanja lastnega denarja, kar je povzročalo neverjetno zmedo v trgovinskih poslih, na račun katere so bogateli tuji,

predvsem italijanski trgovci – Lombardi, ki so imeli v večjih francoskih mestih podružnice bank iz svojih domačih mest (predvsem Firenz, Siene in Pise). Pravico velikašev do kovanja denarja je ravno tako ukinil šele *Filip IV* in tekom njegove vladavine je denar lahko koval le kralj, kar je pripomoglo k lažjem finančnem poslovanju in stabilnejšem gospodarstvu.

Ob *Capetovem* kronanju je bila vsa kraljeva posest le l'Ile de France, pokrajina v okolici Pariza, tedaj le majhnega pristanišča na Seini (celoten Pariz je bil tedaj le naselje na otočku sredi Seine – Ile de la Cite) in *Capet* je bil prvi kralj, ki je postavil Pariz za svojo prestolnico, ki se je pod *Capetingi* začela bolj in bolj razvijati v veliko mesto. V Parizu še dandanes stojijo mnoge stavbe, zgrajene v času *Capetingov*, npr. Sainte-Chapelle, ki je bila zgrajena v letih od 1245 do 1248 pod vladavino *Louisa IX Svetega*, ki je hotel v tej cerkvi spraviti dragocene relikvije, ki jih je prinesel s svojega križarskega pohoda (trn iz Kristusove trnove krone in košček križa). Tudi najbolj znana pariška cerkev, katedrala Notre-Dame, je bila zgrajena v tem času. Leta 1160 je *Louis VII Mlajši* položil temeljni kamen, dokončana pa je bila leta 1250 pod *Louisom IX Svetim*.

Literatura

[1] G. Tate, *Križarji in svet vzhoda*, zbirka Mejniki, DZS, Ljubljana, 1994.
[2] J. Alter, *The French Page*, http://philae.sas.upenn.edu/French/french.html, 1994.
[3] M. Druon, *Prekleti kralji*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1993.
[4] D. Reid, H. Churchyard, *Royal Genealogies*, http://ftp.cac.psu.edu/~saw/royal/royalgen.html, 1995.

Urška Demšar

GOBELINI

Bil je ponedeljkov popoldan. Kot ponavadi smo imeli šesto uro logiko. Toda ta ponedeljkova šesta ura je bila nekaj posebnega. Tovariš Cokan nam je dejal, da bomo šli v računalniško učilnico. Z novim programom tovariša Bižala bi sestavljali gobeline.

Program se je imenoval *protect*. Tovariša sta nam nastavila program, mi pa smo morali vpisati višino ter širino gobelina. Z miško smo narisali neko sliko. Ko smo končali, smo pritisnili srednji gumb na miški in napisali ime datoteke. Tako smo prišli v program *gobelin2*. Tu še enkrat napišeš ime datoteke. Če je gobelin lažji, ga računalnik reši takoj, za težjega pa potrebuje več časa. Nekateri gobelini imajo več rešitev. To ugotoviš tako, da pritisneš gumb *enter* (če je rešitev več, program najde drugo in tako naprej). Gobelini z več rešitvami niso dobri za reševanje.

Nekateri poskusijo brez računalnikov sestaviti gobeline. Tudi meni je enega uspelo sestaviti doma. Najprej sem narisala sliko in na rob vpisala številke. Potem sem narisala še mrežo. Začela sem z reševanjem. Dobila sem rešitev in vedela sem, da je gobelin dober za reševanje. Gobeline torej lahko sestavljamo z računalniki ali brez njih.

Tea Plot

Januarja lani sem kot predavatelj prvič sodeloval na učiteljskem seminarju iz logike. Prvo izvedbo smo imeli v Gornji Radgoni, kjer je ravnatelj tamkajšnje osnovne šole, gospod Dušan Zagorc, omenil nov tip logičnih nalog, katerega do tedaj še nisem poznal. To so bili *gobelini*. Tedaj so gobeline že objavljali v *Salomonovem Vandrovcu*.

Iz pripovedovanja gospoda Zagorca mi je bilo takoj jasno, da gre za nekaj zelo zanimivega. Gobelini so se nato pojavili v reviji *Logika in razvedrilna matematika* in končno na tekmovanjih iz razvedrilne matematike in logike. Tako so te naloge postale aktualne tudi za interesno dejavnost v šoli.

Za letošnji del učiteljskega seminarja je bila predvidena tudi predstavitev sestavljanja in reševanja logičnih nalog z računalnikom. K sodelovanju sem povabil kolega programerja Sandija Bižala in mu predlagal, naj med drugim napiše tudi programa za sestavljanje in reševanje gobelinov. Kolega Bižal je kasneje odstopil od sodelovanja v projektu izobraževanja učiteljev, dovolil pa mi je, da uporabljam njegove programe.

Tako sem se odločil nagovoriti svoje učence ne le k reševanju, marveč tudi k sestavljanju nalog. V dobrem tednu so Tea Plot, Romana in Katja Žagar, Magda Bojc, Nataša Ješelnik, Stanka Kure, Blaž Mikuž, Lana Šertelj in Valentina Miloševič sestavili okoli sto gobelinov, izmed katerih je bilo 43 enolično rešljivih in tako primernih za ročno reševanje.

Računalniška kontrola rešljivosti je bila gotova v nekaj dneh, analitična pa je trajala precej dlje, saj sem najtežje gobeline na roko reševal tudi po več ur. Vendar pa mi je uspelo vse rešiti in tako lahko v svojem imenu zagotovim, da so naloge primerne za reševanje.

Zahvaljujem se učencem za njihovo prizadevnost pri tem delu, še posebej pa želim pohvaliti skupino otrok iz Štalcerjev, ki so prispevali največ, čeprav so vozači in zato časovno vezani na vozni red šolskih avtobusov.

Tomaž Cokan, dipl. ing., mentor

Objavljamo 11 gobelinov. Avtorica gobelinov pod številkami 4, 6, 10 in 11 je Romana Žagar, avtorica drugih gobelinov pa je Tea Plot. Gobelini pod številkami 5, 6, 7, 8, 10 in 11 so rotirani. Analitični pregled vseh gobelinov je opravil mentor Tomaž Cokan, računalniškega pa Sandi Bižal.

1.

	8	1 1 1	5 1 1	3 4 1	3 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1	2 1 1 1	3 8	13	3	2
2,2															
9															
4,2															
1,1															
1,3,3															
1,3															
2,2															
1,4,3															
1,1,2															
13															
1,2															
1,2															
1,2															
1,2															
13															

2.

	2	3	4	1 1 3	1 1 1 1	1 1 4	2 7	1 7	1 1 1 1	1 1 3	4	3	2
1													
9													
2,2													
3,3													
13													
2													
2													
7													
1,3,1													
7													
3													

3.

	9	2 3	2 2 1	6 1	2 1	6 1	1 1 1	1 2 1	1 5	1
10										
6										
1,1,1										
1,1,1										
1,1,1,2										
1,2,4										
3,1										
2,1										
9										

4.

	3	4 1 1	1 1 1 1	1 3 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 3 1	1 1 1 1	4 1 1	1 1	1 1	1 1	3
9														
1,1														
1,1														
9														
1,1														
14														
1,1														
14														

5.

	30	32	32	40	22	2662	211912	261162	2112	38
1										
1										
8										
8										
2,1										
1,1,1										
1,1,3,1										
2,1,1,1,1										
1,1,1,1,1										
1,1,1,1,1										
1,1,1,1,1										
1,1,3,1										
1,1,1										
1,1,1										
1,1,4										
1,1,1,1										
1,1,1,1										
1,1,1,1										
1,1,1,1										
1,1,1,1										
1,1,1,1										
1,1,1,1										
1,1,4										
1,1,1										
1,1,1										
1,1,1										
1,1,1										
1,1,3,1										
1,1,1,1,1										
1,1,1,1,1										
1,1,1,1,1										
1,1,1,1,1										
1,1,3,1										
1,1,1										
1,1,1										
1,1,1										
1,1,1										
1,1,1										
9										
8										

6.

	12	37	1161	3161	3161	3161	36	36	36	36	34	32	11
1													
1,9													
2,10													
1,9													
1													
3													
9													
10													
13													
12													
10													
9													
1													
4													

7.

	10	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{3}$	40	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{5}\frac{5}{1}$	$\frac{1}{1}\frac{1}{1}\frac{1}{1}$	$\frac{1}{5}\frac{8}{5}\frac{5}{1}$	$\frac{1}{1}\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}\frac{1}{1}$	34
1																	
1																	
1																	
11																	
3,1																	
3,1																	
1,1,1																	
2,1,1																	
1,1,3,1																	
2,1,1,1,1																	
1,1,1,1,1																	
1,1,1,1,1																	
2,1,3,1																	
1,1,1																	
2,1,1																	
1,1,5																	
1,1,1,1																	
2,1,1,1																	
1,1,1,1																	
1,1,1,1																	
1,1,1,1																	
1,1,1,1																	
1,1,5																	
1,1,1																	
1,1,1																	
1,1,1																	
1,1,1																	
2,1,3,1																	
3,1,1,1,1																	
2,1,1,1,1																	
2,1,1,1,1																	
1,1,3,1																	
2,1,1																	
1,1,1																	
2,1,1																	
1,1,1																	
12																	
3																	
3																	
1																	

8.

	8	27	36	351	271	252	22	23	2	12	422	2831	261	221	121	372	14
2																	
4																	
1,2																	
2,1,3																	
1,1,5																	
1,1,2,1																	
1,1,1,1																	
2,1,1,1																	
1,1,2,1																	
1,1,1,1																	
1,1,1,1,2																	
1,3,1,1,3																	
1,3,1,6																	
1,3,1,3,2																	
2,3,6,2																	
1,3,6,2																	
1,1,1,1,2																	
1,1,2,1																	
1,1,1,1																	
1,1,1,1																	
1,1,1,2																	
1,1,6																	
1,1																	
1,1																	
1,2																	
1,2																	
4																	

9.

	4	4	5	6	12	22	22	25	25	22	22	6	6	4	4
6															
11															
4,4															
4,4															
4,4															
15															
10															
2															
2															
2															

10.

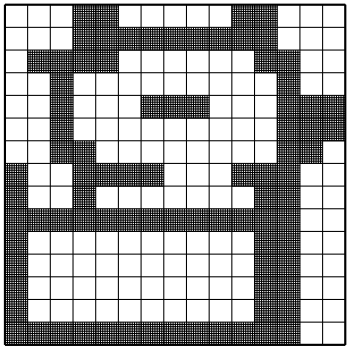
	2	2 2	2 3	5 2	2 1 2	2 1 3	2 1 2	2 1 2	5 2	2 4	2	9 7	24	4 1 5	20
1															
2															
3															
4															
4															
4															
2,1															
13,1															
13,1															
1,1,1,1															
1,1,1,1															
9,1,1															
2,1,3															
2,1,1,1															
2,2,1,1															
2,2,1,1															
3,1,1															
2,1,1															
1,1															
4															
4															
4															
4															
3															
2															
1															

11.

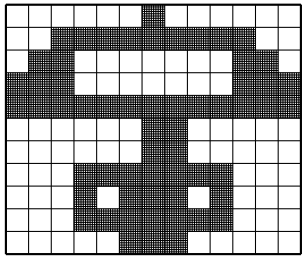
	2 5	2 7	11	12	12	11	2 7	2 5	2	7 2 9	25	23	22	19	17
1															
2															
3															
4															
5															
6															
6															
5															
15															
15															
4,5															
6,5															
8,5															
8,5															
8,5															
8,5															
8,5															
6,5															
4,6															
2,6															
6															
6															
5															
4															
4															
2															
1															

Rešitve

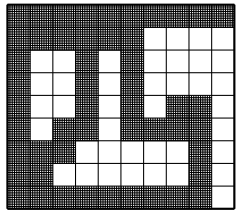
1.



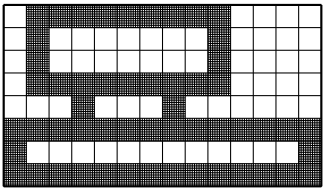
2.



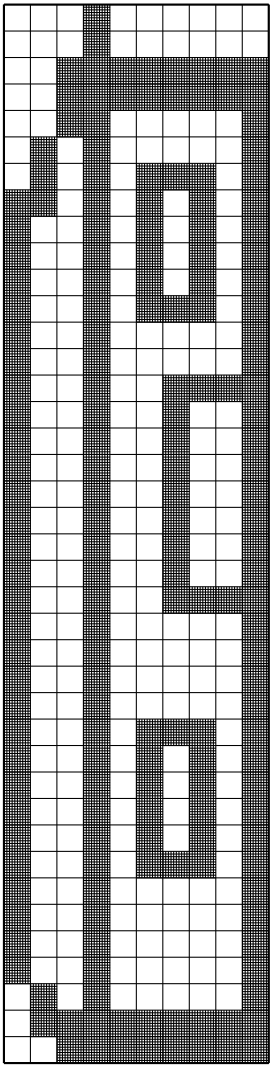
3.



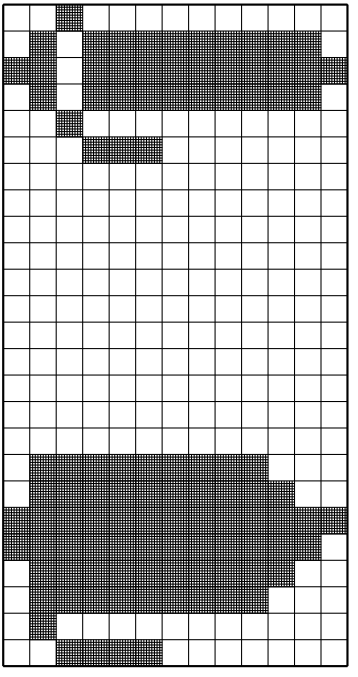
4.



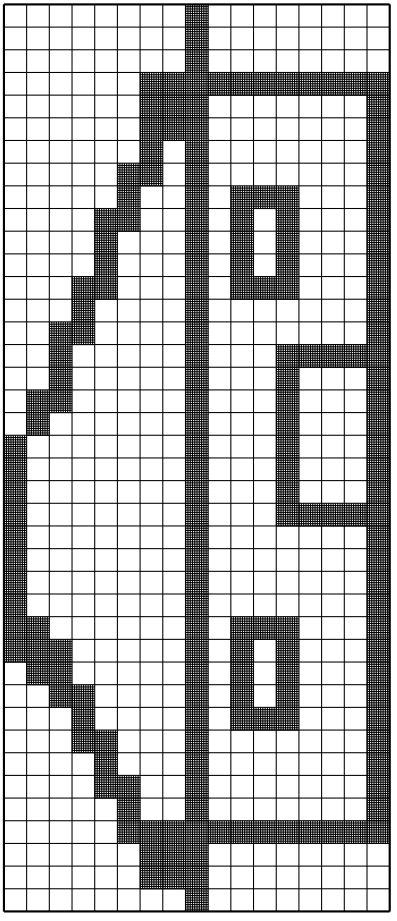
5.



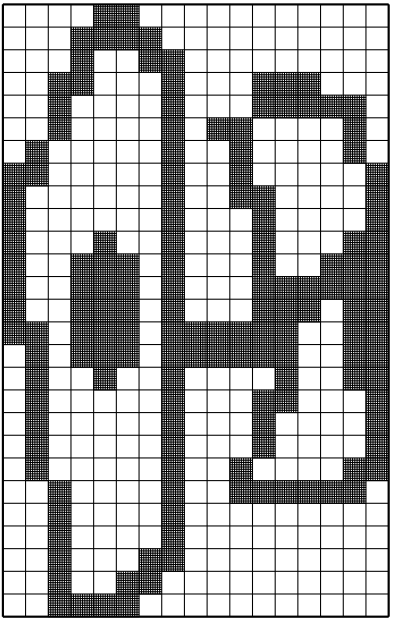
6.



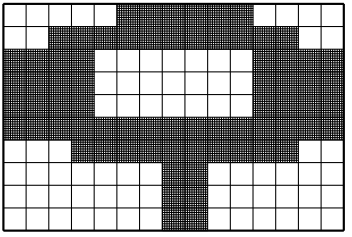
7.



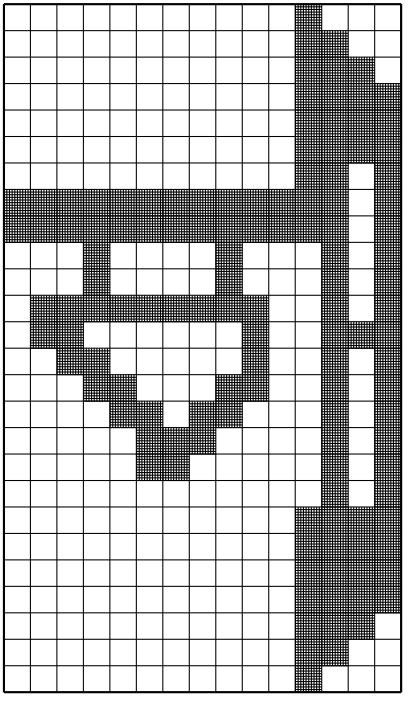
8.



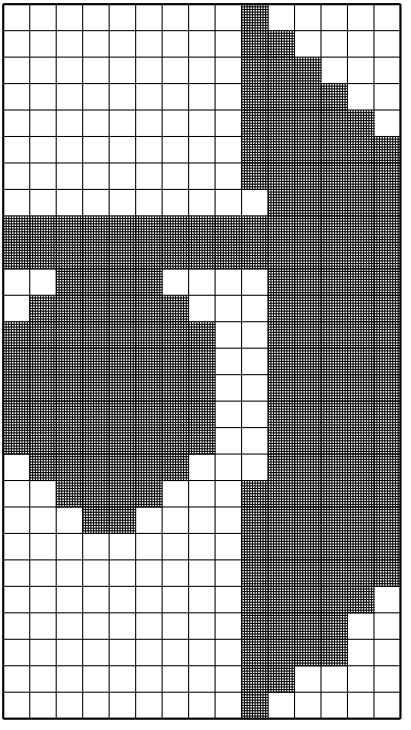
9.



10.



11.



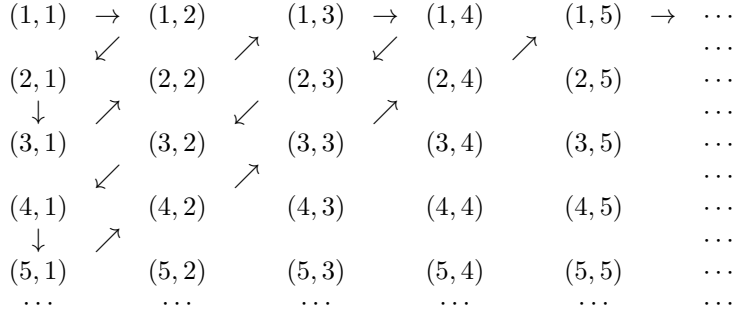
GEORG FERDINAND LUDWIG PHILIPP CANTOR

3. 3. 1845 – 6. 1. 1918



Nihče ne more zanikati velikanskega vpliva Cantorjevega dela na vso matematiko. Obogatil je našo znanost z osnovnimi novimi koncepti, z globokimi rezultati, s premnogimi teorijami, z uspešnimi metodami... Cantorjeva ideja je bila zgraditi celo matematiko na osnovi **teorije množic**. Njegov prispevek je bil tako temeljen in osnoven, da se da glavni koncept razložiti komurkoli in za take teorije je Hilbert na kongresu matematikov v Parizu dejal, da so dovršene. Iz napisanega bomo spoznali, da se globina matematičnih rezultatov ne meri vedno z dolžino teksta in težkostjo dokazov.

Cantor je uvedel pojem *množice* v matematiki. To je bil prvotno nedefiniran pojem. Dejal je, da je množica skupek določenih, odlikovanih predmetov, ki jih zaznamo ali si jih zamislimo in jih obravnavamo kot celoto. Lahko govorimo o množici oseb v določeni sobi ali o množici gosk, ki plavajo v ribniku. Enostavno lahko nadaljujemo ta spisek možnih množic. Množice pa so lahko končne ali neskončne. In **neskončnost** je tista, ki Cantorju ni dala miru. Prvotno je domneval, da morata biti katerikoli dve neskončni množici iste moči. Porabil je dvanajst let, da bi dokazal to domnevo. Nato je v trinajstem letu našel protiprimer. Cantor je uvedel **kardinalno število množice**, kar je posplošitev pojma moči. To je skupna lastnost množic, ki so ekvivalentne med seboj. Množici sta **ekvivalentni**, če med njima obstaja bijekcija. Tako imamo po vrsti najprej končna kardinalna števila: 0 (prazna množica), 1 (singletoni), 2 (dvoelementne množice), 3 (trielementne množice), ..., nato pa še najmanjše neskončno kardinalno število $\aleph_0$ ('alef nič'). Množice kardinalnosti $\aleph_0$ so števne, saj lahko njihove elemente preštejemo. Predstavnik za to kardinalnost so naravna števila in ko preštejemo množico kardinalnosti $\aleph_0$, jo v bistvu postavimo v bijekcijo z naravnimi števili. Cantor je opazoval množice, ki so se zdele prevelike, da bi bile števne, toda potem jih je bil zmožen po nekem pametnem načrtu kljub vsemu prešteti. Preštel je cela števila: 0, 1, -1, 2, -2, 3... Preštel je ulomke s pomočjo sheme na sliki 1 in temu se reče **Cantorjev diagonalni princip**. V bistvu so na *sliki 1* pari naravnih števil, a če bi na začetku dodali 0 in pri vsakem elementu takoj za njim povedali še tistega z negativnim predznakom, sproti pa spuščali že prej omenjene (npr. $(2,2)$, $(3,3)$...), bi prešteli tudi ulomke.



Slika 1

Cantor je s svojim diagonalnim principom ugotovil, da je števna unija števnih množic spet števna. Preštel je tudi končne podmnožice naravnih števil in sicer tako, da je najprej naštel podmnožice, katerih največji element je 1, nato podmnožice, katerih največji element je 2, nato podmnožice, katerih največji element je 3... Vseh podmnožic naravnih števil pa le ni uspel prešteti, kajti na tem mestu je nastal *Cantorjev izrek*:

> Potenčna množica množice A, $\mathcal{P}(A)$, ima večjo kardinalnost od množice A.

A je pri tem katerakoli množica, končna ali pa neskončna. No, za končne množice je ta izrek res popolnoma jasen. Če ima A n elementov, jih ima njena potenčna množica 2^n. Za neskončne množice pa je treba pokazati, da je A ekvivalentna podmnožici $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(A)$ pa ni ekvivalentna nobeni podmnožici množice A. A je res ekvivalentna množici vseh enoelementnih množic iz $\mathcal{P}(A)$. Preostanek pa dokažemo s protislovjem. Če bi bili A in $\mathcal{P}(A)$ ekvivalentni, bi imeli bijekcijo f med njima in tako bi vsakemu elementu $a \in A$ pripadal natanko določen element $f(a) \in \mathcal{P}(A)$. $f(a)$ je v resnici neka množica in če a pripada $f(a)$, potem naj bo a 'dober' element, sicer pa naj bo 'slab'. Potem je množica slabih elementov B tudi v bijekciji z nekim elementom b iz A. Ali je b dober ali slab? Če je dober, mora biti slab in če je slab, mora biti dober, a hkrati oboje biti ne more.

Tako s pomočjo tega izreka dobimo lestvico alefov ($\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$...), neskončno mnogo različnih neskončnih kardinalnih števil. Moč $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ je tako $\aleph_1$, ki je večja od moči $\mathbb{N}$.

Cantor je tudi pokazal, da je **kontinuum** c, to je moč realnih števil, nešteven. V bistvu je pokazal, da že intervala $[0, 1]$ ne moremo prešteti. Zopet s protislovjem, vsa števila s tega intervala zapišemo z neskončnim decimalnim zapisom. Torej ne $0,25$, marveč $0,249999...$ Pa poskusimo prešteti vsa ta števila:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, x_{11}x_{12}x_{13}... \\ x_2 &= 0, x_{21}x_{22}x_{23}... \\ x_3 &= 0, x_{31}x_{32}x_{33}... \\ \cdots &\quad \cdots \end{aligned}$$

Sedaj pa zopet po Cantorjevem diagonalnem principu skonstruiramo število $\alpha = 0, y_1y_2y_3...$, ki ga ni med naštetimi, in sicer je y_i enako 1, če x_{ii} ni 1, ter 2, če je x_{ii} enako 1. Vidimo,

da se število α s številom x_i razlikuje vsaj v i-ti decimalki.

Nadalje je dokazal, da je moč intervala $[0,1]$ enaka moči kvadrata $[0,1]\times[0,1]$. Našel je celo eksplicitno formulo za bijekcijo. Enostavno je decimalke števila iz $[0,1]$ razbil na dva dela tako, da jih je najprej razdelil v molekule in nato je lihe molekule dal v prvo koordinato kvadrata, sode molekule pa v drugo koordinato. V posamezno molekulo je dal prvo neničelno število, npr. $0,0032050078...$ je razbil takole $0,\{003\}\{2\}\{05\}\{007\}\{8\}...$, iz tega pa je dobil par $(0,003058...,0,2007...)$. Iz kvadrata pridemo na interval na podoben način.

Realno število je **algebraično**, če je ničla polinoma s celimi koeficienti, npr. $\sqrt{2}$ je ničla polinoma x^2-2. Števila, ki niso algebraična, se imenujejo **transcendentna**. Cantor je pokazal, da transcendentna števila obstajajo in celo, da jih je neštevno neskončno, torej kontinuum. Preštel je polinome s celimi koeficienti in upošteval, da ima polinom stopnje n največ n ničel. Iz obojega pa sledi, da je algebraičnih števi števno mnogo. Realna števila, katerih je neštevno, razpadejo na disjunktno unijo algebraičnih in transcendentnih števil. Če bi bilo slednjih števno, bi lahko prešteli tudi realna števila. Danes vemo, da sta število π in Eulerjevo število e transcendentni števili, a za dokaz potrebujemo kar precej teorije in papirja.

Fregejev princip, da vsaka lastnost določa neko množico, je povzročil precej paradoksov. Tako je Cantor leta 1897 vzel lastnost 'množica'. Kaj je potem množica vseh množic C? Po Cantorjevem izreku ima $\mathcal{P}(C)$ večjo moč od C, a elementi $\mathcal{P}(C)$ so množice in so vsebovani v C, torej ima C večjo moč od $\mathcal{P}(C)$.

Pozneje je Russell podal svoj paradoks, ki ne vpleta pojma moči. Za množico A je rekel, da je $navadna$, če le-ta ni element same sebe (npr. množica stolov ni stol) in $čudna$, če je element same sebe (po pravici povedano poznam le eno čudno množico, to je množica abstraktnih pojmov). Kaj pa je z Russellovo množico R vseh navadnih množic. Ali je navadna ali čudna, saj vemo, da oboje hkrati ne more biti!?

Še trije zanimivi paradoksi so se pojavili na to temo. Tu je Russelov paradoks o brivcu, ki brije tiste in le tiste, ki se ne brijejo sami. Kdo brije brivca?

V deželi Mannoury ima vsako mesto svojega župana in nobeni dve mesti nimata istega župana. Zakon določa mesto Arcadia, v katerem stanujejo tisti in le tisti župani, ki niso stanovalci mest, katerih župani so. Kje stanuje župan Arcadie?

Pa še starodavna krokodilova dilema, ko reče očetu, da mu vrne otroka tedaj in le tedaj, če oče pravilno ugane, ali bo dobil otroka nazaj. Če bi oče rekel, da bo krokodil otroka vrnil, bi bilo to odvisno le od krokodilove dobre volje. A kaj naj stori krokodil, če oče ugiba, da ne bo dobil otroka nazaj?

Če se brivec brije, potem se ne sme briti (ker brije tiste, ki se ne brijejo sebe). Če pa se brivec ne brije, potem se mora briti (ker brije tiste, ki se ne brijejo sami).

Če župan Arcadie ne stanuje v Arcadii, potem mora po zakonu stanovati v Arcadii. Če pa stanuje v Arcadii, potem je stanovalec mesta, katerega župan je in zato ne sme stanovati v Arcadii.

Če krokodil očetu otroka vrne, se je oče v resnici zlagal in ne bi smel dobiti otroka nazaj. Če pa oče ne dobi otroka nazaj, je pravilno povedal in krokodil bi mu ga moral po

vsej pravici vrniti. (Tu je v resnici krokodil kriknil, ko je o tem razmišljal in otrok mu je padel iz ust.)

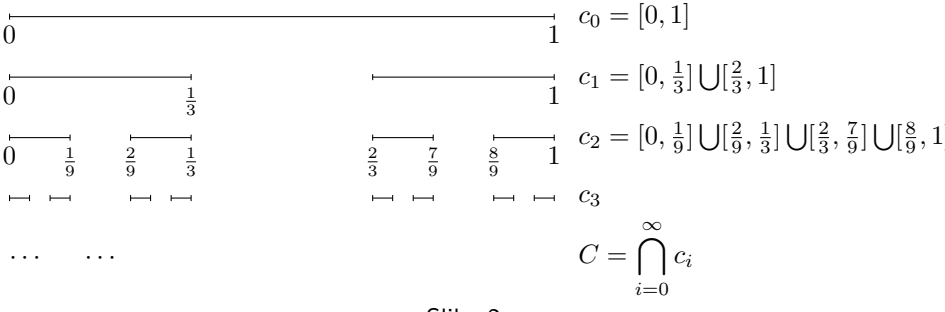
Bolj o teh rečeh razmišljamo, bolj so stvari protislovne. A odgovor nanje je čisto preprost. Ne obstaja množica vseh množic, ne obstaja množica navadnih množic. Takega brivca ni. Zakon v Mannouryju je nedosleden, zato se ga župan Arcadie ne more držati. Za krokodila je nemogoče, da naredi, kar je dejal, da bo naredil. Težava je v Fregejevem neomejenem principu abstrakcije, princip, da vsaka lastnost določa množico. Bil je potreben le majhen popravek, ki ga je naredil Zermelo in to poimenoval omejeni princip abstrakcije. Omejiti se je treba na nek univerzum $\mathcal{U}$ in iz njega jemati elemente z določeno lastnostjo. Tako danes ne govorimo o množici vseh x-ov z določeno lastnostjo, temveč o množici vseh x-ov iz $\mathcal{U}$ s to lastnostjo.

Cantor je postavil znameniti **problem kontinuuma**, ki je še danes odprto vprašanje. In sicer ali je $\aleph_1$ strogo manjše od c in ali je vmes morda še kakšno kardinalno število.

Cantor je postavil temelje splošne topologije. Povejmo nekaj definicij osnovnih topoloških pojmov. Naj bo X množica in τ množica nekaterih podmnožic množice X. Par (X, τ) se imenuje **topološki prostor**, če je presek končnega števila in unija poljubno mnogo množic iz τ spet v τ. Množice iz τ se imenujejo **odprte** množice in vsaka množica iz τ, ki vsebuje točko $x \in X$ se imenuje **okolica** za x. Točka x v topološkem prostoru (X, τ) je **stekališče** množice X, če poljubna okolica točke x vsebuje od x različno točko množice X. Množica, ki vsebuje vsa svoja stekališča, je **zaprta** množica. Če so vse točke množice X stekališča, potem je X **perfektna** množica.

Matematiki osvojijo pojme teorije množic, topologije, že na samem začetku svoje matematične izobrazbe in to ustvari iluzijo, da so ti koncepti vedno bili tu. Toda ne, vse to prihaja od ene same osebe – Georga Cantorja. Njegovi sodobniki ga niso razumeli, niso spoznali veličine njegovega dela in so se mu posmehovali. Za časa svojega življenja ni požel nobene slave, bilo je tragično v vseh pogledih. Šlo je celo tako daleč, da se mu je na koncu zmešalo in je umrl v psihiatrični kliniki v Halleju.

Cantor je skonstruiral Cantorjevo množico. Strogo topološko je to *kompaktna, povsem nepovezana perfektna množica*. Kako pa jo v resnici dobimo, vidimo na *sliki 2*.

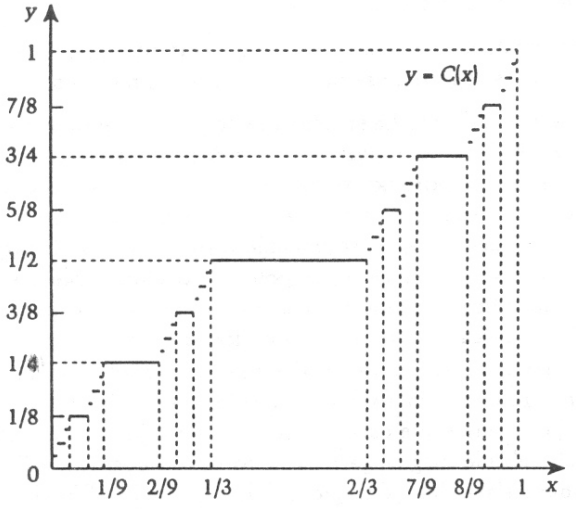


Slika 2

Enotskemu intervalu $[0,1]$ izrežemo srednji interval $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. Ostaneta dva intervala in na njiju naredimo isto operacijo, vsakemu izrežemo srednji del. Dobimo štiri intervale in z vsakim od njih zopet ponovimo postopek. To nadaljujemo v neskončnost. Kaj pa ostane na koncu? Oglišče 0 zagotovo, pa 1, pa $\frac{1}{3}$ pa $\frac{2}{3}$, v bistvu oglišča vseh intervalov, ki smo dobivali, teh ne bomo nikoli izrezali. Ta ostanek se imenuje CANTORJEVA MNOŽICA in je oboje, 'velik' in 'majhen'. Velik zato, ker je teh točk kontinuum. Majhen pa zato, ker imajo vsi tisti intervali, ki smo jih izrezali, skupaj dolžino 1.

Sedaj narišemo funkcijo $C(x)$, ki ji rečemo Cantorjevo stopnišče. Zakaj, verjetno ni potrebno razlagati, *slika 3* pove vse.

Slika 3



Funkcija $C(x)$ je definirana na intervalu $[0,1]$. Na prvem izrezanem intervalu ima vrednost $\frac{1}{2}$, na naslednjih dveh izrezanih intervalih $\frac{1}{4}$ oz. $\frac{3}{4}$. Vrednosti na naslednjih izrezanih intervalih naj bodo $\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{7}{8}$. Tako nadaljujemo. Če bi to funkcijo razširili še na Cantorjevo množico (tam namreč ni definirana), bi to lahko, presenetljivo, naredili zvezno.

Cantorjeve ideje so bile sprejete zelo skeptično, nato s strani mnogih matematikov z občudovanjem. Tu je mnenje enega največjih matematikov Davida Hilberta: *"Mislim, da je Cantorjeva teorija množic najčudovitejši plod matematične misli in resnično eden izmed najpomembnejših človeških intelektualnih procesov."* In nekaj časa pozneje, ko so paradoksi teorije množic potopili mnoge mislece v dvome o njeni pomembnosti, je še dodal: **"Nihče nas ne bo pregnal iz raja, ki nam ga je ustvaril Cantor."**

Literatura:

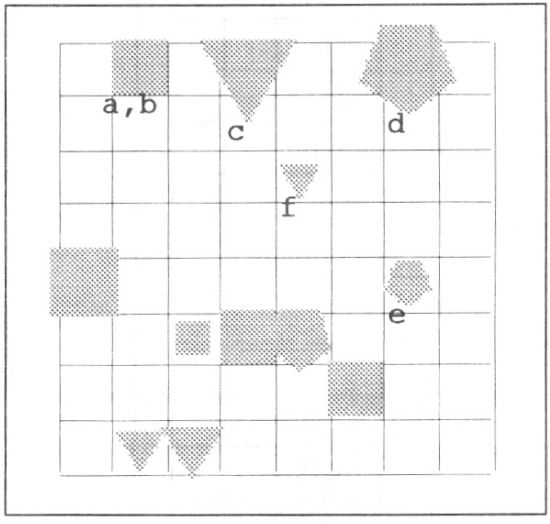
Raymond Smullyan, *Satan, Cantor in neskončnost*
Martin Gardner, *Aha! Pa te imam*
Vladimir Tikhomirov, *Georg Cantor* (revija Quantum)

Katka Kurent

TEKMUJMO V RAZVEDRILNI MATEMATIKI

Naloge za letošnje tekmovanje smo sestavili po zgledu na računalniški program Svet Tarskega (Tarski's World), o katerem smo pisali v prejšnji številki.

Tudi tokrat bo okvir sveta šahovnica z osmimi vrsticami in osmimi stolpci, na katero lahko postavimo (narišemo) like treh oblik: trikotnike, kvadrate in petkotnike. Liki so lahko treh velikosti: majhni, srednji in veliki. Seveda so majhni liki manjši od srednjih, liki srednje velikosti pa so manjši od velikih likov.



Slika desno nam prikazuje eno možno situacijo, ki jo bomo imenovali tudi svet. Ta svet bomo opisali s stavki: Tokrat imamo štiri trikotnike, pet kvadratov in tri petkotnike. Vsaka oblika je tudi zastopana z liki vseh treh velikosti. Če velik lik zaseda neko polje na šahovnici, to je, če je njegovo središče na tem polju, potem na sosednje polje ne moremo postaviti nobenega lika. Ta omejitev ne velja za like srednje in majhne velikosti. Tako vidimo dva lika srednje velikosti, ki zasedata sosednja kvadrata.

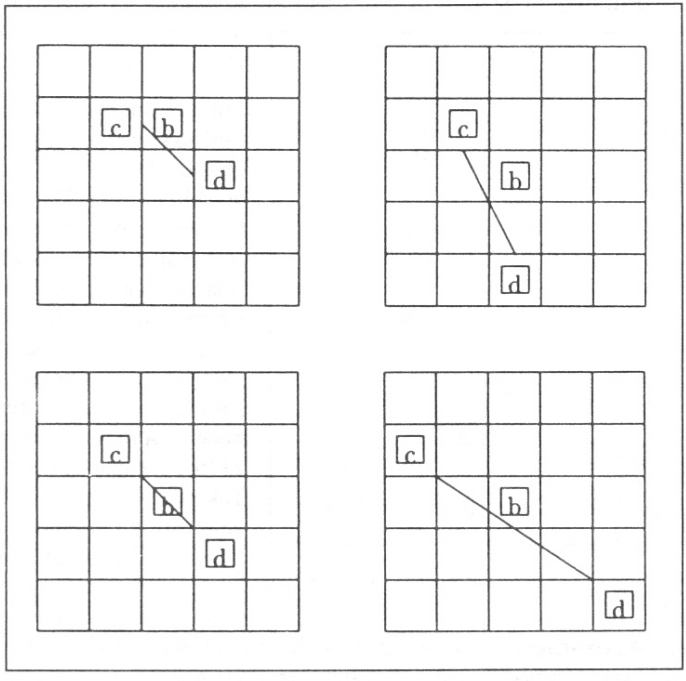
Like lahko tudi imenujemo. Za imena bomo vzeli črke **a, b, c, d, e** in **f**. Imena likov morajo biti različna, lahko pa ima lik več imen, kot vidimo pri zgornjem levem kvadratu. Med liki veljajo tudi nekateri prostorski (oziroma ravninski) odnosi. Tako je lik **a** *levo* od **c**, le-ta pa desno od **b**. Lik **f** je nad likom **e** in pod likom **d**. Rekli bomo, da je neki lik *pod* drugim, če je vrstica, v kateri je prvi lik, pod vrstico, v kateri je drugi lik. Podobno bi lahko definirali odnosa *desno* in *nad*. Nekoliko bolj zapleten pa je odnos, ko za lik trdimo, da je *med* dvema drugima likoma. Na sliki je **c** med **a** in **d**. Prav tako je **f** med **c** in **e** in med **a** in **e**.

Da bi ugotovili, kdaj je neki lik (recimo mu **b**) med dvema likoma (recimo jima **c** in d), se držimo pravila: Povežimo z daljico kvadrata, ki ga zasedata lika **c** in **d** na naslednji način.

- Če ležita **c** in **d** v isti vrstici ali stolpcu, ali če ležita v dveh sosednjih vrsticah ali stolpcih, potegni daljico med središčema stranic pripadajočih kvadratov, ki stojita druga drugi nasproti.
- Če je med **c** in **d** vsaj ena vrstica in vsaj en stolpec, potem poveži z daljico najbljižji oglišči kvadratov, ki ju lika zasedata.

Če kvadrat, ki ga zaseda lik $\mathbf{b}$, seka (to je, ima skupno točko) daljico v neki točki, ki ni krajišče daljice, potem je lik $\mathbf{b}$ med $\mathbf{c}$ in $\mathbf{d}$.

Spodnja ilustracija prikazuje nekaj primerov, ko je lik $\mathbf{b}$ med $\mathbf{c}$ in $\mathbf{d}$.



Zgornji sliki ilustrirata uporabo prve točke (sosednji vrstici ali sosednja stolpca) pravila, spodnji dve pa uporabo druge točke pravila. Na zgornji levi sliki ima kvadrat, na katerem je lik $\mathbf{b}$, samo oglišče skupno z daljico, vendar je $\mathbf{b}$ vseeno med $\mathbf{c}$ in $\mathbf{d}$. Izločitev krajišč daljice preprečuje, da bi bil lik med samim sabo in nekim drugim likom.

Po teh pripravah se lotimo nalog.

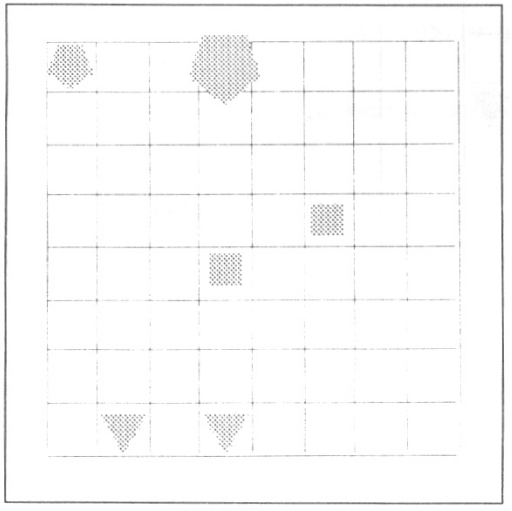
1. V programu Svet Tarskega je možno na okvir postaviti največ 12 teles. Teh omejitev tu ne bomo upoštevali.

a) Največ koliko likov lahko postavimo na okvir?

b) Največ koliko velikih likov lahko postavimo na okvir?

c) Največ koliko likov lahko postavimo na okvir, če moramo postaviti vsaj štiri velike like?

2. Na sliki je svet, v katerem je 6 likov.



a) Zapiši vsaj deset resničnih stavkov.

b) Poimenuj like tako, da bodo naslednji stavki resnični:

1. Lik $\mathbf{b}$ je trikotnik, natanko tedaj, kadar je $\mathbf{c}$ trikotnik.

2. Lik $\mathbf{b}$ je petkotnik, natanko tedaj, kadar je $\mathbf{c}$ petkotnik.

3. Lik $\mathbf{b}$ je kvadrat, natanko tedaj, kadar je $\mathbf{c}$ kvadrat.

4. Lik $\mathbf{a}$ je trikotnik, lik $\mathbf{b}$ pa ni.

5. Če je $\mathbf{a}$ pod $\mathbf{b}$, potem je $\mathbf{b}$ pod $\mathbf{c}$ ali pa je $\mathbf{c}$ pod $\mathbf{b}$.

6. Če je $\mathbf{a}$ levo od $\mathbf{c}$, potem $\mathbf{a}$ ni levo od $\mathbf{b}$.

7. Lik $\mathbf{b}$ je nad $\mathbf{a}$, natanko tedaj, kadar je $\mathbf{c}$ nad $\mathbf{b}$.

3. a) Sestavi svet, v katerem bodo naslednji stavki resnični:

1. Vsak kvadrat je levo od vsakega trikotnika.

2. Vsak majhen kvadrat je nad kakšnim velikim kvadratom.

3. Obstaja kvadrat, ki je pod vsakim trikotnikom.

4. Neki velik kvadrat je pod nekim majhnim kvadratom.

5. Noben lik ni večji od vseh.

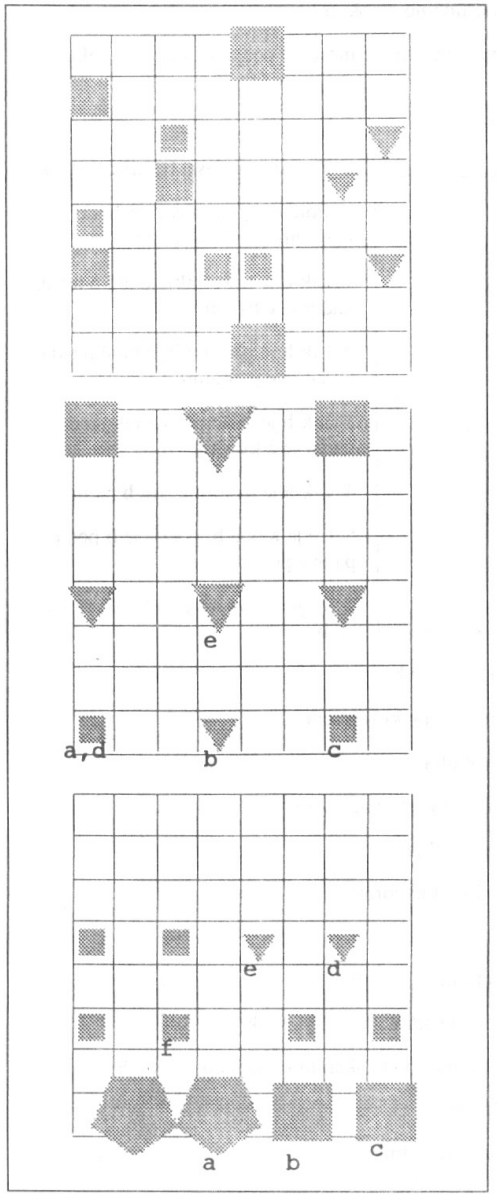
6. Vsak kvadrat, ki je pod vsakim trikotnikom, je velik.

7. Karkoli je desno od kakšnega velikega kvadrata, je majhen lik.

8. Noben lik, ki je nad kakšnim kvadratom in pod kakšnim kvadratom, ni velik.

9. Vsak lik, ki nima nič nad seboj, je kvadrat.

10. Vsak petkotnik je manjši od kakšnega trikotnika.



b) Na levi strani so trije svetovi. Kateri od stavkov iz točke a) so resnični v posameznih svetovih?

Zdaj pa še štiri matematične naloge, ki nam jih je poslal prof. Šefket Arslanagić iz Berlina.

4. Zaporedoma zapisujemo števke $12345678910111213141 5\ldots$ Katera števka se nahaja na 1996. mestu?

5. Dokaži, da je število $2^{1994}+7^{1996}$ sestavljeno. (Naloga za srednješolce.)

6. Dokaži, da je število $1993\cdot 1994\cdot 1995\cdot 1996+1$ popoln kvadrat. (Naloga za srednješolce.)

7. Popolni preostala mesta magičnega kvadrata (pravokotnika).

1996	1992	
1989	1994	

8. Naslednja naloga pa je za maturante in študente. Sestavil jo je S. Rabinowitz. Poišči enolično rešitev kriparitma. (A, B, C, D, E, N in R so različne decimalne števke.)

$$\int_B^A Cx^N\,dx = AREA$$

LOGIKA PO SVETU

V tem sestavku bomo opisali dve publikaciji, opremljeni s programom Tarski's World, za poučevanje in učenje logike v okolju MS WINDOWS ali za računalnike Macintosh. Učiteljem, ki posedujejo eno od teh knjig in ju uporabljajo pri pouku, je na voljo brezplačen priročnik (Instructors Manual), ki vsebuje tudi računalniški program za avtomatsko ocenjevanje dijaških oz. študentskih izdelkov. Obe publikaciji sta napisala Jon Barwise in John Etchemendy. To sta dve izmed 50 knjig s področja logike in informatike, ki jih izdaja Center for the Study of Language and Information, Stanford University.

Knjiga THE LANGUAGE OF FIRST-ORDER LOGIC predstavlja nov pristop k poučevanju logike prvega reda. Uporablja prednosti, ki jih nudi računalniški program, in vešče usklajuje semantične pojme z metodami dokazovanja. Vsebina je razdeljena na enajst poglavij v štirih delih, skupaj 319 strani. Prvi del je posvečen izjavni ali stavčni logiki, drugi del pa logiki kvantifikatorjev. Tretji del vsebuje poglavje o teoriji množic in poglavje o induktivnih definicijah. Četrti del se nanaša na novejša področja logike in vključuje uporabo logike v računalništvu. Posebna vrednost je več sto nalog in problemov, polovica se jih rešuje z računalniškim programom. Knjiga vsebuje zadosti gradiva za enoleten začetni univerzitetni tečaj logike.

Oznaka knjige je ISBN 0-937073-90-3 (pbk.), cena pa po katalogu MK Knjigarne Konzorcij, Slovenska 29, 1000 Ljubljana znaša 27.5 GBP. Preko njih lahko knjigo tudi naročite.

TARSKI'S WORLD je knjiga, ki na 122 straneh podaja uvod v logiko s pomočjo računalniškega programa. Z uporabo tega programa bodo učenci hitro dojeli pomene izjavnih povezav in kvantifikatorjev. V grobem, knjiga vsebuje tiste dele prvo omenjene knjige, ki se nanašajo na Svet Tarskega, to pa je 100 nalog oziroma problemov. Je popoln uvod v logiko prvega reda, vsebuje pa snovi za en semester. Priporočajo jo tistim učiteljem, ki za predavanja uporabljajo kakšno drugo knjigo, ta pa bi bila namenjena za praktični del pouka. Ker pa je knjiga tudi samozadostna, jo je mogoče brez strahu uporabiti pri srednješolskem ali osnovnošolskem tečaju logike.

Oznaka knjige je ISBN 1-881526-28-3 (pbk.), kataloška cena pa znaša 15.5 GBP. H končni ceni je potrebno prišteti še poštnino.