PETI LETNIK — 1995–1996 – 3

DEL REVIJE

LOGIKA

&

RAZVEDRILNA MATEMATIKA

Revijo sta za splet pripravila Nada in Marko Razpet
na podlagi datotek, ki jih je izdelal Darjo Felda.

V S E B I N A

Grozljivka (rešitev na str. 9) 3
Štiri logične naloge 6
Nagradna naloga 8
Učna načrta za izbirni predmet Logika 10
International Mathematical Talent Search 14

Izdaja: Založniško podjetje LOGIKA d.o.o., Svetčeva 11, 61240 Kamnik,
št. žiro računa: $50140 - 603 - 57434$

Za izdajatelja: Izidor Hafner

Revija *Logika & Razvedrilna matematika* je vpisana v register časopisov pri *Ministrstvu za informiranje* pod registrsko številko *949*. Po mnenju *Ministrstva za informiranje* št. *23/89–92* šteje revija *Logika & Razvedrilna matematika* med proizvode informativnega značaja, za katere se plačuje davek od prometa po stopnji 5%.

Revijo *Logika & Razvedrilna matematika* subvencionira *Ministrstvo za šolstvo in šport*

Člani časopisnega sveta: prof. dr. Frane Jerman, prof. dr. Tomaž Pisanski in Darjo Felda, prof.

Strokovni pokrovitelj: Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko – Oddelek za teoretično računalništvo

Glavni in odgovorni urednik: dr. Izidor Hafner

Sodelavci: Urša Demšar, Gregor Dolinar, Urška Drčar, Petra Ipavec, Alenka Kavčič, Dušanka Kocić, Katka Kurent, Meta Lah, Nina Milač, Nika Novak, Hiacinta Pintar, Maja Pohar, Darja Polak, Tanja Soklič, Mirjana Todorovič in Aleš Vavpetič

Jezikovni pregled: računalniški program *Besana*

Generalni sponzor: Marand d.o.o., zastopstvo Borland

Sponzorja: Časopisno podjetje *Dnevnik*, NIL d.o.o.

Tisk: Tiskarna "Planprint", Rožna dolina c. IV/32–36, Ljubljana

Ilustrirala: Ana Hafner

Naklada: 2300 izvodov

© 1996 LOGIKA d.o.o.

ISSN $0354 - 0359$

LOGIKA & RAZVEDRILNA MATEMATIKA
letnik V, št. 3, $1995/96$

Cena revije: v prosti prodaji 330 SIT, za naročnike 295 SIT in vključuje 5% prometni davek

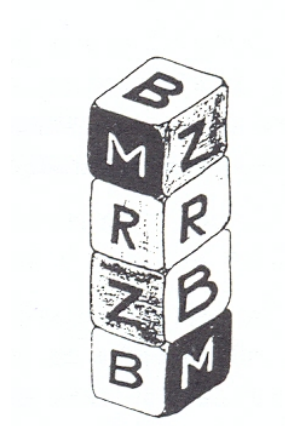
GROZLJIVKA

Grozljivka, ta v literaturi, filmu in še kje sicer dokaj priljubljeni žanr, v matematiki uradno še zmeraj nekako nima svojega mesta. Pa vendar v resnici marsikdo ob spopadu z matematiko doživlja predvsem – o, groza – prav grozo. In morda bo treba prej ali slej tej "krivici" napraviti konec. Tako vam že tokrat ponujamo igro, kjer ne želimo ničesar prikrivati ali olepševati. To bo namreč prava *Grozljivka*!

Zanjo potrebujete štiri enako velike kocke. Vsaka ploskev naj bo obarvana z eno od štirih barv – belo, modro, rdeče ali zeleno, pri čemer se naj pojavi na vsaki kocki vsaka od teh barv vsaj enkrat. Grozljivka zahteva, da postavite kocke v stolpec eno vrh druge tako, da se bo na vsaki od štirih stranskih ploskev tako nastalega kvadra pojavila vsaka od štirih barv.

Opisana sestavljanka je zelo stara in izvira po vsej verjetnosti iz Nemčije, kjer so jo nekdaj poznali pod imenom *Katzenjammer* (Glavobol). Pred desetletji pa je postala močno priljubljena tudi v angleško govorečih deželah – in sicer pod imenom *Instant Insanity* (Takojšna norost).

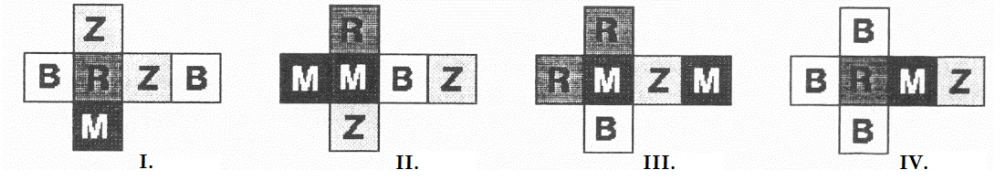
Obe imeni dokaj nedvoumno opozarjata, da utegne biti igra kljub svoji navidezni preprostosti presneto trd oreh za reševalca. Ročno postavljanje kock v pravilno obarvani stolpec namreč terja zaradi ogromnega števila teh postavitev zares izjemno mero spretnosti in potrpežljivosti. Kar poskusite tudi sami. Beseda "grozljivka" se vam utegne povsem nehote kar sama od sebe pojaviti na ustnicah.



Primer pravilno sestavljenega stolpca *Grozljivke*

Toda prepustimo grozljive strese raje trmastim ali naivnim in si oglejmo v nadaljevanju bližnjico do rešitve. Ta vodi, kajpak, preko teorije.

Grozljivka ima pravzaprav precej različic, saj so lahko ploskve štirih kock obarvane s štirimi barvami na več različnih načinov. Toda v principu je analiza igre v vseh primerih enaka. Zato kar vzemimo, da so ploskve kock obarvane tako, kakor kaže spodnja risba.



Poskusimo najprej dognati število sploh vseh različnih razvrstitev teh kock v stolpcu glede na obarvanost stolpca, toda ne oziraje se na posebno dodatno zahtevo *Grozljivke* po prisotnosti vseh štirih barv na vsaki ploskvi stolpca. Denimo, da bo kocka I na dnu stolpca. Opazimo, da je vseeno, ali postavimo na dno rdečo ploskev ali pa njej nasprotno

belo ploskev. Za obarvanost stolpca sta obe postavitvi enakovredni, saj dobimo v obeh primerih na ploskvah stolpca isti venec preostalih štirih ploskev. Podobno sklepamo tudi za preostala dva para nasprotnih ploskev. To kocko lahko torej postavimo na dno stolpca na tri različne načine. In v nadaljnem so za preštevanje razvrstitev kock v stolpcu zanimive le štiri različne barve na spodnjem vencu.

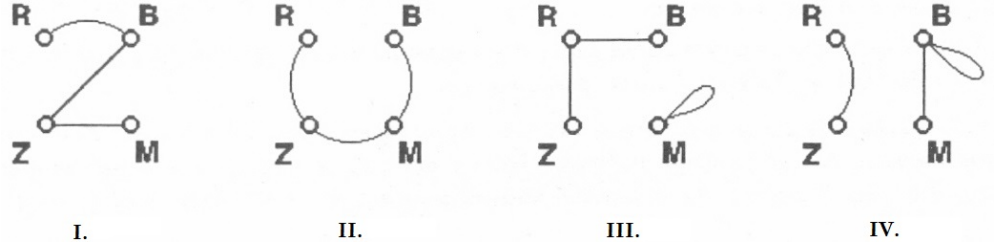
Kocko II lahko položimo vrh prve na šest različnih načinov. Pri tem sklepu je pomembno, da ni noben par nasprotnih ploskev te kocke enako obarvan. Nadalje lahko postavimo to kocko pri izbrani zgornji in spodnji ploskvi še na štiri različne načine – pač z oziroma na štiri vrteže okoli njene navpične osi. Tako lahko postavimo kocko II na spodnjo na $6 \cdot 4 = 24$ različnih načinov.

Kocka III ima en par nasprotnih ploskev enako obarvan. V stolpec jo lahko postavimo na $2 \cdot 4$ načine tako, da je ta par v njem neviden, ali pa na $2 \cdot 2$ načinov tako, da se ta par pojavi na vencu. Vsega skupaj dobimo torej 12 različnih postavitev. Na podoben način preštejemo še vse različne postavitve četrte kocke na vrh tretje.

Sklenemo, da je mogoče vse štiri kocke sestaviti v stolpec kar na $3 \cdot 24 \cdot 12 \cdot 12 = 10368$ različnih načinov. In koliko je med njimi tistih postavitev, ki jih zahteva *Grozljivka*?

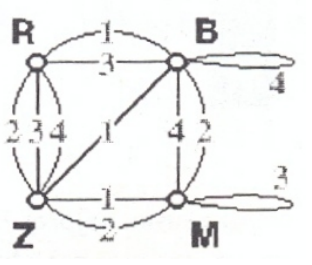
Izkušnje pri sestavljanju pravilnega stolpca s pomočjo kock kažejo, da je najtežje hkrati kontrolirati barve na nasprotnih ploskvah kock oziroma na nasprotnih ploskvah stolpca. Iz te zagate si lahko pomagamo na različne načine. Nekoliko presenetljivo pa je, da gre najlažje in najhitreje s pomočjo grafov.

Oglejmo si najprej, kako lahko predstavimo z grafi obarvanost ploskev na kockah. Točke grafov $\mathbf{B}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{R}$ in $\mathbf{Z}$ naj pomenijo zapored belo, modro, rdečo in zeleno poskev. Vsaki kocki priredimo graf tako, da v njem povežemo tisti dve točki, ki na kocki predstavljata med seboj nasprotni ploskvi.



I. **II.** **III.** **IV.**

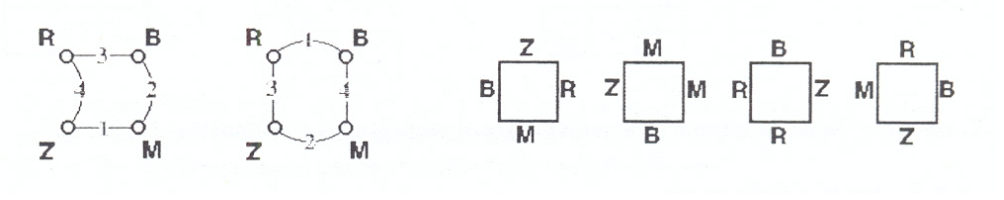
Označimo z 1, 2, 3 in 4 zapored povezave v prvem, drugem, tretjem in četrtem grafu in združimo vse štiri grafe v enega samega. Ta ima 12 povezav, ki so razdeljene v tri skupine po štiri, pač z ozirom na njihovo oštevilčenost. Število povezav do posameznih točk označuje število tistih ploskev na vseh štirih kockah, ki imajo pripadajočo barvo. Denimo: k točki $\mathbf{R}$ vodi pet povezav, kar pomeni, da ima sestavljalec stolpa na voljo pet rdečih ploskev. In s pomočjo risbe, kjer so podane barve na vseh štirih kockah, se zlahka prepričamo, da je na njih zares natanko pet ploskev obarvanih rdeče.



V pravilno sestavljenem stolpcu *Grozljivke* določa vsak par njegovih nasprotnih ploskev v zgornjem grafu nek podgraf s štirimi povezavami. Ker najdemo v paru nasprotnih ploskev stolpca ploskve vseh štirih kock, so tudi oznake povezav tako pripadajočega podgrafa: 1, 2, 3 in 4. Vsaka barva se na vsaki ploskvi stolpca pojavi le po enkrat, torej na paru nasprotnih ploskev natanko dvakrat. To pomeni, da pripada vsakemu paru nasprotnih ploskev stolpca podgraf, sestavljen iz štirih povezav in iz štirih točk, pri čemer vodita k vsaki točki natanko dve povezavi. Takšnim grafom pravimo cikli.

Sedaj je že takorekoč na dlani, kako lahko s pomočjo grafov sestavimo pravilni stolpec. Na sestavljenem grafu moramo poiskati dva opisana cikla, za vsak par nasprotnih ploskev po enega, ki nimata skupnih povezav. In izkaže se, da je ta naloga neprimerno preprostejša od grozljivega sestavljanja stolpca "v živo" s pomočjo kock.

Rešitev je prikazana na spodnji risbi. Med tremi cikli, kolikor jih v celotnem grafu ustreza opisanim lastnostim, je samo par z risbe na levi tak, ki nima skupnih povezav. Z risbe na desni pa razberemo, kako lahko s pomočjo tega para ciklov sestavimo stolpec (glej tudi risbo na začetku članka).



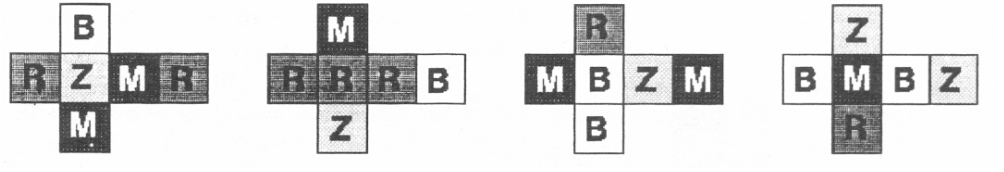
Nadaljevanje:

1. Prepričaj se, da je navedena rešitev Grozljivke edina. To storiš tako, da poiščeš še tretji cikel, ki v članku sicer ni naveden, s pomočjo katerega lahko na koncu sestavljaš rešitve.

2. Ali je zveza med obarvano kocko in njenim grafom, s katerim so predstavljeni pari nasprotnih ploskev, povratnoenolična? Preprosteje: ali je mogoče s pomočjo grafa na en sam način rekonstruirati kocko, ki jo ta graf predstavlja?

3. Sestavi svojo verzijo Grozljivke. Vzemi štiri kocke in jih v skladu z zahtevami igre po svoje obarvaj s štirimi barvami. Zatem poskusi z njimi sestaviti pravilni stolpec.

4. Sestavljanka *Grozljivka* je pod imenom *Bűvös golyók* (Čarobne kroglice) poznana tudi na Madžarskem. Že ime pove, da je v tehničnem smislu izdelana nekoliko drugače, toda v osnovi gre za opisano igro. Prevedemo jo lahko na naslednje štiri obarvane kocke:



Sestavi pravilni stolpec v tej madžarki verziji *Grozljivke*.

Vilko Domajnko

ŠTIRI LOGIČNE NALOGE

1. naloga: *"Koliko imate otrok in koliko so stari?"* je vprašal matematika Jožeta njegov gost Bojan, prav tako matematik. *"Imam tri sinove"*, je odgovoril matematik Jože. *"Zmnožek njihovih let je 72, vsota njihovih let pa je enaka moji hišni številki."* Gost Bojan je odšel ven, pogledal hišno številko, se vrnil in dejal: *"Naloga je nedoločena."* *"Res je,"* je odvrnil Jože. *"Zato ti povem še, da se je eden od sinov pravočasno vpisal v šolo."*

Koliko so stari Jožetovi sinovi?

2. naloga:

Pri magičnem kvadratu so vsote števil po vrsticah, stolpcih in diagonalah enake. Primer:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Izpolni prazne kvadratke, tako da bo kvadrat magičen:

		19
20		
13	18	

3. naloga: Naslednje zaporedje naravnih števil podaljšaj za dva člena: $7, 13, 24, 45, __, __$.

4. Ali obstaja trikotnik...

V tej nalogi bodo obdelani problemi obstoja trikotnika pri danih pogojih. Pri tem moramo upoštevati trikotniško neenakost

$$|a - b| < c < b + a \tag{1}$$

in analogno $|a - c| < b < a + c$, $|b - c| < a < b + c$.

4. a) Ali obstaja trikotnik, katerega dolžine višin so 1, 2, 3?

4. b) Ali obstaja trikotnik s stranicama $a = 13$, $b = 5$, katerega višina na tretjo stranico je enaka geometrijski sredini drugih dveh višin?

4. c) Če so a, b in c stranice nekega trikotnika, dokaži, da obstaja trikotnik s stranicami $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$. Ali velja tudi obratno?

Rešitve nalog

1. Zapišimo 72 kot produkt treh števil, poleg pa še vsote teh treh števil:

$P_1 = 1 \cdot 1 \cdot 72$ $S_1 = 74$
$P_2 = 1 \cdot 2 \cdot 36$ $S_2 = 39$
$P_3 = 1 \cdot 3 \cdot 24$ $S_3 = 28$
$P_4 = 1 \cdot 4 \cdot 18$ $S_4 = 23$
$P_5 = 1 \cdot 6 \cdot 12$ $S_5 = 19$
$P_6 = 1 \cdot 8 \cdot 9$ $S_6 = 18$
$P_7 = 2 \cdot 2 \cdot 18$ $S_7 = 22$
$P_8 = 2 \cdot 3 \cdot 12$ $S_8 = 17$
$P_9 = 2 \cdot 4 \cdot 9$ $S_9 = 15$
$P_{10} = 2 \cdot 6 \cdot 6$ $S_{10} = 14$
$P_{11} = 3 \cdot 3 \cdot 8$ $S_{11} = 14$
$P_{12} = 3 \cdot 4 \cdot 6$ $S_{12} = 13$

Samo dvakrat se javlja enaka vsota (14). Ker je Jože potrdil, da je naloga nedoločena, pride v poštev le ta možnost, za starosti pa imamo možnosti: 2, 6, 6 in 3, 3, 8. Na osnovi pripombe, da je en od sinov pravočasno vpisan v šolo, sledi rešitev: 3, 3, 8.

2. Naj bo središčno število enako x. Potem lahko zapišemo kvadrat, kot je levo spodaj:

x–1	14	19
20	x	12
13	18	x+1

15	14	19
20	16	12
13	18	17

in je karakteristična vsota enaka $19 + x + 13 = 32 + x$ (diagonala). Izračun preostalih števil in primerjava s karakterističnim seštevkom da enačbo: $x - 1 + x + x + 1 = 32 + x$ ali $2x = 32$, in je $x = 16$. Rešitev je zgoraj desno. Karakteristični seštevek je 48.

3. Ker je $2 \cdot 7 - 13 = 1$, $2 \cdot 13 - 24 = 2$, $2 \cdot 24 - 45 = 3$, bomo nadaljevali z $2 \cdot 45 - 86 = 4$ in $2 \cdot 86 - 167 = 5$. Torej se zaporedje glasi: $7, 13, 24, 45, 86, 167, ...$

4. a) Recimo, da takšen trikotnik obstaja. Naj bodo njegove stranice a, b, c in ustrezne višine $v_a = 1$, $v_b = 2$, $v_c = 3$. Potem je ploščina trikotnika $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$. Sledi $\frac{a}{2} = b = \frac{3c}{2}$ oziroma $a = 2b = 3c$. Stranice trikotnika so a, $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$. Ker je vsota $\frac{a}{2} + \frac{a}{3} = \frac{5a}{6} < a$, takšen trikotnik zaradi trikotniške neenakosti (1) ne obstaja.

4. b) Izhajamo iz pogoja $v_c = \sqrt{v_a \cdot v_b}$. Če je S ploščina trikotnika, potem velja: $v_a = \frac{2S}{a}$, $v_b = \frac{2S}{b}$ in $v_c = \frac{2S}{c}$. Zaradi pogoja je $\frac{2S}{c} = \sqrt{\frac{2S}{a} \cdot \frac{2S}{b}}$ oziroma $c = \sqrt{a \cdot b}$ in $c = \sqrt{13 \cdot 5} = \sqrt{65}$. Zaradi trikotniške neenakosti je $a < b + c$, zato $c > a - b = 13 - 5 = 8$. Ker je $\sqrt{65} > 8$, tak trikotnik obstaja.

4. c) Ne da bi zmanjšali splošnost lahko predpostavimo, da je c najdaljša stranica. Potem imamo $a + b > c$ in $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + \sqrt{ab} > a + b > c$ oziroma $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c}$. Takšen trikotnik torej obstaja.

Obratno vprašanje se glasi: *ali obstaja trikotnik s stranicami a^2, b^2, c^2, če obstaja trikotnik s stranicami a, b, c?* Odgovor je: *ne vedno*. Vzemimo primer: trikotnik s stranicami $a = 1$, $b = 1$, $c = \sqrt{2}$ obstaja $(a + b > c)$, trikotnik s stranicami a^2, b^2 in c^2, t.j. 1, 1, 2 $(1 + 1 = 2)$ pa ne.

Šefket Arslanagić

NAGRADNA NALOGA

Jedrski poskusi

Grozozindus Colomodus, predsednik *Demokratične Anarhije KoxiČČ*, se je odločil, da bo delal jedrske poskuse. To je izzvalo cel val protestov po svetu in nazadnje so izvajanje jedrskih poskusov preprečili štirje okoljevarstveniki. Ugotovi njihova imena, države, iz katerih so, ter kako in kje so preprečili jedrske poskuse.

IMENA: Sally, Ana, Jure, Peter
DRŽAVE: Nemčija, Slovenija, Švedska, Anglija
KRAJI: Bermudski trikotnik, Otok vitezov in oprod, Velikonočni otoki, Santa Barbara
NAČINI: demonstracije, bojkot vseh tujih revij, zmeda v računalnikih, poskus atentata

1. Noben okoljevarstvenik ni iz države, ki se začne z isto črko kot njegovo ime.
2. Jure sicer živi v Sloveniji, vendar je doma z Otoka vitezov in oprod, zato je tam tudi preprečil jedrske poskuse.
3. Načrte za atomsko bombo je z računalnika zbrisala Švedinja.
4. Poskuse na Bermudih je Grozozindus odpovedal, ko najboljši logik v njegovi državi ni več dobival revije *Logika & razvedrilna matematika*, minister za obrambo pa je spet hotel brati *Ciciban*.
5. Ne Švedinja ne Sally nista organizirali demonstracij.
6. Atentata ni izvedel ne Peter ne okoljevarstvenik, ki je deloval na Velikonočnih otokih, ne Sally.
7. Peter ni iz države, ki se začne na isto črko, kot ime nekega okoljevarstvenika.

Opomba: izraz *okoljevarstvenik* lahko pomeni moškega ali žensko (okoljevarstvenico).

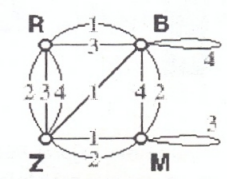
Rešitev:

Sally	Anglija	Bermudski trikotnik	bojkot
Ana	Švedska	Velikonočni otoki	računalniki
Jure	Slovenija	Otok vetezov in oprod	atentat
Peter	Nemčija	Santa Barbara	demonstracije

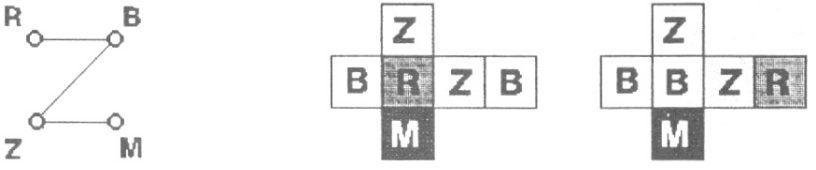
Metka Osredkar

Grozljivka – odgovori na vprašanja s strani 5

1.



2. Ne, zveza med obarvano kocko in njenim grafom ni povratnoenolična. Vzemimo za primer graf na levi strani spodnje risbe. Pripadata mu dve različno obarvani kocki na desni. O tem, da sta kocki zares različno obarvani, se prepričaj sam – denimo kar s pomočjo njunih papirnatih modelov.



Vilko Domajnko

UČNA NAČRTA ZA IZBIRNI PREDMET LOGIKA

Učni načrt za izbirni predmet Logika v osnovnih šolah

Smotri pouka logike

– učenci razvijajo sposobnost logičnega mišljenja, to je natančnega izražanja in logičnega sklepanja;
– spoznajo, da se logično mišljenje materializira v okviru nekega jezika;
– ugotavljajo uporabnost logike pri drugih predmetih in v vsakdanjem življenju;
– znajo ločiti nepravilne od logično pravilnih sklepov;
– ločijo deduktivne metode od induktivnih;
– spoznajo pojem definicije.

Učna snov

Izjavni račun
Osnovne izjavne povezave: konjunkcija, disjunkcija, implikacija, ekvivalenca in negacija. Problemi z jezikovnim izražanjem teh povezav. Uvedba simbolov za povezave. Pravilnostne tabele in semantična drevesa. Tavtologije, logično izhajanje in sklepanje. Osnovna pravila sklepanja. Dokaz s protislovjem in analizo primerov. Medsebojne zveze med izjavnimi povezavami.

Zgradba izjav
Reči in relacije. Kvantifikatorja "za vsa" in "vsaj en". Zveze med kvantifikatorji in izjavnimi povezavami. Vennovi diagrami. Enomestni predikati in silogizmi. Pojem protiprimera. Problemi z jezikovnim izražanjem.

Pravila definiranja
Nekaj oblik pravilnih definicij.

Odnosi med izjavami
Kontrarne in kontradiktorne izjave. Kontrapozicija, obratna izjava. Potreben in zadosten pogoj. Ekvivalentne izjave. Protislovne izjave.

Dedukcija in indukcija
Vloga indukcije pri tvorjenju hipotez. Izpeljava posledic.

Navodila

Pri podajanju učne snovi moramo upoštevati različne sposobnosti učencev. Večino pojmov je treba vpeljati preko nalog, ki morajo biti prilagojene znanju učencev. Tako večina nalog ne sme vsebovati posebnega znanja, nekatere pa lahko črpajo vsebino iz drugih predmetov. Tako je primerna metoda za vpeljavo izjavnih povezav reševanje nalog z otoka vitezov in oprod. Dvo- in trodimenzionalne logične naloge pa lahko uporabimo v zvezi z drugimi predmeti (geografija, matematika, zgodovina, tuj jezik). Problem nastopi pri izražanju v vsakdanjem jeziku, kjer se besede uporabljajo tudi v

drugačnem pomenu. Posebej moramo biti pozorni na negacijo in na vrstni red besed, ki je pri naravnih jezikih lahko poljuben. Primer: razlika med "noben ni" in "vsi niso". Logično simboliko vpeljemo zato, da pokažemo, da je možno opredeliti pojem logičnega izhajanja (na nivoju izjavnega računa) in tako tudi ločiti med pravilnim in nepravilnim sklepom. Pri običajnih logičnih nalogah logične simbolike ne uporabljamo, potrebujemo jo šele pri t.i. nadnalogah.

Na primerih tudi spoznamo, da imamo singularne in splošne izjave. Klasična rešitev z razlikovanjem med subjektom in predikatom in predikatni račun. Pri vpeljavi kvantifikatorjev se poslužujemo Vennovih diagramov. Enako pri iskanju protiprimerov.

Primere dvo- in večmestnih odnosov lahko črpamo iz matematike in rodbinskih odnosov. Primere definicij najdemo v matematiki, biologiji, slovnici in sami logiki.

Kot primere induktivnega sklepanja si lahko izberemo primere iz inteligenčnih testov, ko pa smo dobili pravilo, lahko deduktivno izpeljujemo nadaljnje posledice.

Učni načrt za izbirni predmet Logika v srednjih šolah

(Predlagamo uvrstitev predmeta v 3. letnik šolanja)

Smotri pouka logike

– dijaki razvijajo sposobnost logičnega mišljenja, to je natančnega izražanja in logičnega sklepanja;
– spoznajo, da se logično mišljenje materializira v okviru nekega jezika;
– spoznajo simbole za izjavne povezave in kvantifikatorje;
– ugotavljajo uporabnost logike pri drugih predmetih in v vsakdanjem življenju;
– znajo ločiti nepravilne od logično pravilnih sklepov;
– ločijo deduktivne metode od induktivnih;
– spoznajo pojem definicije;
– spoznajo pravila sklepanja

Učna snov

Struktura argumentiranja
Pojem argumenta, implicitne predpostavke, raba in omemba, resničnost premis in veljavnost sklepanja.

Izjavni račun
Osnovne izjavne povezave: negacija, konjunkcija, disjunkcija, implikacija in ekvivalenca. Pravilnostne tabele. Osnovna in izpeljana pravila sklepanja. Semantična drevesa. Tavtologija, protislovja in kontingentne izjave. Kontradiktornost in kontrarnost. Obrat in kontrapozicija izjave.

Logika kategoričnih stavkov
Univerzalne in partikularne izjave, afirmativne in negativne izjave. Odnosi med kategoričnimi izjavami. Silogizmi: modusi in figure. Ugotavljanje pravilnosti silogizmov z Vennovimi diagrami. Entimem in polisilogizem.

Predikatni račun
Področje pogovora, spremenljivke, imena, relacije in kvantifikatorja. Pravila sklepanja za kvantifikatorja, zveze med izjavnimi povezavami in kvantifikatorjema. Identiteta in pravila zamenjave. Sintaksa in semantika za predikatni račun prvega reda. Veljavnost pravil. Funkcijski znaki. Predikatni račun višjega reda in večsortni predikatni račun.

Teorija in modeli
Aksiomi, izreki, definicije. Interpretacija teorije, model. Protimodel, neodvisnost aksiomov. Izomorfizem in vložitev. Primer: ekvivalentnostni račun. Relativna neprotislovnost teorije.

Definicije
Definicije nominalnih in stavčnih funktorjev. Odpravljivost in kreativnost definicij. Klasična teorija pravilne definicije pojma. Rekurzivne definicije.

Račun imen
Račun imen kot sinteza klasične logike in predikatnega računa. Sintaktične kategorije. Stavčni in imenski funktorji. Izjava *A je b*. Definicija funktorjev vključitve in enakosti.

Napake pri sklepanju
Klasifikacija napak: napake relevantnosti, krožno sklepanje, semantične napake, induktivne napake, formalne napake, napake napačnih premis.

Indukcija in verjetnostni račun
Statistični silogizem, induktivna generalizacija, indukcija po analogiji, Millove metode, znanstvene teorije. Logične relacije med izjavami in dogodki. Verjetnost. Aksiomi verjetnostnega računa. Pogojna verjetnost.

Nadaljnji razvoj formalne logike
Modalna, deontična, epistemična, časovna logika. Intuicionistična logika in kritika principa izključene tretje možnosti, večvrednostne logike.

Navodila

Učna snov logike mora biti prilagojena starosti dijakov in njihovemu predznanju. Pri tem je treba upoštevati, da dijak pri 18 letih doseže vrh svojih pomnilnih in inteligenčnih sposobnosti, da se je z logičnim sklepanjem že srečal, da obvlada slovnico slovenskega in enega tujega jezika in da je pri matematiki že spoznal potem teorije pri geometriji in algebrskih strukturah in da je logiko srečal v računalništvu.

Osnovni cilj logike je, da dijak spozna pojem logičnega izhajanja, ki ga uporablja pri argumentiranju. Pri tem se mora zavedati implicitnih predpostavk, izpuščenih premis in zaključkov. Pri tem črpamo zglede iz drugih šolskih predmetov in vsakdanjega življenja.

Logika mora obsegati vsa pravila sklepanja, ki jih uporabljajo drugi predmeti, in vse oblike definicij. Osnovna teorija je izjavni račun in v tem okviru definiramo pojem izhajanja, ki ga razširimo na predikatni račun. Posebej se posvečamo napakam pri sklepanju in definiranju.

Razlikovati moramo osnovne pojme, ki jih ne moremo definirati, pač pa o njih govorijo aksiomi, in definirane pojme.

Klasično logiko obravnavamo kot teorijo enomestnih predikatov in kot teorijo imen.

Posebej se ukvarjamo s problemom uporabe dvovalentne logike v matematiki in drugih disciplinah. Neklasične logike omenjamo kot predlog za rešitev določenih problemov.

Induktivno in verjetnostno logiko omenjamo v zvezi z običajnim razvojem nededuktivnih znanosti.

INTERNATIONAL MATHEMATICAL TALENT SEARCH

Solutions Round 14

Problem 1/14. Let a, b, c, d be positive numbers such that $a^2 + b^2 + (a-b)^2 = c^2 + d^2 + (c-d)^2$. Prove that $a^4 + b^4 + (a-b)^4 = c^4 + d^4 + (c-d)^4$.

Solution 1: Consider the square of the left side of the original equation:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2 &+ (a-b)^2)^2 \\ &= (a^4+b^4+(a-b)^4) + 2a^2b^2 + 2a^2(a-b)^2 + 2b^2(a-b)^2 \\ &= (a^4+b^4+(a-b)^4) + 2a^2b^2 + 2(a^2+b^2)(a-b)^2 \\ &= (a^4+b^4+(a-b)^4) + 2a^2b^2 + ((a+b)^2+(a-b)^2)(a-b)^2 \\ &= (a^4+b^4+(a-b)^4) + 2a^2b^2 + (a^2-b^2)^2 + (a-b)^4 \\ &= 2(a^4+b^4+(a-b)^4).\end{aligned}$$

We can do the same thing for the expression with c and d. Thus, by squaring the original equation and dividing by two, the result follows.

Solution 2: By expanding $(a-b)^2$ in the original equation, we see that the left hand side is equivalent to $2(a^2+b^2-ab)$ or equivalently $2((a-b)^2+ab)$. We now divide the equation by 2 and square it to obtain $((a-b)^2+ab)2 = ((e-d)^2+cd)^2$. From here, we will manipulate the expression on the left hand side of the equation:

$$\begin{aligned}((a-b)^2+ab)^2 &= (a-b)^4 + 2ab(a-b)^2 + a^2b^2 \\ &= (a-b)^4 + 2a^3b + 2ab^3 - 3a^2b^2 \\ &= (a-b)^4 + \frac{1}{2}(-a^4 + 4a^3b - 6a^2b^2 + 4ab^3 - b^4 + a^4 + b^4) \\ &= \frac{1}{2}(a^4+b^4+(a-b)^4).\end{aligned}$$

Thus, $(a^4+b^4+(a-b)^4)/2 = (c^4+d^4+(c-d)^4)/2$, or equivalently, $a^4+b^4+(a-b)^4 = c^4+d^4+(c-d)^4$.

Solution 3: Let $x = (a-b)^2, y = a^2+b^2, u = (c-d)^2$, and $v = c^2+d^2$. Note that $y - x = 2ab$ which implies that $(y-x)^2 = 4a^2b^2$, so that

$$a^4+b^4+(a-b)^4 = y^2 - 2a^2b^2 + x^2 = x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(y-x)^2 = \frac{1}{2}(x+y)^2.$$

Doing the analogous manipulations for c and d, we get $c^4+d^4+(c-d)^4 = \frac{1}{2}(u+v)^2$. Thus, we seek to show that $\frac{1}{2}(x+y)^2 = \frac{1}{2}(u+v)^2$ given that $x+y = u+v$. At this point, the result is obvious.

Problem 2/14. The price tags on three items in a store are as follows:

$ 5.50	$ 2.00	$ 0.75

Notice that the sum of these three prices is $ 8.25, and that the product of these three numbers is also 8.25. Identify four prices whose sum is $ 8.25 and whose product is also 8.25.

Solution: We will show that the four prices are $ 0.50, $ 2.00, $ 2.75 and $ 3.00. To this end, first note that if x is any one of the prices (in dollars) then by the Arithmetic-Geometric Mean Inequality we have $(8.25 - x)/3 \geq (8.25/x)^{(1/3)}$ for any of the other prices. This implies $.473 < x < 4.6069$. Thus, all prices must be between $ 0.48 and $ 4.60, inclusive.

Let a, b, c, and d be the prices (in cents). We wish to find a, b, c, d so that

$$a + b + c + d = 825,$$

$$abcd = 8.25 \cdot 100^4 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^8 \cdot 11,$$

$$48 \leq a, b, c, d \leq 460.$$

Suppose, without loss of generality, that a is not divisible by 5. Then 5^8 divides bcd. Since each of these integers is less than $5^4 = 625$, none is divisible by 5^4. Therefore, 5 divides each of b, c and d. But this would imply that 5 does not divide $a+b+c+d = 825$, a contradiction. Therefore all the integers are divisible by 5.

Suppose, without loss of generality, that a is not divisible by 25. Then 5^7 divides bcd. If 25 divides each of b, c, and d then 25 does not divide $a + b + e + d = 825$, a contradiction. Thus, without loss of generality, b is also not divisible by 25, while 125 divides both c and d. Thus c and d must be one of the numbers $\{125, 250, 375\}$. We may check each of these values for c, d and solve for a and b. Doing this, we find that:

$$\begin{aligned}
&\text{if } \{c, d\} = \{125, 125\}, \text{then } a, b \approx 460.29, 114.71;\\
&\text{if } \{c, d\} = \{125, 250\}, \text{then } a, b \approx 380.65, 69.35;\\
&\text{if } \{c, d\} = \{125, 375\}, \text{then } a, b \approx 256.35, 68.65;\\
&\text{if } \{c, d\} = \{250, 250\}, \text{then } a, b \approx 277.4, 47.6;\\
&\text{if } \{c, d\} = \{250, 375\}, \text{then } a, b \approx 134.6, 65.4;\\
&\text{if } \{c, d\} = \{375, 375\}, \text{contradicting that 9 is not a divisor of } abcd.
\end{aligned}$$

Therefore, 25 must divide each of a, b, c, d. Let $A = a/25, B = b/25, C = c/25$ and $D = d/25$. We wish to find integers A, B, C, D satisfying:

$$A + B + C + D = 33,$$

$$ABCD = 2^6 \cdot 3 \cdot 11,$$

$$2 \leq A, B, C, D \leq 18.$$

Now, the only multiple of 11 between 2 and 18 is 11. Therefore, without loss of generality, we may set $A = 11$. Thus we have

$$B + C + D = 22,$$

$$BCD = 2^6 \cdot 3,$$

$$2 \leq B, C, D \leq 18.$$

Thus $\{B, C, D\} \in \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 16\}$. Without loss of generality, 3 divides B, thus $B = 3, 6$ or 12. Checking each case, we find

$$\begin{aligned} B = 3, &\quad \{C, D\} = \{(19 \pm \sqrt{105})/2\}, \\ B = 6, &\quad \{C, D\} = \{8 \pm 4\sqrt{2}\}, \\ B = 12, &\quad \{C, D\} = \{2, 8\}. \end{aligned}$$

Since only the last case yields integer solutions, the four prices must be \$ 0.50, \$ 2.00, \$ 2.75 and \$ 3.00.

Problem 3/14. In a group of eight mathematicians, each of them finds that there are exact1y three others with whom he/she has a common area of interest. Is it possible to pair them off in such a manner that in each of the four pairs, the two mathematicians paired together have no common area of interest?

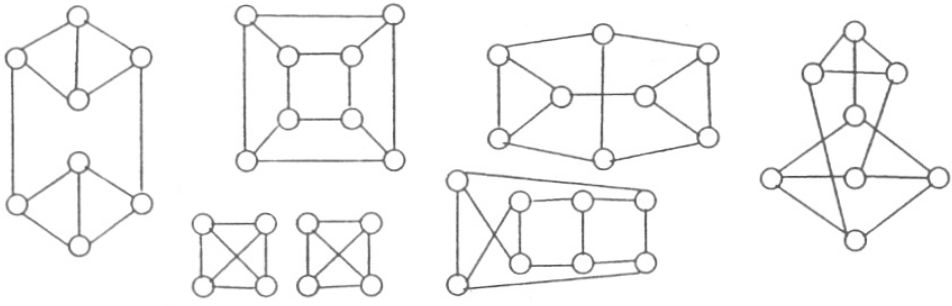
Solution 1: Line up the mathematicians in the following order: Any mathematician may be first; in the second spot, put one of the four with whom the first shares no interest; in the third spot, put one of those who shares an interest with number 2; and for number 4, we choose a mathematician who shares no area of interest with number 3 (since there must be at least three left meeting this qualification). Then there will be at least one person sharing an interest with number 4, since at worst 4 could share interests with 1 and 2, so let that person be number 5. Since at most number 5 could have nothing in common with 1, 2 and 3, we know that there is another mathematician with whom 5 shares no interest, and we will put that person sixth. Number 1 can be paired with 2, 3 with 4, and 5 with 6. If the remaining mathematicians (7 and 8) can be paired, then we are done. If they cannot, then we note that each of 7 and 8 can be legally paired with four of 1 though 6, so there must be a pair among (1,2),(3,4) and (5,6) such that one of the pair can be paired with 7 and the other with 8.

Solution 2: Consider a graph having 8 vertices and each vertex having 3 edges incident to it. This means there are 12 edges in the graph. Remove any pair of nonadjacent vertices, along with the (6) edges incident to them. There are now 6 vertices and 6 edges. If all vertices have degree 2 (2 edges incident to each vertex), then 2 vertices and 4 edges can be removed by removing another pair of nonadjacent vertices. Otherwise, at least one vertex must have three edges incident to it. Remove a vertex of degree three and a nonadjacent vertex. This results in removing at least four edges. Now there are 4 vertices and at most 2 edges. If one vertex has degree 2, remove it and the nonadjacent vertex, leaving a legal pair. Otherwise the edges have

no common endpoint, and removing any nonadjacent pair will remove both edges, leaving a legal pair.

Solution 3: Consider the complementary graph, whose 8 vertices represent the mathematicians, and an edge is drawn between two vertices if the corresponding mathematicians do not share an interest. Each vertex in this graph has degree 4. Dirac's Theorem, which is also a corollary of Ore's theorem, states that a graph on n vertices, each vertex having degree greater than or equal to $(n-1)/2$, contains a Hamiltonian cycle (a cycle that begins at some vertex and passes through each other vertex exactly once before returning to the starting vertex). We can create the desired pairing by choosing alternate edges from a Hamiltonian cycle.

Comments: The following graphs illustrate some of the possible combinations of shared interests among the eight mathematicians. In each of these cases, one can demonstrate that a pairing of the desired nature is possible. An alternate solution to the problem can be obtained by proving that the illustrations below exhaust all possibilities (do they?), and then by designating a pairing in each case.



Problem 4/14. For positive integers a and b, define $a \sim b$ to mean that $ab+1$ is the square of an integer. Prove that if $a \sim b$, then there exists a positive integer c such that $a \sim c$ and $b \sim c$.

Solution 1: Assume that $ab+1=k^2$ and let x and y be integers such that

$$ac+1=(k+x)^2=k^2+2kx+x^2=ab+1+2kx+x^2$$

and

$$bc+1=(k+y)^2=k^2+2ky+y^2=ab+1+2ky+y^2.$$

Then

$$c=\frac{1}{a}(2kx+x^2)+b=2k+a+b \quad \text{if} \quad x=a$$

and

$$c=\frac{1}{b}(2ky+y^2)+a=2k+b+a \quad \text{if} \quad y=b.$$

Thus if $c=a+b+2k=a+b+2\sqrt{ab+1}$, then $a \sim c$ and $b \sim c$, as desired, since $ac+1=(k+a)^2$ and $bc+1=(k+b)^2$.

Solution 2: Assume that $ab+1=k^2$. Then if $ac+1=m^2$ and $bc+1=n^2$ for some positive integers m, n, and c,

$$n^2 = bc+1 = (\frac{k^2-1}{a})(\frac{m^2-1}{a})+1 = (\frac{km-1}{a})^2 - (\frac{k-m}{a})^2 + 1$$

must be a perfect square. This happens if $(k-m)/a = \pm 1$; i.e., if $m = k \pm a$. Then

$$n = \frac{km-1}{a} = \frac{k(k\pm a)-1}{a} = \frac{k^2-1\pm ak}{a} = \frac{ab\pm ak}{a} = b \pm k$$

and

$$\begin{aligned} c &= \frac{n^2-1}{b} = \frac{(b\pm k)^2-1}{b} = \frac{b^2\pm 2bk+k^2-1}{b} = \frac{b^2\pm 2bk+ab}{b} \\ &= a+b\pm 2k = a+b\pm 2\sqrt{ab+1}. \end{aligned}$$

Note that $|a-b| \geq 2$ whenever $a \sim b$, and that when $|a-b|=2, (a-b)^2=4$, from which $(a+b)^2 = 4(ab+1)$, and hence $a+b-2\sqrt{ab+1}=0$ follows. Hence we can choose $c = a+b+2\sqrt{ab+1}$ when $|a-b|=2$, and $c = a+b\pm 2\sqrt{ab+1}$ when $|a-b|>2$.

Solution 3: Assume that $ab+1$ is a perfect square, and let $b=ax+y$, where x and y are integers. Then $a(ax+y)+1 = a^2x+ay+1$ must be a perfect square, hence its discriminant, y^2-4x, should vanish. Thus y should be even, say $2u$, where u is an integer, $x=u^2$, and $b=au^2+2u$. Moreover, $ab+1 = a(au^2+2u)+1 = (au+1)^2$. Similarly, if for some integer c, $ac+1$ is a perfect square, then c is of the form av^2+2v, where v is an integer. Then for

$$bc+1 = (au^2+2u)(av^2+2v)+1 = a^2u^2v^2+2(u+v)auv+4uv+1$$

to be a perfect square, its discriminant should also vanish; i.e., u and v must satisfy the equation

$$4(u+v)^2 - 4(4uv+1) = 0.$$

It follows that $v = u\pm 1$, and $c = av^2+2v = a(u\pm 1)^2+2(u\pm 1) = au^2\pm 2au+a+2u\pm 2 = a+b\pm 2(au+1) = a+b\pm 2\sqrt{ab+1}$, as in the previous solution.

Solution 4: Assume that $ab\pm 1 = k^2$, and observe that (as in Solution 3), for $ac+1$ to be a perfect square, c should be of the form as^2+2s for some positive integer s. Then

$$\begin{aligned} bc+1 &= b(as^2+2s)+1 = abs^2+2bs+1 \\ &= (k^2-1)s^2+2bs+1 = (ks+1)^2 - s(s-2(b-k)) \end{aligned}$$

is a perfect square if $s=2(b-k)$; i.e., if

$$\begin{aligned} c &= as^2+2s = s(as+2) = 2(b-k)(2ab-2ak+2) \\ &= 4(b-k)(k^2-ak) = 4k(b-k)(k-a). \end{aligned}$$

Solution 5: More generally, observe that if $a+b+c$ is even, then

$$t = (a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc)/4$$

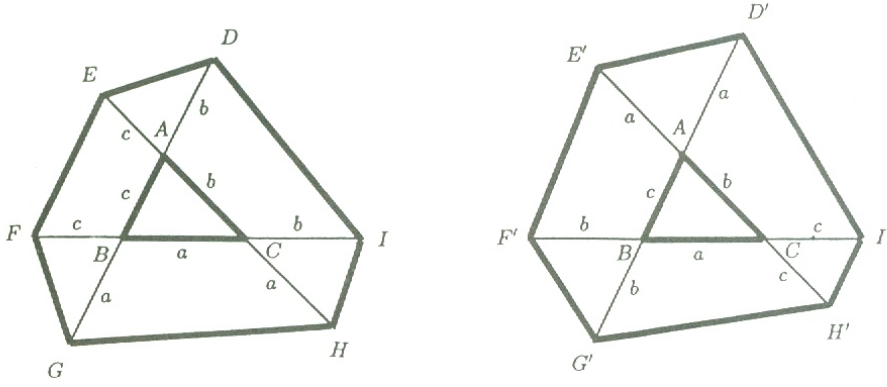
is an integer, and $ab+t, ac+t$, and $bc+t$ are perfect squares (of $(a+b-c)/2$, $(a-b+c)/2$, and $(-a+b+c)/2$, respectively). Solving the above equation for c, we find that $c = a+b \pm 2\sqrt{ab+t}$, as in the first three solutions above.

Comments: It should be noted that in addition to the three different values of c displayed in the solutions above, there are other possibilities as well. For instance, if $(a,b) = (1,3)$, then $c = 120$ and $c = 1680$ will also satisfy the relationships $a \sim c$ and $b \sim c$. In fact, one can show that in general, there are infinitely many values of c for any a and b such that $a \sim b$. To this end, one must consider the solutions in integers of $bm^2 - an^2 = b - a$ (obtained by eliminating c from $ac+1 = m^2$ and $bc+1 = n^2$), and hence the 'convergents' of the 'continued fraction expansion' of $\sqrt{a/b}$. For example, if $(a,b) = (7,5)$, we find that the values of (m,n) generated by $(m_0,n_0) = (1,1), (m_1 n_1) = (11,13)$, and $(m_{i+2}, n_{i+2}) = (12m_{i+1} - m_i, 12n_{i+1} - n_i)$ for $i \geq 0$, will yield the following values for c: $24, 3432, 487344, 69199440$, etc.

Moreover, one can also show that if $a \sim b, a \sim c$, and $b \sim c$, then there is a positive integer d such that $a \sim d, b \sim d$, and $c \sim d$. This problem was posed in the November 1994 issue of *Math Horizons*.

It should be noted that the use of the discriminants of the quadratics in Solutions 3 and 4 reflects a doze of wishful thinking. While it is true for polynomial squares that for $ab+1$ to be a perfect square, b must be of the form au^2+2u for some integer u, it is not true for integer squares. For example, $x^2+3x+21$ is a perfect square when $x = 1$ even though its discriminant is not 0; while $3 \cdot 8 + 1 = 25$, even though 8 is not of the form $3u^2+2u$ for any integer u. Nevertheless, the technique of using discriminants is 'justified' by the outcome: we were searching for formulas rather than drawing irrefutable conclusions.

Problem 5/14. Let $\triangle ABC$ be given, extend its sides, and construct two hexagons as shown below. Compare the areas of the hexagons.



Solution 1: Let $T(X)$ denote the area of a figure X, $T_0 = T(ABC), T_1 = T(DEFGHI)$, and $T_2 = T(D'E'F'G'H'I')$. We claim that $T_1 = T_2$; i.e., the areas of the two hexagons are equal.

Recall that the area of a triangle is given by one-half the product of the lengths of two sides and the sine of the included angle. By side-angle-side, the three "corner" triangles of the hexagon on the left, $\triangle ADE, \triangle BFG$, and $\triangle CHI$, are congruent to $\triangle ABC$. Thus, the area of T_1 is

$$T_0 + T(AGH) + T(BDI) + T(CEF) =$$

$$T_0 + \frac{1}{2}(a+b)(a+c)\sin A + \frac{1}{2}(a+b)(b+c)\sin B + \frac{1}{2}(a+c)(b+c)\sin C =$$

$$T_0 + \frac{1}{2}[a^2 \sin A + b^2 \sin B + c^2 \sin C + (ab+ac+bc)(\sin A + \sin B + \sin C)],$$

and the area of T_2 is

$$T(AD'E') + T(BF'G') + T(CH'I') + T(AG'H') + T(BD'I') + T(CE'F') - 2T_0 =$$

$$\frac{1}{2}[a^2 \sin A + b^2 \sin B + c^2 \sin C + (b+c)^2 \sin A + (a+c)^2 \sin B + (a+b)^2 \sin C] - 2T_0.$$

Using the fact that

$$T_0 = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A,$$

and in view of the Law of Sines,

$$(\sin A)/a = (\sin B)/b = (\sin C)/c,$$

upon expanding the expressions above, it is easy to see that $T_1 = T_2$.

Solution 2: Note that if two triangles have the same altitude over their bases, then the ratio of their areas equals the ratio of their bases. Thus, in the hexagon on the left, $T(ACG)/T_0 = (a+c)/c$ and $T(AGH)/T(ACG) = (a+b)/b$, so that

$$\frac{T(AGH)}{T_0} = \frac{T(AGH)}{T(ACG)}\frac{T(ACG)}{T_0} = \frac{(a+b)(a+c)}{bc}.$$

Similarly,

$$\frac{T(BDI)}{T_0} = \frac{(a+b)(b+c)}{ac} \quad \text{and} \quad \frac{T(CEF)}{T_0} = \frac{(a+c)(b+c)}{ab}.$$

Therefore,

$$\begin{aligned} T_1 &= T_0 + T(AGH) + T(BDI) + T(CEF) \\ &= T_0(1 + (a+b)(a+c)/bc + (a+b)(b+c)/ac + (a+c)(b+c)/ab) \\ &= T_0(4 + (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)/abc). \end{aligned}$$

Since $T(ACG')/T_0 = (b+c)/c$ and $T(AG'H')/T(ACG') = (b+c)/b$ in the hexagon on the right, we find that

$$\frac{T(AG'H')}{T_0} = \frac{T(AG'H')}{T(ACG')}\frac{T(ACG')}{T_0} = \frac{(b+c)^2}{bc}.$$

Similarly,

$$\frac{T(BD'I')}{T_0} = \frac{(a+c)^2}{ac} \quad \text{and} \quad \frac{T(CE'F')}{T_0} = \frac{(a+b)^2}{ab}.$$

Since $\triangle AD'E'$ and $\triangle AG'H'$ are similar, $T(AD'E')/T(AG'H') = a^2/(b+c)^2$, which combines with $T(AG'H')/T_0 = (b+c)^2/bc$ to yield

$$\frac{T(AD'E')}{T_0} = \frac{T(AD'E')}{T(AG'H')}\frac{T(AG'H')}{T_0} = \frac{a^2}{bc}.$$

Similarly,

$$\frac{T(BF'G')}{T_0} = \frac{b^2}{ac} \quad \text{and} \quad \frac{T(CH'I')}{T_0} = \frac{c^2}{ab}.$$

Therefore, $T_2 = T(AD'E')+T(BF'G')+T(CH'I')+T(AG'H')+T(BD'I')+T(CE'F')-2T_0$, which can be expressed in the form

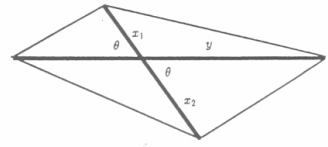
$$T_0\left(\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} + \frac{(b+c)^2}{bc} + \frac{(a+c)^2}{ac} + \frac{(a+b)^2}{ab} - 2\right),$$

which is equal to

$$T_0(4 + (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)/abc).$$

Therefore, $T_1 = T_2$.

Solution 3: One can easily show that if the diagonals of a quadrilateral are of lengths x and y and if they intersect at an angle θ, then the area of the quadrilateral is given by $\frac{1}{2}xy\sin\theta$. This generalizes, in degenerate cases, to include the same result for the areas of triangles; for them, $x = x_1 + x_2 = x_1 + 0 = x_1$ in the illustration on the right.



We will use this result to obtain equality of the areas of various triangles and quadrilaterals in the given hexagons.

For instance, we find that $T(ABI') = T(ACF)$ and $T(ABH') = T(BCE)$. Also $T(ABH'I') = T(CEF)$. Since also $T(ABH'I') = T(ABI')+T(ABH')+T(CH'I')-T_0$, we have $T(BCE) + T(ACF) + T(CH'I') = T(CEF) + T_0$. By similar arguments, $T(BCF) + T(ABI) + T(BF'G') = T(BDI) + T_0$, and $T(ACG) + T(ABH) + T(AD'E') = T(AGH) + T_0$.

It can also be seen that $T(AG'H') = T(BCDE), T(BD'I') = T(ACGF)$, and $T(CE'F') = T(ABHI)$. Therefore,

$$\begin{aligned}
T_1 &= T(CEF) + T(BDI) + T(AGH) + T_0 \\
&= [T(CEF) + T_0] + [T(BDI) + T_0] + [T(AGH) + T_0] - 2T_0 \\
&= [T(BCE) + T(ACF) + T(CH'I')] + [T(BCD) \\
&\quad + T(ABI) + T(BF'G')] + [T(ACG) + T(ABH) + T(AD'E')] - 2T_0 \\
&= [T(BCE) + T(BCD)] + [T(ACF) + T(ACG)] + [T(ABI) \\
&\quad + T(ABH)] + T(AD'E') + T(BF'G') + T(CH'I') - 2T_0 \\
&= T(BCDE) + T(ACGF) + T(ABHI) + T(AD'E') + T(BF'G') \\
&\quad + T(CH'I') - 2T_0 \\
&= T(AG'H') + T(BD'I') + T(CE'F') + T(AD'E') + T(BF'G') \\
&\quad + T(CH'I') - 2T_0 \\
&= T_2
\end{aligned}$$

Comments: The ratio of the common area of the hexagons to the area of $\triangle ABC$ (obtained in Solution 2, in terms of a, b, and c) has some interesting values. It is 13 when $\triangle ABC$ is equilateral and 14 when $\triangle ABC$ is similar to a 3-4-5 right triangle. Interested readers may wish to pursue an investigation of this ratio further.