PETI LETNIK — 1995–1996 – 1

DEL REVIJE

LOGIKA

&

RAZVEDRILNA MATEMATIKA

Revijo sta za splet pripravila Nada in Marko Razpet
na podlagi datotek, ki jih je izdelal Darjo Felda.

V S E B I N A

Logične naloge 3
Rešitve logičnih nalog 12
Dokazovanje v izjavnem računu 15
Dokaz 21
Matematična lingvistika 25
Matka – časopis za mlade matematike 33
Matematičko fizički list 38
Gobelin 40
Dve uganki 46
International Mathematical Talent Search 49

Izdaja: Založniško podjetje LOGIKA d.o.o., Svetčeva 11, 61240 Kamnik,
št. žiro računa: $50140 - 603 - 57434$

Za izdajatelja: Izidor Hafner

Revija *Logika & Razvedrilna matematika* je vpisana v register časopisov pri *Ministrstvu za informiranje* pod registrsko številko *949*. Po mnenju *Ministrstva za informiranje* št. *23/89–92* šteje revija *Logika & Razvedrilna matematika* med proizvode informativnega značaja, za katere se plačuje davek od prometa po stopnji 5%.

Revijo *Logika & Razvedrilna matematika* subvencionira *Ministrstvo za šolstvo in šport*

Člani časopisnega sveta: prof. dr. Frane Jerman, prof. dr. Tomaž Pisanski in Darjo Felda, prof.

Strokovni pokrovitelj: Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko – Oddelek za teoretično računalništvo

Glavni in odgovorni urednik: dr. Izidor Hafner

Sodelavci: Urša Demšar, Gregor Dolinar, Urška Drčar, Petra Ipavec, Alenka Kavčič, Dušanka Kocić, Katka Kurent, Meta Lah, Nina Milač, Nika Novak, Hiacinta Pintar, Maja Pohar, Darja Polak, Tanja Soklič, Mirjana Todorovič in Aleš Vavpetič

Jezikovni pregled: računalniški program *Besana*

Generalni sponzor: Marand d.o.o., zastopstvo Borland

Sponzorji: DZS d.d., Časopisno podjetje *Dnevnik*, NIL d.o.o.

Tisk: Tiskarna "Planprint", Rožna dolina c. IV/32–36, Ljubljana

Ilustrirala: Ana Hafner

Naklada: 3500 izvodov

© 1995 LOGIKA d.o.o.

ISSN $0354 - 0359$

LOGIKA & RAZVEDRILNA MATEMATIKA
letnik V, št. 1, $1995/96$

Cena revije: v prosti prodaji 330 SIT, za naročnike 295 SIT in vključuje 5% prometni davek

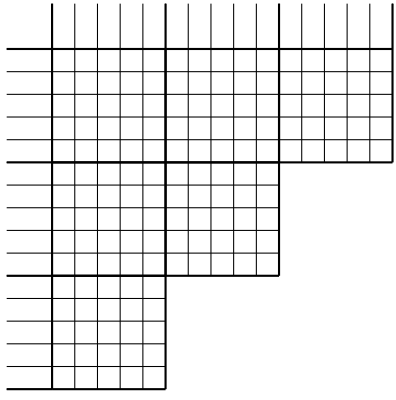
LOGIČNE NALOGE

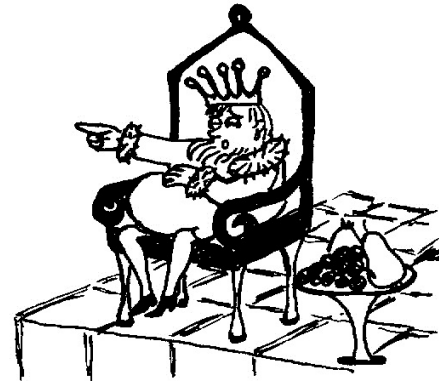
1. SREDNJI VEK

Vladar je imel v svoji srednjeveški državici zelo čudno ureditev. Sproti si je izmišljeval zakone, svoje ministre in podanike je zelo pogosto menjal in jih kazensko premeščal. O usodi peterice nesrečnih dvorjanov so našli zbledele zapiske, ki pa so jih žal obžrle miši. Kljub vsemu so uspeli razbrati nekaj podatkov. Lahko ugotoviš imena nesrečnikov, njihovo dvorno službo, koliko časa so jo opravljali in kam so bili kazensko premeščeni?

Dvorjani: Cencij, Dolfe, Činželj, Horacij, Vincenc
Dvorna služba: minister za umetnost, pokuševalec hrane, višji svetovalec, mojster za glasbo, nameščenec za šport
Čas opravljanja službe: 10 dni, 14 dni, 18 dni, 22 dni, 26 dni
Kazenska služba: čevljar, hlapec, pleskar, krojač, kovač

1. Nobenemu se ime ne začne na isto črko kot služba, v katero je bil kazensko premeščen.
2. Činželj je opravljal svojo dvorno službo manj časa kot Horacij in kot človek, ki je kazensko postal kovač.
3. Višji svetovalec, ki ni bil Horacij, je bil v dvorni službi 4 dni dlje kot mož, ki je potem postal krojač; vendar je bil hlapec v dvorni službi še dlje kot višji svetovalec.
4. Ne Cencij ne mož, ki je bil v dvorni službi samo 10 dni, ni bil minister za umetnost, ki je bil zaradi malomarnosti premeščen k pleskarjem.
5. Pokuševalec hrane je opravljal častno funkcijo 4 dni manj kot Vincenc.
6. Mojster za glasbo, ki je imel drugačen glasbeni okus kot vladar, je na tem mestu zdržal 8 dni več kot nameščenec, ki so ga ponižali v čevljarja. Dlje od obeh je bil v dvorni službi Dolfe, ki ni postal kovač.



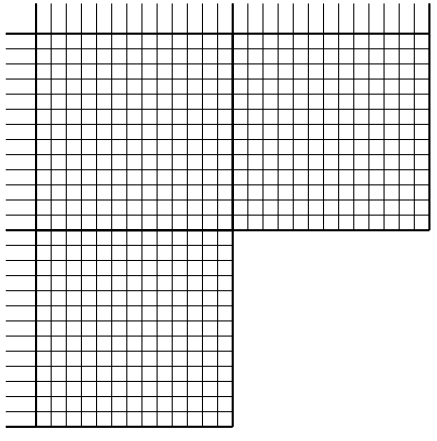


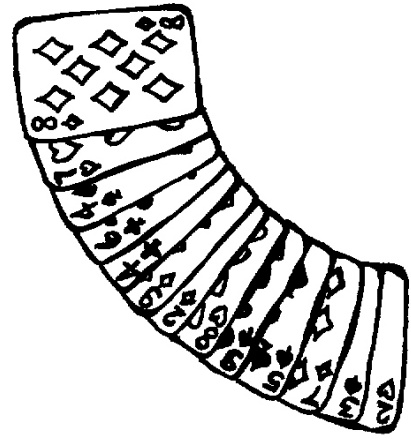
2. BRIDGE

Pri bridgeu se uporablja standardni (enojen) komplet kart, ki pa ne vsebuje asov, kraljev, dam, fantov in desetk. Eden izmed igralcev v roki drži 13 kart v istem vrstnem redu, kot jih je dobil. Ugotovi za vsako karto njeno vrednost in barvo.

Zaporedne št. kart: od 1 do 13, od leve proti desni
Vrednosti: od 2 do 9
Barve: rdeči – srce, kara črni – pik, križ

1. Med trinajstimi kartami je zastopanih vseh 8 možnih vrednosti. Nobena vrednost se ne pojavi več kot dvakrat. Edina podvojena parna vrednost je dvojka; ena dvojka je črna, druga, ki je karta št.1, pa je rdeča.
2. Karti z najvišjo vrednostjo sta srce in pik. Pikova karta z najvišjo vrednostjo, ki jo je igralec dobil kasneje kot zadnjo karo, ima za 6 višjo zaporedno številko kot srčeva najvišja karta.
3. Vsota vrednosti vseh štirih križev znaša 18; najnižji izmed križev ni karta št.8.
4. Karova osmica je karta z liho številko, karove sedmice pa ni med trinajstimi kartami.
5. Vsota vrednosti vseh treh pikov znaša 16; kot prvega pika je igralec dobil karto št.6, zadnja (13.) karta pa je prav tako pik. Karta št.13 je po vrednosti za eno nižja od karte št.6.
6. Karti 4 in 10 imata isto vrednost in sta ali obe rdeči ali obe črni.
7. Vsaka izmed štirih barv je med trinajstimi kartami zastopana z več kot dvema kartama.
8. Vsota vrednosti kart št.2 in 5 znaša 10; karta št.2 je višja od karte št.5.
9. Igralec ni nikoli dobil treh rdečih kart zapored. Dobil pa je dve srčevi karti eno za drugo.





3. ZLATA DEKLETA

V Ulici logikov živi šest simpatičnih deklet. Vsaka ima drugačen poklic, njihove hišne številke pa so od 1 do 6. Ugotovi za vsako dekle njeno ime, priimek, poklic in hišno številko!

1. Med gdč. Hrast in zdravnico stanuje natanko eno dekle. Sanja živi med gdč. Sulc in tajnico. Tinka, ki ni gdč. Cucelj, je soseda tajne agentke, ki pa ni gdč. Sulc.
2. Cvetkina hišna številka se za dve razlikuje od številke gdč. Egart. Sprevodnica nima št.6. Gdč. Trot je soseda gdč. Nobelove.
3. Številka gdč. Egart je za dve večja od Norine, Evina številka pa je za dve večja od ravnateljičine.
4. Številka gdč. Hrast je za tri manjša od številke tajne agentke. Sanjina številka je soda, tajna agentka pa ima liho hišno številko.
5. Gdč. Trot ne živi na št.6 in Eva se ne piše Egart. Eni izmed deklet je ime Hanka in ena izmed njih je po poklicu fotografinja.

Hišna št.	Ime	Priimek	Poklic
1			
2			
3			
4			
5			
6			

4. BARVNI SPEKTER

Soboslikar ima katalog, v katerem je strankam na izbiro 9 barv, označenih s številkami. Iz podatkov ugotovi razporeditev barv v tabeli 3×3.

Barve: rumena, zelena, bela, rjava, krem, peščena, opečnata, oker, siva

1. Oker, siva in peščena niso niti v zgornji vrsti niti v srednjem stolpcu. Nobena od barv, ki se začnejo s črko o, ni v levem stolpcu.
2. Rumena ima višjo številko kot zelena.
3. Bela je neposredno levo od rjave in neposredno nad krem barvo.
4. Peščena je v istem stolpcu kot opečnata, oker pa ni v isti vrsti kot siva.

1 _____	2 _____	3 _____
4 _____	5 _____	6 _____
7 _____	8 _____	9 _____

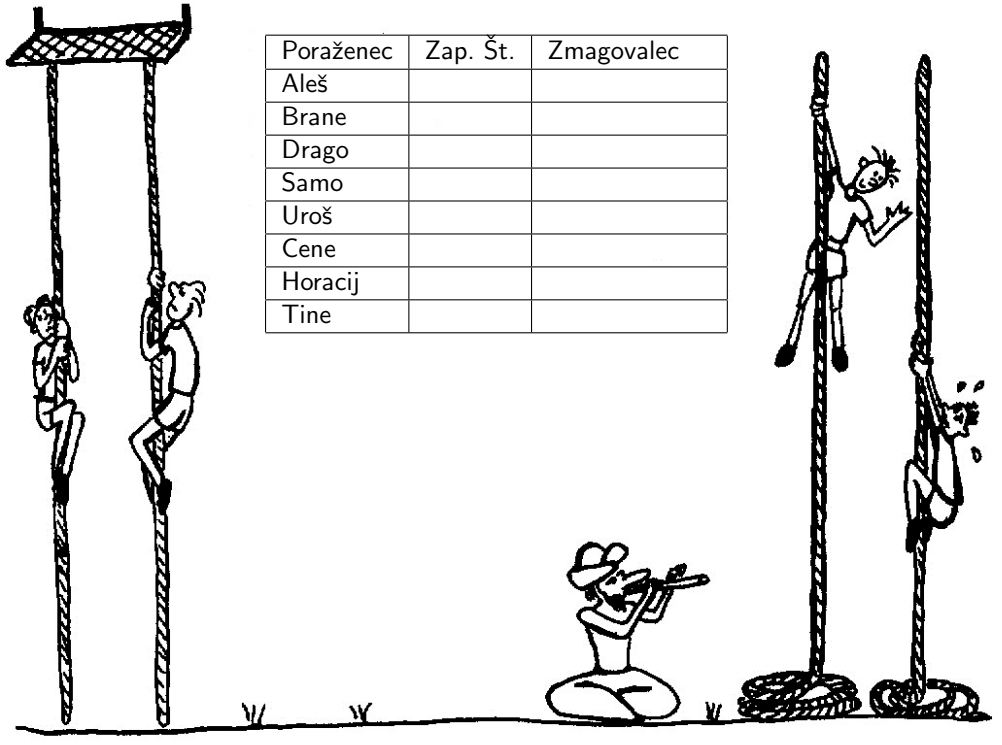
5. DVOBOJI

Šestnajst mladih fantov se je pomerilo v plezanju po vrvi. Ker niso imeli štoparice, sta vsakokrat plezala po dva fanta naenkrat; zmagovalec se je uvrstil v naslednje kolo, poraženec pa je izpadel. Iz spodnjih trditev ugotovi, kdo se je s kom pomeril v prvem kolu in v kakšnem vrstnem redu so potekali dvoboji.

Zaporedne številke: od 1 do 8
Poraženci: Aleš, Brane, Drago, Samo, Uroš, Cene, Horacij, Tine
Zmagovalci: Primož, Emil, Ivan, Janez, Nace, Matjaž, Zmago, Žiga

1. Cene ni sodeloval v šestem dvoboju.
2. Tineta, ki je tekmoval dve tekmi za Horacijem in neposredno pred Dragom, je premagal fant z daljšim imenom, kot ga ima Tine. V peti tekmi je imel zmagovalec krajše ime kot poraženec.
3. Zmago je premagal nasprotnika v tekmi s sodo zaporedno številko.
4. Emil je zmagal v prvi tekmi, Ivan pa je plezal dve tekmi pred Branetom.
5. Samo je plezal takoj za Alešem; oba sta tekmovala za Cenetom, ki je plezal pozneje kot Janez.
6. Žiga je premagal fanta, ki je plezal neposredno pred Matjažem. Oba poraženca v teh dveh tekmah imata ime iz štirih črk.

Poraženec	Zap. Št.	Zmagovalec
Aleš		
Brane		
Drago		
Samo		
Uroš		
Cene		
Horacij		
Tine		



6. RAZSTAVA KROŽNIKOV

Na posebnem mestu na razstavi krožnikov stojijo štirje najdražji. Ugotovi, kdaj je bil kateri od krožnikov narejen in ceno ter barvo vsakega izmed njih.

Barve: rdeč, rjav, črn, bel;
Letnice: 1720, 1740, 1760, 1780;
Cene: 90 $, 100 $, 110 $, 120 $.

1. Beli krožnik je cenejši od tistega iz leta 1720.
2. Krožnik A je bil narejen leta 1740.
3. Krožnik D stane 20 $ več kot črni krožnik, ki je bil narejen 1760.
4. Krožnik C je 20 $ cenejši kot rdeči.
5. Najdražji krožnik, ki ni rjav, ne stoji ob tistem, ki stane 100 $.

7. KNJIŽNE USPEŠNICE

Knjigarna Knjižni molj, ki je dobro poznana med ljubitelji knjig, vsak teden sestavi lestvico najbolje prodajanih knjig. Iz spodnjih trditev ugotovi vrstni red tega tedna ter poleg naslova še založnika in zvrst knjige.

Knjige: Bojevnik, Capin, Zlate oči, Tanek led, Sprehajalca;
Zvrsti: biografija, fantastika, ljubezenska zgodba, satira, kriminalka;
Založniki: Cankarjeva založba, Kmečki glas, Založba Obzorja, Mladinska knjiga, Didakta.

1. Kriminalka Tanek led ni na petem mestu lestvice.
2. Četrtouvrščeno knjigo so izdali pri Založbi Obzorja. Biografijo, ki ni na tretjem mestu, so izdali pri Didakti.
3. Zlate oči so izdali pri Cankarjevi založbi. Od prejšnjega tedna se je ta knjiga povzpela za tri mesta.
4. Capin ni na zadnjem mestu lestvice. Knjiga s tem naslovom ni ljubezenska zgodba in ni bila izdana pri Mladinski knjigi.
5. Delo Sprehajalca se je uvrstilo med knjigo, izdano pri Mladinski knjigi, in med fantastiko.
6. Ljubezenska zgodba, katere naslov ni Zlate oči, je na drugem mestu..

8. TV TEŽAVE

Darko je bil prejšnji teden (od ponedeljka do petka) zelo zaposlen, tako ni utegnil gledati pet svojih najljubših oddaj. Hotel jih je posneti na kasete, pa je bil vsakokrat spored nekoliko spremenjen. Lahko si mislite, kako je bil jezen, ko je namesto željenih na kasetah našel dolgočasne oddaje. Ugotovite, kaj je počel vsak večer, katere oddaje je nameraval posneti in katere je zares posnel.

Dnevi: ponedeljek, torek, sreda, četrtek, petek;
Obveznosti: poslovni sestanek, slavnostna večerja, koncert, trening, obiski;
Zamujene (najljubše) oddaje: Vesolje, TV drama, Kviz, nogomet, risanka;
Posnete (dolgočasne) oddaje: poročila, ČB film, srečanje državnikov, loto, Lojtrca domačih.

1. Darko je bil zelo razočaran, ko je na kaseti našel poročila namesto finalne oddaje kviza. To je bilo dan zatem, ko mu ni uspelo posneti oddaje o vesolju.
2. V četrtek je imela njegova zaročenka rojstni dan, zato jo je peljal ven na večerjo.
3. Darko skoraj vsako sredo gleda nogometno tekmo.
4. TV drama je bila na sporedu tistega dne, ko je Darko imel trening.
5. Žrebanje lota je bilo na sporedu tistega večera, ko se je Darko zabaval s svojimi obiskovalci. Tega dne ni odpadla oddaja o vesolju.
6. Koncert ni bil v ponedeljek, vendar je bil pred dnevom, ko je bila na sporedu Lojtrca domačih.
7. Petkov program so nadomestili s starim črnobelim filmom.

9. PRIKOLICE

Ob reki je postavljenih šest počitniških prikolic: A, B, C, D, E in F. Iz spodnjih trditev ugotovi priimek lastnikov, število družinskih članov in kraj, od koder prihajajo.

Prikolice: A, B, C, D, E, F;
Družine: Ahačič, Benedik, Jelen, Kepic, Lampič, Stare;
Št. oseb: 3, 3, 4, 4, 5, 5;
Kraji: Bled, Celje, Grosuplje, Hrastnik, Naklo, Velenje.

1. V vsaki izmed treh prikolic, ki so bliže reki (A, B, C), je drugačno število počitnikarjev. Nobena izmed teh prikolic ne pripada Ahačičevim.
2. Družina Stare, ki je prišla iz Velenja, ni v nobeni izmed prikolic B, D in F. Družina Stare je številčnejša od tiste iz Celja.
3. Družina iz Hrastnika je v prikolici A, vendar nima 5 članov.
4. V prikolici D, ki ni z Bleda, je več ljudi kot v Benedikovi prikolici.
5. Jelenova prikolica je označena s črko E.
6. V prikolici C je manj počitnikarjev kot v prikolici F.
7. Kepicevi, ki niso štirje, svoje prikolice niso postavili tik zraven reke.
8. Družina iz Grosupljega, ki pa ni Ahačič, ni v prikolici B.



10. ŠKANDALI

Čenča je urednica opravljive rubrike v nekem dnevniku. Prejšnji teden je od ponedeljka do petka vsak dan namigovala na novo skrito razmerje, ki ga je "zavohala". Seveda je pri tem zamolčala imena znanih osebnosti, da jim ne bi nakopala prevelikih težav. Iz spodnjih podatkov ugotovi za vsak dan, kateri dve osebnosti sta se pojavili v Čenčini rubriki in kje ju je Čenča videla skupaj.

Ženske: balerina, poslanka, prijateljeva žena, pevka, tajnica;
Moški: igralec, TV voditelj, nogometaš, industrialec, minister;
Kraj: stanovanje, hotel, pisarna, zabava, vikend;
Dan: ponedeljek, torek, sreda, četrtek, petek.

1. Zgodbica o ministru, ki se je s svojo ljubico skrival v pisarni, je bila objavljena en dan pred novico o balerininem razmerju.
2. Slavni nogometaš je bil obtožen tajnega razmerja s poslanko, ampak ne v petek.
3. Nekega moškega so zalotili, ko je skočil čez plot s prijateljevo ženo v svojem vikendu. Ta zgodba se je v časopisu pojavila pozneje kot tista o TV voditelju.
4. Čenča je par iz stanovanja v svoji rubriki obravnavala v četrtek.
5. Popularna pevka je bila v rubriki omenjena v torek, igralec pa v ponedeljek.
6. V sredo kot kraj dogajanja ni bil naveden hotel.



Rešitve logičnih nalog

1. SREDNJI VEK

minister za umetnost	Horacij	18 dni	pleskar
pokuševalec hrane	Činželj	10 dni	krojač
višji svetovalec	Vincenc	14 dni	čevljar
mojster za glasbo	Cencij	22 dni	kovač
nameščenec za šport	Dolfe	26 dni	hlapec

2. BRIDGE

Nobena vrednost se ne pojavi več kot dvakrat in vsaka je bila zastopana vsaj enkrat (1). Ker se je le ena parna vrednost pojavila dvakrat (1), ima igralec v roki podvojene vse štiri lihe vrednosti. Najvišji karti morata biti srčeva in pikova devetka (2). Vsota vrednosti preostalih dveh pikov mora biti enaka 7 ; to sta torej štirica in trojka (5). Karta št.6 je pikova štirica in karta št.13 pikova trojka (5). Štirje križi ne vključujejo devetke (3), zato ne morejo biti vsi lihi (to so lahko le trojka, petka in sedemka). Seštevek vrednosti križev je 18 – sodo število (3); seštevek treh lihih in enega sodega števila pa je liho število. Torej sta dva križa soda, dva pa liha. Osmica nastopa že pri kari, podvojena pa ni (1), zato je pri križih ni. Vemo, da ima štirica barvo pika. Sodi križevi karti sta torej dvojka in šestica. Vsota vrednosti lihih križev je 10 (3), to morata biti trojka in sedmica. Druga karta z vrednostjo 2 je morala biti rdeča (1). Pikova trojka je karta št.13; sedmica nastopa pri križu, pri piku pa ne. Ena izmed devetk je rdeča, druga črna (2). Karti št.4 in št.10, ki imata enake vrednosti in sta obe rdeči ali obe črni (6), morata biti petki (1). Ker nista bili črni, sta to srce in karo. Igralec ima vsaj tri karte vsake barve (7), torej ima tri srca in tri kare. Ima srčevo petko in devetko.

Izmed dveh sedmic je ena križeva; druga ni ne pikova niti karina (4), torej je srčeva. Karine karte pa so dvojka, petica in osmica. Karta št. 1 je karina dvojka (1). Karti št.2 in št.5 imata seštevek vrednosti 10 (trditev 8); nobena od njiju ne more biti srčeva devetka. Vemo, da je št.1 dvojka, št.4 petka in št.6 štirica; tako so mesta 7,8,10,11 in 12 izključena za pikovo devetko (2). Ker pikova devetka tudi ni bila na št.13, je morala biti na št.9, srčeva devetka pa na št.3. Kart št.2 in 5 imata skupni seštevek 10; to nista dve petki, edina štirica je na št.6, ne moreta pa niti biti osmica in dvojka, ker je št.2 višja od št.5 (8), karina osmica pa je na lihem mestu (4). Torej sta št.2 in 5 sedmica in križeva trojka (pikova trojka ima že določeno mesto). Igralec nikoli ni dobil treh rdečih kart zapored (9); št.1 je karo in št.3 srce, zato karta št.2 ni srčeva sedmica, ampak križeva sedmica. Pikova devetka je prišla pozneje kot zadnja karina karta (2), zato ima karina osmica št.7 in št.4 karina petka, št.10 pa ostane za srčevo petko (4). Srčeva sedmica mora biti na št.11 (9), saj jo je igralec dobil takoj za srčevo petko. Križeva dvojka, ki ni št.8 (3), je tako št.12, križevi šestici pa ostane št.8.

št. karte	vrednost	barva
1	2	karo
2	7	križ
3	9	srce
4	5	karo
5	3	križ
6	4	pik
7	8	karo

št. karte	vrednost	barva
8	6	križ
9	9	pik
10	5	srce
11	7	srce
12	2	križ
13	3	pik

3. ZLATA DEKLETA

1	Nora	Sulc	sprevodnica
2	Sanja	Hrast	ravnateljica
3	Hanka	Egart	tajnica
4	Eva	Cucelj	zdravnica
5	Cvetka	Trot	tajna agentka
6	Tinka	Nobel	fotografinja

4. BARVNI SPEKTER

1	bela
2	rjava
3	opečnata
4	krem
5	zelena
6	oker
7	siva
8	rumena
9	peščena

5. DVOBOJI

Prvo tekmo je dobil Emil (4); Cene torej ni mogel sodelovati prej kot v tretji tekmi, saj je plezal za Janezom (5). Cene ni plezal v šesti (1), peti (2), sedmi ali osmi tekmi (5); sodeloval je v tretji ali četrti tekmi. Prvi in drugi poraženec nista Tine in Drago (2), niti ne Brane (4), Aleš ali Samo (5). To morata biti Uroš in Horacij. Tine je sodeloval v tekmi 3 ali 4, Drago pa v 4 ali 5; v tekmi 4 ni mogel biti poražen nihče drug kot eden izmed njiju (2). Zato je Cene plezal v tekmi 3, Tine v 4 in Drago v 5. Tineta ni premagal Ivan (2), zato Brane ni plezal v 6.tekmi (4). Tudi Samo ni bil poražen v 6.tekmi (5), torej je bil to Aleš. Samo je bil poražen v sedmi tekmi (5), Brane pa v osmi. Ker je Tine sodeloval v tekmi 4, je Horacij v osmi (2), Uroša pa je v prvi tekmi premagal Emil. Janez je premagal Horacija (5), Ivan pa Aleša (4). Drago je plezal počasneje kot njegov tekmec s krajšim imenom (2); zmagovalec te tekme ni bil Žiga (6), torej je bil Nace. Preostala poraženca z imenom iz štirih črk sta Cene in Tine; Žiga je premagal Ceneta (6), Matjaž pa Tineta. Zmago je slavil v tekmi s sodo zaporedno številko (3), premagal je Braneta. Samo pa je plezal počasneje od Primoža.

Poraženec	Zap. št.	Zmagovalec
Aleš	6	Ivan
Brane	8	Zmago
Drago	5	Nace
Samo	7	Primož
Uroš	1	Emil
Cene	3	Žiga
Horacij	2	Janez
Tine	4	Matjaž

6. RAZSTAVA KROŽNIKOV

Krožniki	Barve	Letnice	Cene
A	rdeč	1740	120 $
B	črn	1760	90 $
C	bel	1780	100 $
D	rjav	1720	110 $

7. KNJIŽNE USPEŠNICE

1. Zlate oči	fantastika	Cankarjeva založba
2. Sprehajalca	ljubezenska zgodba	Kmečki glas
3. Tanek led	kriminalka	Mladinska knjiga
4. Capin	satira	Založba Obzorja
5. Bojevnik	biografija	Didakta

8. TV – TEŽAVE

ponedeljek	poslovni sestanek	Vesolje	sestanek državnikov
torek	koncert	Kviz	poročila
sreda	obiski	nogomet	loto
četrtek	slavnostna večerja	risanka	Lojtrca domačih
petek	trening	TV drama	ČB film

9. PRIKOLICE

A	Benedik	Hrastnik	3 ljudje
B	Lampič	Bled	5 ljudi
C	Stare	Velenje	4 ljudje
D	Ahačič	Naklo	4 ljudje
E	Jelen	Celje	3 ljudje
F	Kepic	Grosuplje	5 ljudi

10. ŠKANDALI

ponedeljek	igralec	tajnica	hotel
torek	minister	pevka	pisarna
sreda	TV voditelj	balerina	zabava
četrtek	nogometaš	poslanka	stanovanje
petek	industrialec	prijateljeva žena	vikend

Tanja in Tomi Soklič

DOKAZOVANJE V IZJAVNEM RAČUNU

Ta članek je bil osnova za izdelavo programirane učne ure logike. Po snovi se nanaša na tisti del izjavnega računa, ki je bil v učnem programu logike za usmerjeno izobraževanje.

V tem članku pravila sklepanja delimo na dve skupini: na pravila uvedbe (introdukcije) in pravila opustitve (eliminacije). V smislu te delitve se oznake, ki jih tu uporabljamo, razlikujejo od oznak v knjigi *Matematika, logika* avtorjev V. Batagelja in I. Hafnerja.

Sistem naravne dedukcije

V tej lekciji se bomo ukvarjali z dokazovanjem in izpeljevanjem v izjavnem računu. Pri **dokazovanju** želimo pokazati, da je dana izjava **tavtologija**, pri **izpeljevanju** pa, da neka izjava B **logično sledi** iz danih **predpostavk** A_1, ..., A_n. Pri tem moramo vsak korak utemeljiti – povedati moramo, katero pravilo sklepanja smo uporabili. Vsak korak zapisujemo v novo vrstico, ki jo zaznamujemo s številko, da se kasneje lahko nanjo sklicujemo.

Izjavne povezave, ki jih uporabljamo, so:

KONJUNKCIJA	$A \wedge B$	(A in B)
DISJUNKCIJA	$A \vee B$	(A ali B)
NEGACIJA	$\neg A$	(ni res, da je A)
IMPLIKACIJA	$A \Rightarrow B$	(če A, potem B)

Z izjavo $A \wedge B$ trdimo, da velja tako A kot B. Izjava $A \wedge B$ ni resnična, če vsaj ena od izjav A oz. B ni resnična.

Z izjavo $A \vee B$ trdimo, da je resnična vsaj ena izmed izjav A oz. B. Izjava $A \vee B$ ni resnična, če sta obe izjavi A in B neresnični.

Z izjavo $\neg A$ trdimo, da izjava A ni resnična. Izjava $\neg A$ ni resnična, če je A resnična izjava.

Izjava $A \Rightarrow B$ je resnična, če je A neresnična ali če je B resnična izjava. Izjava $A \Rightarrow B$ ni resnična, če je A resnična, B pa ni resnična izjava.

Kot primer pravila sklepanja vzemimo naslednje pravilo:

$$\begin{array}{ll} N_1 & .\neg A \\ N_2 & .B \\ N_3 & .\neg B \\ \hline & A \end{array}$$

Pri pogoju, da je resnična dodatna predpostavka $\neg A$ (zapisana v vrstici N_1), sta resnični izjavi B (vrstica N_2) in $\neg B$ (vrstica N_3). To pa je protislovje, zato je resnična izjava A. Ko k izpeljavi zapišemo še izjavo A, dodamo še razlago N_1, N_2, N_3, $E\neg$, ki pravi, da smo novo vrstico dobili iz vrstic N_1, N_2, N_3 s pravilom sklepanja $E\neg$, to je z eliminacijo (E) negacije ($\neg$).

Primer: dokaz izjave $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

1	$.\neg A \Rightarrow \neg B$	DP
2	$..B$	DP
3	$...\neg A$	DP
4	$...\neg B$	3, 1 $E\Rightarrow$
5	$..A$	3, 2, 4 $E\neg$
6	$.B \Rightarrow A$	2, 5 $I\Rightarrow$
7	$(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$	1, 6 $I\Rightarrow$

Prve tri vrstice v dokazu so dodatne predpostavke (razlaga DP). Pred vsako dodatno predpostavko smo dodali piko. Izjava, pred katero je N pik, je resnična pri pogoju, da so resnične vse dodatne predpostavke, ki uvajajo 1, 2, ..., N pik.

Če uvedemo dodatno predpostavko z N pikami, potem z njo ukinjamo veljavnost predpostavk, ki so pred to uvedle večje število pik, ohranja pa se veljavnost predpostavk, ki imajo manjše število pik. Ta možnost v našem prvem primeru ne nastopa, srečali pa jo bomo v drugem primeru.

Množica izjav, pred katerimi je N pik, je domena predpostavke, ki pred temi izjavami uvaja N pik. Množica izjav, pred katerimi je $N+1$ pika, je neposredna poddomena; množica izjav, pred katerimi je $N-1$ pik pa neposredna naddomena dodatne predpostavke, ki uvaja N pik.

Ničelna domena je množica izjav, pred katerimi ni pik. To so resnične izjave, ki so bodisi dane v formulaciji naloge ali pa logično sledijo iz teh izjav.

Vrstico 4 smo dobili iz vrstic 3 in 1 s pravilom eliminacije (opustitve) implikacije ($E\Rightarrow$), ki pravi, da iz resničnosti izjav A in $A \Rightarrow B$ sledi resničnost izjave B. V našem primeru, da iz $\neg A$ in $\neg A \Rightarrow \neg B$ sledi $\neg B$.

Vrstico 5 smo dobili iz vrstic 3, 2 in 4 (pazi na vrstni red!) po pravilu eliminacije negacije ($E\neg$). Pri pogoju resničnosti dodatne predpostavke $\neg A$ (vrstica 3), sta namreč resnični tako izjava B (vrstica 2) kot izjava $\neg B$ (vrstica 4). To je protislovje. Zato je resnična izjava A v neposredni naddomeni predpostavke $\neg A$. Iz tega vzroka ena pika manj pred izjavo A.

Pri pogojih resničnosti izjave B (vrstica 2) smo izpeljali izjavo A (vrstica 5). Zato izjava $B \Rightarrow A$ nastopa v neposredni naddomeni predpostavke B. To je pravilo priključitve (uvedbe, introdukcije) implikacije ($I\Rightarrow$). Zato razlaga za peto vrstico: $2, 5\ I\Rightarrow$. Podobno imamo za zadnjo vrstico: $1, 6\ I\Rightarrow$.

Če moramo pokazati, da iz izjav A_1, ..., A_n logično sledi izjava B, najprej predpostavimo, da so resnične izjave A_1, ..., A_n. To so predpostavke ali premise sklepanja. Zato jih zaznamujemo s PR. Pred njimi ne stoji nobena pika.

Dejstvo, da iz izjav A_1, ..., A_n logično sledi izjava B, zapišemo

$$A_1, ..., A_n \models B$$

v posebnem primeru (kadar nimamo premis), pa

$$\models B$$

To pomeni, da je B vedno resnična izjava, ali, drugače rečeno, *tavtologija*.

Za vsako izjavno povezavo bomo vzeli po dve pravili sklepanja (lahko pa bi jih imeli tudi več). Eno pravilo bo povedalo, kako neko izjavno povezavo **uvedemo**, drugo pa, kako se je **znebimo** – kako jo eliminiramo. Naslednja tabela podaja shematično vsa pravila sklepanja in okrajšave, ki jih zapisujemo pri obrazložitvi izpeljave N, N_1 – N_5 so oznake vrstic, ki pa niso nujno različne.

UVEDBA (INTRODUKCIJA)	OPUSTITEV (ELIMINACIJA)
$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}$ $N_1,\ N_2\ \ I\wedge$	$\dfrac{A \wedge B}{A}$ $\qquad$ $\dfrac{A \wedge B}{B}$ $N\ E\wedge$
$\dfrac{A}{A \vee B}$ $\qquad$ $\dfrac{B}{A \vee B}$ $N\ I\vee$	$\dfrac{\begin{array}{ll} & .A \quad .B \\ A \vee B & .C \quad .C \end{array}}{C}$ $N_1,\ N_2,\ N_3,\ N_4,\ N_5\ \ E\vee$
$\dfrac{\begin{array}{l} .A \\ .B \\ .\neg B \end{array}}{\neg A}$ $N_1,\ N_2,\ N_3\ \ I\neg$	$\dfrac{\begin{array}{l} .\neg A \\ .B \\ .\neg B \end{array}}{A}$ $N_1,\ N_2,\ N_3\ \ E\neg$
$\dfrac{\begin{array}{l} .A \\ .B \end{array}}{A \Rightarrow B}$ $N_1,\ N_2\ \ I\Rightarrow$	$\dfrac{A \quad A \Rightarrow B}{B}$ $N_1,\ N_2\ \ E\Rightarrow$

Pri obrazložitvi vrstice torej nastopa deset možnosti:

$I\wedge$ Pravilo uvedbe (I) konjunkcije ($\wedge$) pravi, da lahko dodamo k izpeljavi izjavo $A \wedge B$, če že imamo izjavi A (vrstica N_1) in B (vrstica N_2). Razlago zapišemo $N_1,\ N_2\ \ I\wedge$.

$E\wedge$ Pravilo opustitve (E) konjunkcije pravi, da lahko k izpeljavi dodamo izjavo A ali pa izjavo B, če smo že izpeljali izjavo $A \wedge B$ (vrstica N). Razlago okrajšano zapišemo $N\ \ E\wedge$.

$I\vee$ Pravilo uvedbe (I) disjunkcije ($\vee$) pravi, da lahko k izpeljavi dodamo izjavo $A \vee B$, če smo že izpeljali izjavo A ali pa B (vrstica N). Razlago zapišemo $N\ \ I\vee$.

$E\vee$ Pravilo opustitve (E) disjunkcije ($\vee$) pravi, da lahko k izpeljavi dodamo izjavo C, če smo že izpeljali izjavo $A \vee B$ (vrstica N_1), da smo pri dodatni predpostavki A (vrstica N_2) izpeljali C (vrstica N_3) in da smo pri dodatni predpostavki B (vrstica N_4) izpeljali C (vrstica N_5). Razlaga: $N_1,\ N_2,\ N_3,\ N_4,\ N_5\ \ E\vee$.

$I\neg$ Pravilo uvedbe (I) negacije ($\neg$) pravi, da lahko k izpeljavi dodamo izjavo $\neg A$ pri pogoju, da pri dodatni predpostavki A veljata izjavi B (vrstica N_2) in $\neg B$ (vrstica N_3). Razlaga je: $N_1,\ N_2,\ N_3,\ \ I\neg$.

$E\neg$ Pravilo opustitve (E) negacije ($\neg$) pravi, da lahko k izpeljavi dodamo izjavo A, če pri dodatni predpostavki $\neg A$ (vrstica N_1) veljata tako B (vrstica N_2) kot $\neg B$ (vrstica N_3). Razlaga je: $N_1,\ N_2,\ N_3\ \ E\neg$.

$I\Rightarrow$ Pravilo uvedbe (I) implikacije ($\Rightarrow$) dovoljuje, da k izpeljavi dodamo izjavo $A\Rightarrow B$, če smo pri dodatni predpostavki (DP) A (vrstica N_1) izpeljali B (vrstica N_2). Razlaga je: $N_1,\ N_2\ \ I\Rightarrow$.

$E\Rightarrow$ Pravilo opustitve (E) implikacije ($\Rightarrow$) pravi, da lahko k izpeljavi dodamo izjavo B, če smo že izpeljali izjavi A (vrstica N_1) in $A\Rightarrow B$ (vrstica N_2). Razlaga je: $N_1,\ N_2,\ \ E\Rightarrow$.

DP Dodatna predpostavka (DP) nastopa, kadar rečemo: predpostavimo, da velja tudi A. Pred A je zapisano nekaj pik, kar pomeni, da smo že privzeli tiste izjave, ki uvajajo manjše število pik. Razlaga je: DP.

PR Predpostavke ali premise (PR) so tiste izjave, ki jih na začetku privzamemo za resnične. Pred njimi ni nobene pike. Izjave, ki logično sledijo iz premis, so zato tudi resnične. Razlaga je: PR.

Primer: $A \Rightarrow \neg B$, $A \Rightarrow \neg C$, $\neg C \Rightarrow A$, $B \vee C \models \neg A \wedge C$.

Dokaz.

1	$A \Rightarrow \neg B$	PR
2	$A \Rightarrow \neg C$	PR
3	$\neg C \Rightarrow A$	PR
4	$B \vee C$	PR
5	$.B$	DP
6	$..A$	DP
7	$..\neg B$	6, 1 $E\Rightarrow$
8	$.\neg A$	6, 5, 7 $I\neg$
9	$.C$	DP
10	$..A$	DP
11	$..\neg C$	10, 2 $E\Rightarrow$
12	$.\neg A$	10, 9, 11 $I\neg$
13	$\neg A$	4, 5, 8, 9, 12 $E\vee$
14	$.\neg C$	DP
15	$.A$	14, 3 $E\Rightarrow$
16	C	14, 15, 13 $E\neg$
17	$\neg A \wedge C$	13, 16 $I\wedge$

Vaja: Preberi dokaz in razlago.

Če dodamo še dodatna pravila sklepanja, se nam bodo dokazi še skrajšali. Toda že ta sistem dokazovanja se kar dobro ujema z vsakdanjim dokazovanjem v matematiki, zato mu tudi rečemo *sistem naravne dedukcije*. Drugo ime za takšno dokazovanje je *metoda supozicije ali predpostavke*, zaradi značilnega dokazovanja, ko rečemo *"pa recimo, da velja A"*, in nato sklepamo tako, da upoštevamo tudi to dodatno predpostavko.

Računalniški program naj bi bil narejen tako, da mora učenec vpisati razlago za dani dokaz oz. izpeljavo. Če naredi napako, se mu v pomoč na ekranu izpišejo pravila sklepanja; nato mora ponovno vpisati razlago.

Naloge

1. Dopolni izpeljave z razlago:

a)

1	$A \Rightarrow B$	?
2	$C \Rightarrow D$	?
3	$.A \wedge C$	?
4	$.A$	?
5	$.C$	?
6	$.B$	?
7	$.D$	?
8	$.B \wedge D$	?
9	$A \wedge C \Rightarrow B \wedge D$	?

b)

1	$A \Rightarrow B$	?
2	$C \Rightarrow D$	?
3	$A \vee C$	?
4	$.A$	?
5	$.B$	?
6	$.B \vee D$	?
7	$.C$	?
8	$.D$	?
9	$.B \vee D$	?
10	$B \vee D$	?

c)

1	$A \Rightarrow B$	?
2	$A \Rightarrow C$	?
3	$\neg B \vee \neg C$	?
4	$.\neg B$	?
5	$..A$	?
6	$..B$	?
7	$.\neg A$	?
8	$.\neg C$	?
9	$..A$	?
10	$..C$	?
11	$.\neg A$	?
12	$\neg A$	?

2. Dopolni izpeljave:

a)

1	$A \Rightarrow B$	?
2	$B \Rightarrow C$	?
3	?	DP
4	?	3, 1 $E\Rightarrow$
5	?	4, 2 $E\Rightarrow$
6	$A \Rightarrow C$	3, 5 $I\Rightarrow$

b)

1	$\neg A$	?
2	$A \vee B$	?
3	?	DP
4	?	DP
5	?	4, 3, 1 $E\neg$
6	?	DP
7	B	2, 3, 5, 6, 6 $E\vee$

c)

1	$A \wedge \neg B$	?
2	$C \Rightarrow B$	?
3	$\neg B \wedge (C \vee A)$	?
4	A	?
5	$\neg B$	?
6	$C \vee A$	?
7	$.C$	?
8	?	7, 2 $E\Rightarrow$
9	?	7, 8, 5 $I\neg$
10	?	4, 5 $I\wedge$
11	$(A \wedge \neg B) \wedge \neg C$	?

Izidor Hafner

D O K A Z

Bralce, ki jih zanima reševanje logičnih ugank, je prav gotovo razveseljevala knjiga *Alica v deželi ugank* ameriškega logika Raymonda Smullyana.

Liki iz *Alice v čudežni deželi* in *Alice v ogledalu* (obe imamo v slovenskem prevodu) angleškega pisatelja, logika in matematika Lewisa Carrolla nastopajo v *Alici v deželi ugank* v skoraj sto logičnih ugankah. Tu so uganke za desetletnike in za odrasle, vsak lahko najde kaj zase.

Znani ameriški sestavljalec ugank Martin Gardner za to knjigo pravi, da se jo splača prebrati celo, če ne bi rešili niti ene same uganke. Torej gre za povest z ugankami.

Za naše nadaljnje delo izpustimo dogodke in povzemimo le nekaj ugank iz tretjega poglavja, ki niso pretežke. Za vse te uganke velja, da so osebe, ki nastopajo v njih, bodisi popolnoma nore (vse, kar je prav, je zanje napačno in vse napačno je zanje pravilno) ali pa zdrave pameti (tisto, kar mislijo, je stoodstotno pravilno). Ugotoviti moramo, kako je z zdravjem likov, ki nastopajo v uganki.

1. Gosenica in kuščar

Gosenica misli, da sta ona in kuščar Bill oba nora.

2. Kuharica in mačka

Kuharica meni, da ona in mačka nista obe pri zdravi pameti.

3. Lakaj ribak in lakaj žabec

Ribak misli, da je z njim in žabcem enako – le da sta oba pri zdravi pameti ali oba nora.

R E Š I T V E

1. Če je gosenica pri zdravi pameti, potem je tisto, kar pravi, to je, da sta oba – ona in kuščar Bill – nora, resnica, in obratno: če sta oba nora, potem ima gosenica prav.

Vzemimo, da je gosenica pri zdravi pameti. Torej sta tako ona kot kuščar Bill nora. To pomeni, da je gosenica nora. To pa je nemogoče (da je gosenica pri pameti in še nora). Zato je predpostavka, da je gosenica pri pameti, napačna.

Vzemimo, da je Bill nor. Ker je gosenica nora, sta oba nora. Potem je res, kar meni gosenica, to je, da sta oba nora. Torej je gosenica pri zdravi pameti. To pa ni možno, zato je predpostavka, da je Bill nor, napačna. Bill je torej pri zdravi pameti.

Torej: Bill je popolnoma zdrav, gosenica pa nora.

Zdaj prepišimo ta dokaz nekoliko drugače, predvsem vsak stavek v svojo vrstico, tiste stavke, ki so odvisni od dodatne predpostavke (ko npr. rečemo: *Vzemimo, da je gosenica pri zdravi pameti*), umaknimo za eno mesto, ki ga zaznamujemo z $\star$.

1. Če je gosenica pri zdravi pameti, potem sta ona in Bill oba nora (dani podatek).
2. Če sta ona in Bill oba nora, potem je gosenica pri zdravi pameti (dani podatek).
3. $\star$ Recimo, da je gosenica pri zdravi pameti (dodatna predpostavka).
4. $\star$ Potem sta oba nora (sledi iz 3 in 1).
5. $\star$ Gosenica je torej nora (sledi iz 4).
6. Gosenica je torej v resnici nora (pri predpostavki, da je gosenica pri zdravi pameti, velja, da je tako pri pravi kot nora, to pa je protislovje, zato je nora.)
7. $\star$ Vzemimo, da je Bill nor (dodatna predpostavka).
8. $\star$ Potem pa sta oba nora (sledi iz 6 in 7).
9. $\star$ Torej je res, kar meni gosenica (sledi iz 8 in 2) - to pa ni mogoče, saj je gosenica nora, zato:
10. Bill ni nor.
11. Končno: Bill je pri zdravi pameti, gosenica pa je nora (sledi iz 10 in 6).

Formalizirajmo dokaz še v izjavnem računu. Zato uvedimo naslednje enostavne izjave

$G \equiv$ Gosenica je pri zdravi pameti.
$B \equiv$ Kuščar Bill je pri zdravi pameti.

Izpeljava poteka takole:

1	$G \Rightarrow \neg G \wedge \neg B$	PR
2	$\neg G \wedge \neg B \Rightarrow G$	PR
3	$.G$	DP
4	$.\neg G \wedge \neg B$	3, 1 $E\Rightarrow$
5	$.\neg G$	4 $E\wedge$
6	$\neg G$	3, 3, 5 $I\neg$
7	$.\neg B$	DP
8	$.\neg G \wedge \neg B$	6, 7 $I\wedge$
9	$.G$	8, 2 $E\Rightarrow$
10	B	7, 9, 6 $E\neg$
11	$B \wedge \neg G$	10, 6 $I\wedge$

Pokazali smo, da iz premis (PR) oz. predpostavk 1 in 2 logično sledi zaključek 11. To zapišemo tudi takole:

$$G \Rightarrow \neg G \wedge \neg B, \quad \neg G \wedge \neg B \Rightarrow G \ \models\ B \wedge \neg G$$

Izjava 3 je dodatna predpostavka (DP) ali dodatni pogoj. Če privzamemo še to predpostavko, sledi izjava 4 in to iz izjav 3 in 1 po pravilu eliminacije implikacije (zato oznaka 3, 1 $E\Rightarrow$). Izjava 5 sledi iz 4 po pravilu eliminacije (opustitve) konjunkcije (zato 4 $E\wedge$).

Pri dodatnem pogoju G (vrstica 3) veljata tako G (vrstica 3) kot $\neg G$ (vrstica 5). To pa je protislovje. Zato G ne drži, to pomeni, da drži $\neg G$.

Vrstica 7 je dodatna predpostavka. Vrstica 8 sledi iz vrstic 6 in 7 po pravilu uvedbe ali introdukcije konjunkcije. Zato pojasnilo 6, 7 $I\wedge$. Vrstica 9 sledi iz 8 in 2 po pravilu eliminacije implikacije (zato 8, 2 $E\Rightarrow$). Pri pogoju $\neg B$ sta resnični tako G (vrstica 9) kot $\neg G$ (vrstica 6). To pa je protislovje, zato velja B. Pojasnilo je 7, 9, 6 $E\neg$, saj smo negacijo odpravili.

Vrstica 11 sledi iz 10 in 6 z introdukcijo (uvedbo) konjunkcije. Zato 10, 6 $I\wedge$.

2.
1. Če kuharica govori resnico, vsaj ena od njiju laže. (Pogoj naloge.)
2. Obratno: Če ena od njiju laže, je kuharica pri zdravi pameti. (Pogoj.)
3. ⋆ Pa recimo, da je kuharica nora. (Predpostavka ali supozicija.)
4. ⋆ Potem je seveda vsaj ena od obeh nora in zato vedno laže.
5. ⋆ Tedaj pa je kuharica pri zdravi pameti. (Sledi iz 4 in 2.)
6. Torej je kuharica pri zdravi pameti. (Saj smo pri nasprotni predpostavki, da je nora, prišli do protislovja.)
7. Potem pa vsaj ena od njiju ni pri zdravi pameti. (Sledi iz 1.)
8. Ker pa je kuharica pri zdravi, mora biti mačka nora.
9. Kuharica je torej pri zdravi pameti, mačka pa je nora.

Za formalizacijo druge naloga uvedimo oznake:

$K \equiv$ Kuharica je pri zdravi pameti.
$M \equiv$ Mačka je pri zdravi pameti.

Izpeljava poteka takole:

1	$K \Rightarrow \neg K \vee \neg M$	PR
2	$\neg K \vee \neg M \Rightarrow K$	PR
3	$.\neg K$	DP
4	$.\neg K \vee \neg M$	3 $I\vee$
5	$.K$	4, 2 $E\Rightarrow$
6	K	3, 5, 3 $E\neg$
7	$\neg K \vee \neg M$	6, 1 $E\Rightarrow$
8	$\neg M$	6, 7 $(A,\ \neg A \vee B \models B)$
9	$K \wedge \neg M$	6, 8 $I\wedge$

3. Iz danih podatkov ni mogoče sklepati, kaj je z ribakom, lahko pa izpeljemo, da je žabec pri zdravi pameti:

Ribak je bodisi pri pravi ali pa nor.
⋆ Recimo, da je ribak pri pravi.
⋆ Potem je tudi žabec pri pravi. (Saj ribak govori resnico in pravi, da sta oba istega tipa.)
⋆ Sedaj pa predpostavimo, da je ribak nor.
⋆ Potem pa je žabec pri pravi. (Saj sta različnih vrst, ribak pa je nor.)
Žabec je torej pri pravi.

Označimo:

$R \equiv$ Ribak je pri pravi.
$Ž \equiv$ Žabec je pri pravi.

1.	$R \Leftrightarrow (R \Leftrightarrow \check{Z})$	(pogoj naloge)
2.	$R \vee \neg R$	(to je vedno res)
3.	$.R$	(dodatna predpostavka)
4.	$.R \Leftrightarrow \check{Z}$	(sledi iz 3 in 1 po $A,\ A \Leftrightarrow B \models B$)
5.	$.\check{Z}$	(sledi iz 3 in 4)
6.	$.\neg R$	(dodatna predpostavka)
7.	$.\neg(R \Leftrightarrow \check{Z})$	(sledi iz 6 in 1)
8.	$.\check{Z}$	(sledi iz 6 in 7 po zakonu $\neg A,\ \neg(A \Leftrightarrow B) \models B$)
9.	$\check{Z}$	(sledi iz 2, 3, 5, 6, 8)

Pri reševanju smo uporabili še dve novi pravili sklepanja.

Izidor Hafner

KEMIKI IN ELEMENTI

Ljudje smo kemijo uporabljali že od nekdaj. Že v predantiki so poznali nekaj elementov, kasneje (v 18. stoletju) pa so jih že "množično" odkrivali in imenovali.

Znanstveniki *J. Priestly*, *H. Cavendish*, *M. Curie* in *M. Perey* so odkrili štiri elemente: Po (polonij), O (kisik), H (vodik), Fr (francij) v letih 1766, 1772, 1898 in 1939. Prva dva znanstvenika sta moška, ostali dve pa ženski. Kdaj in kdo je odkril navedene elemente?

To ugotovite s pomočjo naslednjih trditev:

1. Marie Curie se je rodila leta 1867. Odšla je v Francijo in se tam poročila s Pierrom – prav tako znanstvenikom. Umrla je leta 1934.
2. Francij je odkrila ženska in ga leta 1947 imenovala po svoji (rojstni) domovini.
3. Vodik in kisik sta bila odkrita v istem obdobju.
4. Priestly je odkril svoj element kasneje, kot je bil odkrit vodik.

MATEMATIČNA LINGVISTIKA

Od leta 1982 v Bolgariji potekajo tekmovanja v matematični in računalniški lingvistiki. Običajno se zastavijo trije problemi, ki jih je treba rešiti v 4 urah. Naloge niso standardne, vsebujejo potrebne informacije za rašitev in ne zahtevajo posebnega predznanja. Predpostavlja se, da imajo dijaki dobro lingvistično osnovo, da so sposobni logično misliti in da pristopajo problemom hevristično. Tekmovanja se udeležujejo učenci od 13 do 18 leta starosti.

Zastavljene probleme lahko razvrstimo v 6 skupin:
1) prevajanje
2) števniki
3) koledar in čas
4) dekodiranje
5) enostavni raziskovalni problemi računalniške lingvistike
6) lingvistični problemi kombinatorične in logične narave

Tule je nekaj zgledov:

1. Problemi prevajanja

Problemi prevajanja so lahko na ravni besed ali stavkov. V prvem primeru je dano n ($n \geq 2$) besed in njihovih prevodov v neznan jezik, vendar v drugem vrstnem redu. Najti je treba dejansko prireditev. V drugem primeru je običajno dano n ($n \geq 2$) stavkov in njihovih prevodov, iz katerih moramo izpeljati različne morfološke, sintaktične in semantične lastnosti neznanega jezika. Na osnovi tega je potrebno prevesti nekaj stavkov v neznan jezik.

Problem 1. Spodaj so zapisane besede v starodavnem indijskem jeziku *sanskritu* in njihovi prevodi v angleščino, toda v drugem vrstnem redu:

yah, tatha, sarvatra, ekah, yada, tatra, yatra, sarvah
everywhere, where, everybody, when, who, so, there, (the) same one

a) Poišči korespondenco.
b) Prevedi v sanskrit: always, in every way, how, simultaneously, then.

Rešitev: Takšne in podobne probleme najlaže rešujemo z ureditvijo besed v tabele. Besede znanega jezika uredimo glede na pomen ali funkcijo, besede neznanega jezika pa po skupnih korenih, priponah in predponah. Besede v angleščini po pomenu razvrstimo glede kraja (where, there, everywhere), načina (so), časa (when) in osebe (who, everyone, same one), vprašalne zaimke (neznano) (when, where, who), zaimke, ki izražajo splošnost (everyone, everywhere), konkretnost (so, there) ali identičnost (same one). Tako lahko zgradimo tabeli

	neznano	splošno	konkretno	identično
mesto	where	everywhere	there	–
način	–	–	so	–
čas	when	–	–	–
oseba	who	everyone	–	same one

1. tabela

	y-	sarv-	t-	ek-
-ah	yah	sarvah	–	ekah
-atra	yatra	sarvatra	tatra	–
-ada	yada	–	–	–
-atha	–	–	tatha	–

2. tabela

Primerjava obeh tabel pripelje do zaključka, da koreni: -ah, -atra, -ada in -atha izražajo osebo, mesto, čas in način zaimka, medtem ko so sarv-, y-, t- in e- predpone, ki zaporedoma izražajo splošnost, nedoločenost, konkretnost in identičnost. Korespondenca je: sarvatra – everywhere, tatra – there, yatra – where, sarvah – everyone, yah – who, ekah – same one, yada – when, tatha – so.

Potrebne zaimke lahko enostavno konstruiramo:
simultaneously = same time = ekada
then = tada
how = yahta
in every way = sarvahta

Problem 2. Dano je nekaj izrazov v havaiščini in njihovi angleški pomeni:

1. Nana i Mauna Kea, piha keia mauna i ka nani.
   Look at Mauna Kea, this mountain is full of beauty.
2. Maika'i ka hale o Hina, pu'iwa 'o Liholiho i ka nui o keia hale.
   Hina's house is beautiful, Liholiho admires the beauty of this house.
3. Nana 'o Hina i ka moa kane, nana kana kane i ka moa wahine.
   Hina looks at the cock, her husband looks at the hen.
4. Kakau 'o Liholiho i ka leka nui i kana keiki kane.
   Liholiho writes a long letter to her son.
5. 'olelo maika'i keia i ka 'olelo Hawai'i.
   This child speaks Hawaiian well.

Prevedi v angleščino:

1. Nui kana wahine nani.
2. Nui kana nani wahine.
3. 'olelo nani 'o Hina.
4. Nani ka 'olelo o Hina.

Rešitev: S primerjanjem stavkov v havaiščini in angleščini lahko ugotovimo pomene besed: nana – to look, hale – house, keia – this itd. Na tej osnovi določimo sintakso stavkov v havajščini: predikat (prislovno določilo) (prilastek/kazalni zaimek) subjekt (objekt) (prilastek). Zanimiva je ugotovitev, da je sintaktična vloga v havaiščini odvisna od mesta v stavku. Tako 'olelo lahko pomeni "to speak" ali "language", odvisno od mesta v stavku (glej 5. stavek).

Prevodi stavkov v angleščino se glasijo:
1. His beautiful wife is big (long).
2. Her feminine beauty is great.
3. Hina speaks beautifully.
4. The language of Hina is beautiful.

2. Problemi imen za števila (števniki).

Drug pomemben sklop problemov se nanaša na števnike. V teh problemih je konstrukcija števnikov odvisna od uporabljene baze, matematičnih operacij in lingvističnih posebnosti.

Problem 3. Spodaj je nekaj števnikov v jeziku Ainu (ki ga govorijo ne severu Japonske in Sahalinu):

1	shine
10	wan
11	shine ikashama wan
18	tupesan ikashama wan
22	tu ikashama hotne
50	wan e re hotne
56	iwan ikashama wan e re hotne
65	ashikne ikashama re hotne
139	shinepesan ikashama wan e arwan hotne
140	arwan hotne
200	shine wan hotne
300	ashikne hot ikashama shine wan hotne
800	ine shine wan hotne

a) Kateri števili ustrezata naslednjima ainu številkoma:
tupesan ikashama wan e tupesan hotne
ine hot ikashama iwan shine wan hotne.
b) Napiši v ainu: 117, 189, 480.
c) Pojasni rešitev.

Rešitev: Zanimivost matematičnih operacij jezika Ainu je sistem "štetja naprej". Tako 50 ni "štirideset plus deset" ampak "deset v tretji dvajsetici" (opazimo, da je tretja dvajsetica od 41 do 60). V tem jeziku je štetje vnaprej uporabljeno v intervalu $\big[20K+10, 20(K+1)\big)$, medtem ko je prištevanje uporabljeno v intervalu $\big(20K, 20K+10\big)$, $K \geq 1$.

"Tupesan ikashama wan e tupesan hotne" pomeni 158 (18 manj od osme dvajsetice), medtem ko je "ine hot ikashama iwan shine wan hotne" 1280.
117 = arwan ikashama wan e iwan hotne
189 = shinepesan ikashama shinepesan hotne
480 = ine hot ikashama tu shine wan hotne

3. Problemi s koledarjem in časom.

Problemi te vrste odražajo zgodovinski ali umetni koledar in časovni sistem. Pri koledarju morajo dijaki ugotoviti trajanje koledarskih enot (npr. meseca) in princip konstrukcije njihovih imen. Tule je en tak problem:

Problem 4. Datumi v starem japonskem koledarju, ki se je uporabljal na Japonskem do konca prejšnjega stoletja, sestojijo iz komponente "živalskega cikla" (ne, uschi, tora, u-sagi, tatsu, mi, uma, hitsuji, saru, tori, inu, wi) in imen "nebesnega drevesa" (kino-e, kino-to, hino-e, hino-to, tsuchino-e, tsuchino-to, kano-e, kano-to, mizuno-e, mizuno-to).

Spodaj so datumi nekega koledarskega leta in ustrezna imena starega japonskega koledarja:

1.	mizuno-to tori	10. marec
2.	tsuchino-e uma	24. 4.
3.	hino-e tora	2. 5.
4.	mizuno-to u-sagi	8. 5.
5.	kano-to hitsuji	6. 7.
6.	kino-e ne	28. 8.
7.	kino-to wi	20. 9.
8.	kano-e ne	3. 10.

a) Kateri dnevi po starem Japonskem koledarju ustrezajo datumoma 21.6. in 22.6. istega leta? Zapiši njuni imeni.
b) Zapiši zaporedoma japonska imena vseh dnevov. (Japonski "teden" je tistega leta začel 1.3.)

4. Zelo poenostavljeni raziskovalno lingvistični problemi

Ti problemi so najpomembnejši za matematično lingvistiko. Tu ne obstaja enovit pristop k reševanju, ampak zahteva individualno kreativnost. Dali bomo dva ilustrativna problema.

Problem 5. V računalniški lingvistiki označujemo s "koordinacijo" operacijo, ki briše ponavljajoča zaporedja besed v zaporednih stavkih, ki imajo podobno strukturo, in jih kombinira v en stavek s pomočjo veznika "in". Vzemimo primer iz angleščine. Stavke

The newspaper comments on the bus drivers' strike.
The newspaper comments on the Midle East war.
The newspaper comments on the railroad accident.

transformiramo s koordinacijo v stavek:

The newspaper comments on the bus drivers' strike, the Midle East war, and the railroad accident.

Posebno koordinacijsko pravilo pravi, da lahko dva enostavna stavka SPX, SPY (S – subjekt, P – predikat, X in Y pa sta preostala dela stavka) koordiniramo v stavek "SPX and Y". Primer: Peter likes bananas. Peter likes oranges. Peter likes bananas and oranges.

Vendar pa zgornje pravilo ni vedno uporabljivo. Opiši vsaj tri primere različnih vrst, ko takšna koordinacija ne da sprejemljivega rezultata. Kako pa je pri slovenščini?

Problem 6. Prvi računalniški program za komuniciranje v naravnem jeziku (angleščini) je uporabljal t.i. frazne oblike za vhod (IP – input patterns) in odgovor (OP – output patterns). Vsaka oblika je predstavljena z besedami, ločili in znakom "$\star$", ki so vklenjeni v oglati oklepaj. Na primer ($\star$ you).

Znak "$\star$" nadomešča eno ali več besed. Rekli bomo, da IP ustreza določeni obliki. Na primer frazi *"It's good to see you"* in *"It's nice to see you"* ustrezata omenjeni obliki, fraza *"It's good to see you again"* pa ne. Vsak vhod IP ima ustrezen odgovor OP.

Če udeleženec dialoga med človekom in računalnikom uporabi neko frazo, ki ustreza obliki IP, potem program odgovori s frazo, ki ustreza ustrezni OP. Poglejmo primer (*Are you sure* $\star$ *me?*), ki naj bo OP za prejšnjo IP. V tem primeru bo računalnik na frazo *"It's good to see you"* odgovoril *"Are you sure it's good to see me?"*

Kot smo videli "$\star$" drži prostor za zaporedje besed. Če je v obliki več zvezdic, jih bomo označevali $\star_1$, $\star_2$, $\star_3$, ...

a) Naj bo (*He is* $\star_1$, *but* $\star_2$) IP in (*I believe that you are* $\star_1$, *but* $\star_2$, *too*) ustrezna OP. Napiši dva vhoda , ki ustrezata IP, vendar bo računalnikov odgovor (OP) ustrezen le pri prvem vhodu.

b) Spodaj so tri vhodne oblike:

$$(\star_1 \textit{ was } \star_2), \quad (\star \textit{ interesting}), \quad (\textit{I remember } \star_1 \textit{ and } \star_2).$$

Za vsako od njih predlagaj ustrezeno odgovorno obliko OP, ki vsebuje vsaj eno zvezdico. Nato pa za vsak IP napiši dva primera, ki ustreza a). Kaj bo odgovoril računalnik?

Rešitev: Stavka *"He is tired, but pleased"* in *"He is young, but he has much money"* ustrezata IP. V prvem primeru bo računalnik odgovoril *"I believe that you are tired, but pleased, too"*, v drugem pa *"I believe that you are young, but has much money, too"*.

Predlagamo za OP (*I remember* $\star_1$ *and* $\star_2$) in dva vhoda, ki izpolnujeta a).

Naj bo OP (*"So do I remember the day the technician came and disassembled you in pieces"*).

Nekaj dodatnih nalog [2]:

7. Naj bo X poljuben pojem in Y njegov rodni pojem (vsak X je Y). Da bi se izognili ponavljanju, se pogosto uporablja naslednje pravilo računalniške lingvistike: *Če srečamo dva zaporedna stavka* XZ_1 *in* XZ_2, *kjer je* X *subjekt,* Z_1 *in* Z_2 *pa sta preostanka stavkov desno od* X, *potem zamenjamo* X *s "ta* Y*" v drugem stavku (in po potrebi uskladimo* Z_2 *z* Y*).*

Primer: *Šprinter je postavil svetovni rekord.*
Šprinter je dosegel najboljši čas v zgodovini v teku na 100 m.

Po uporabi pravila, dobimo:

Šprinter je postavil svetovni rekord.
Ta atlet je dosegel najboljši čas v zgodovini v teku na 100 m.

Znano je, da to pravilo ni vedno sprejemljivo. Opiši vsaj tri tipe okoliščin, kjer pravilo ne da dobrega rezultata.

8. Bodi M množica samostalnikov, ki označujejo nekatere predmete, ki jih moramo porazdeliti glede na njihove lastnosti. Lastnosti so predstavljene s prostimi stavki, kjer so ustrezni samostalniki subjekti.

Razmisli, na primer, o množici {*človek, volk, zajec*} in lastnostih *"X je živo bitje"* in *"X je razumno bitje"*. Objekti množice morajo biti podeljeni na dva razreda, v odvisnosti od posedovanja zgoraj omenjenih lastnosti: prvi razred sestoji iz samostalnikov *"volk"* in *"zajec"*, katerih objekti imajo samo eno lastnost (*"X je živo bitje"*), v drugi razred pa sodi *"človek"*, saj imajo ljudje obe lastnosti.

a) Naj bo $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_N$ množica lastnosti. Koliko je maksimalno število (označimo ga $Max(N)$) različnih razredov, ki jih določajo te lastnosti?
b) Izberi tri lastnosti $p_1,\ p_2$, in p_3 in ustrezno množico $Max(3)$ objektov, tako da vsak objekt sodi v drug razred.

9. Naj bo beseda *"pojem"* ime za razred objektov (ki so lahko tudi abstraktni), ki imajo skupne lastnosti. Primer: računalnik, stol, rojstni dan itd.
Objekti, ki sodijo v ta razred in niso pojmi, se imenujejo elementi (razreda ali pojma). Na primer Apple-II, Commodore, itd., so elementi pojma *"osebni računalnik"*.
Pojem Y je nadrejen pojmu X natanko tedaj, kadar ja vsak X tudi Y. Pojem *"ptica"* je, na primer, nadrejen pojmu *"golob"*, pojem *"žival"* je nadrejen tako pojmu *"golob"* kot pojmu *"ptica"*.
Pojmi (in elementi) imajo lahko različne lastnosti. Če so $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_N$ N neodvisne lastnosti, potem z $\{\quad\}p_1 \ldots p_K$ označimo množico vseh pojmov (elementov), ki imajo lastnosti $p_1, \ldots,\ p_K$. (Tem množicam bomo rekli razredi lastnosti $p_1 \ldots p_K$; njihovo število je 2^K.)

Primer: Naj bodo p_1, p_2 in p_3 lastnosti, definirane takole: p_1 = *"X lahko leti"*, p_2 = *"X lahko plava (pluje)"*, p_3 = *"X rabi gorivo"*. Potem velja:

$\{hidroplan\} \subset \{\quad\}p_1 ... p_3$
$\{avion,\ vesoljsko\ plovilo\} \subset \{\quad\}p_1 p_3$
$\{labod,\ raca\} \subset \{\quad\}p_1 p_2$
$\{ladja,\ motorni\ čoln\} \subset \{\quad\}p_2 p_3$
$\{balon,\ jadralno\ letalo\} \subset \{\quad\}p_1$
$\{kajak,\ kanu\} \subset \{\quad\}p_2$
$\{avto,\ motor\} \subset \{\quad\}p_3$
$\{stol,\ pero\} \subset \{\quad\}\emptyset$

a) Poišči dve različni zaporedji pojmov, tako da vsako sestoji vsaj iz šestih pojmov in da je vsak pojem nadrejen predhodnemu.

b) Bodi X katerikoli pojem. Da se izognemo ponavljanju, v matematični lingvistiki pogosto uporabimo tole pravilo: *"Če dva stavka XZ_1 in XZ_2 (X je subjekt, Z_1 in Z_2 pa sta preostala dela stavkov desno od X) nastopata drug za drugim, potem zamenjamo X s "Ta Y" v drugem stavku in primerno prilagodimo Z_2.*

Primer: *"Orel visoko leta. Ta orel je ogrožena vrsta."*
Ko uporabimo pravilo, dobimo: *"Orel visoko leta. Ta ptica je ogrožena vrsta."*

Ali je opisana zamenjava vedno sprejemljiva?

c) Opredeli štiri neodvisne lastnosti p_1, p_2, p_3, p_4 in opiši 16 njihovih razredov.

d) Opredeli tri neodvisne lastnosti, tako da vsak razred vsebuje neskončno pojmov (elementov).

10. Dano je nekaj madžarskih besed in njihovih angleških prevodov (vendar pa prevodi niso dani v ustreznem zaporedju):

községedben, gépünkért, velünk, géped, érted, közsérgért, tőlem, tüztől

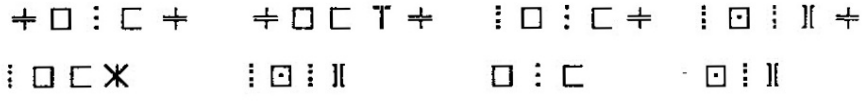
with us, for our machine, for you, from fire, in your village,
your machine, from me, for village

a) Poišči korespondenco med madžarskimi in angleškimi besedami. Pojasni sestavo madžarskih besed.

b) Prevedi v madžarščino: from my village, in fire, for us.

c) Prevedi v angleščino: tőled, községben.

11. Dano je zaporedje osmih berberskih besed, zapisanih v originalnem pismu. Potem so dane besede v latinski transkripciji in ustrezni angleški prevodi, vendar v drugem vrstnem redu od originalov:



amɣar — man, tamɣart — woman, timɣarin — women
afunas — bull, tifunasin — cows, ifunasən — bulls
izamarən — rams, tagmart — mare

a) Prevedi v berberščino in zapiši v originalnem pismu besedi: cow, men.

b) Prevedi v angleščino in zapiši v latinski transkripciji: 

c) Zapiši v originalu: tafust, agra.

12. Dan je seznam številnikov v jeziku Maya kot jih je zapisal španski raziskovalec *de la Rosa* leta 1746:

1 hun	41 huntuyoxkal
2 ca	50 lahuyoxkal
3 ox	60 oxkal
4 can	70 lahucankal
5 ho	80 cankal
8 uaxac	90 lahuyokal
9 bolon	92 lahcatuyokal
10 lahun	100 hokal
11 buluc	101 huntuackal
12 lahca	120 uackal
13 oxlahun	200 lahunkal
14 canlahun	220 buluckal
15 holhun	260 oxlahukal
16 uaclahun	280 canlahukal
17 uuclahun	380 bolonlahukal
18 uaxaclahun	386 uactuhunbak
19 bolonlahun	400 hunbak
20 hunkal	415 hunbakcatacholhun
21 huntukal	489 cantubakcatacbolon
22 catukal	500 hotubak
30 lahucakal	900 hotuyoxbak
39 bolonlahutukal	947 uuctuyoxbakcatacuuc
40 cakal	1200 oxbak
	8000 pic

a) Pojasni strukturo številnikov od 1 do 8000 v jeziku Maya.
b) Zapiši številnike za 88, 221, 253, 395, 479, 1405, 7654.

13. Dane so besede in fraze v angleščini in njihovi prevodi v umeten jezik, ki sestoji iz številk in črk:

flood rain	*1C*
(he) recovers (health)	*24B*
(he) heals	*34B*
a war is being waged	*5E*
(he) lulls to sleep	*3D*
(he) falls asleep	*2D*
(he) sleeps soundly	*1D*
(he) gets better (health)	*6B*
war	*E*
sleep	*7D*

a) Prevedi v umetni jezik: (he) wakes up, (he) starts (from his sleep), (he) sleeps with one eye open, (it) drizzles, disease.
b) Prevedi v angleščino: *1E*, *4E*, *25E*, *35E*, *5C*, *15C*, *17B*.

Literatura:

[1] Ruslin Mitkov, *High School Mathematical and Computational Linguistic Activities in Bulgaria*, Mathematics Competitions Vol 3 No. 2 (1990), str. 41 – 52.

[2] Ruslin Mitkov, *Mathematical and Computational Lingvistic Problems*, Mathematics and Informatics, Vol 1, No. 2 (1991), str. 43 – 50.

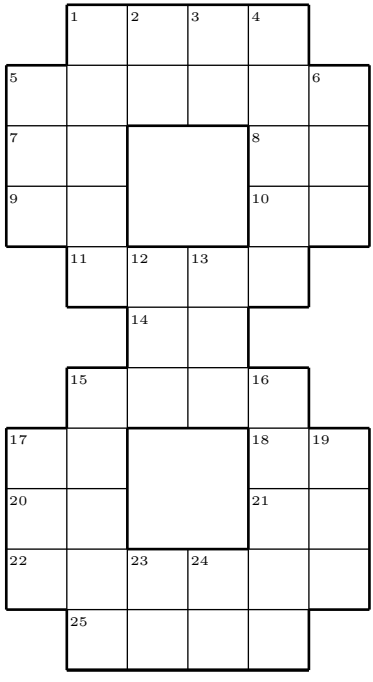
MATKA - ČASOPIS ZA MLADE MATEMATIKE

MATKA je časopis za mlade osnovnošolske matematike in računalnikarje,
ki ga izdaja *Hrvaško matematično društvo*. Letno izidejo 4 številke, enoletna naročnina znaša 20 DEM, oziroma 20 kn na Hrvaškem. Časopis lahko naročite na naslov *Društva*: Zagreb, Bijenička 30.

Vsebina 11. številke: Möbiusov trak, Problem štirih barv, Kako določiti zemljepisno širino svojega mesta, Pitagorova enačba, Modeli geometrijskih teles, Spominsko tekmovanje "Jelena Zrinski", Matematična veselica, Naloge iz zgodovine, Učenci nam pišejo, Evklidov alogoritem, Peto regionalno tekmovanje iz matematike, Izbrane naloge, Rešitve nalog iz 10. številke, Kotiček za najmlajše.

Poskusimo rešiti matematično križanko Zdravka Kurnika iz 8. številke in nekaj nalog za najmlajše.

Matematična križanka "Osmica"



Vodoravno:

1. $92^2 - 65^2$
5. Prostornina kocke, katere rob je največje dvomestno praštevilo
7. 0.016 % od 331250
8. Zmnožek dveh zaporednih naravnih števil
9. Rešitev enačbe $\frac{x-5}{4} - \frac{x-4}{5} = 1$
10. $64(0.64 + \frac{9}{25})(0.75 - \frac{1}{8})$
11. $2^2 + 3^2 + 50^2$
14. Kvadrat naravnega števila
15. Površina kvadra, katerega robovi so tri zaporadna naravna števila, prostornino pa ima enako 10626
17. Število premic, ki jih določa 13 točk v splošnem položaju
18. Rešitev enačbe $3x - 2(x-2) + 3(x-3) - 4(x-4) - 11 = 0$
20. $D(1246, 1335)$
21. Število praštevil med 10 in 60
22. Vsota vseh tromestnih naravnih števil
25. $MMMDCCLXXXII$

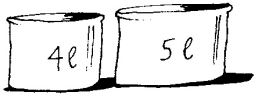
Navpično:

1. $37^3 - 21^3$
2. $D(308, 374, 418)$
3. $10^2 - 8^2$
4. Ploščina pravokotnika, katerega stranici sta dve zaporedni lihi števili, obseg pa ima enak 1248

5. $CMLII$
6. $2^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2$
12. $DLXXXIX$
13. Vsota prvih desetih sodih naravnih števil
15. $75^3 - 73^3 - 56^2 - 27^2$
16. $v(552, 612, 1173)$
17. Ploščina kvadrata, katerega obseg je enak 112
19. $11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2$
23. Največji prafaktor števila 6204
24. Vrednost izraza $a + ab + abc$ za $a = -2$, $b = 6$, $c = -3$

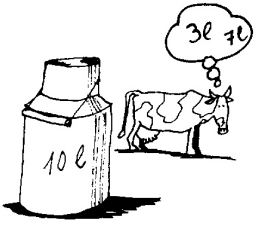
1. 16 l soka moraš natočiti v 5 dcl in 7 dcl steklenice. Koliko posameznih steklenic potrebuješ?

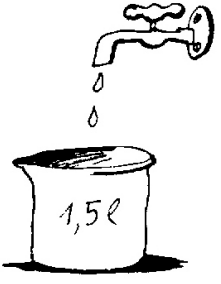




2. Imaš dve prazni posodi, eno za 4 l, drugo za 5 l. Kako boš z njima odmeril 3 l tekočine?

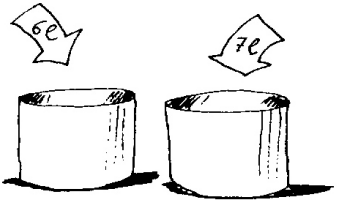
3. Imaš polno posodo z 10 l mleka. Prelij to mleko na dva enaka dela, pri tem pa imaš na razpolago še posodi za 3 l in 7 l.

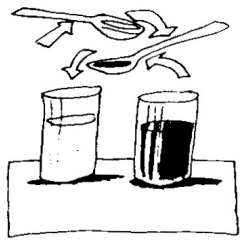




4. V posodi za 1.5 l je 7 dcl vode. Če dolijemo 11 dcl vode, koliko vode bo v posodi?

5. V eni posodi je trikrat več tekočine kot v drugi. Če dolijemo v prvo 6 l, v drugo pa 7 l, bo v prvi dvakrat več tekočine kot v drugi. Koliko tekočine je bilo v posodah pred dolivanjem.

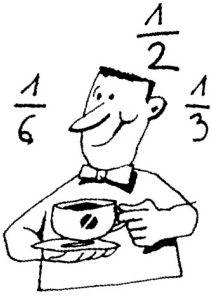




6. V enem kozarcu je mleko, v drugem pa enaka količina kave. Prelij žlico mleka v drugi kozarec, potem pa prelij žlico tekočine iz drugega kozarca v prvega. Ali je več kave v prvem kozarcu ali je več mleka v drugem?

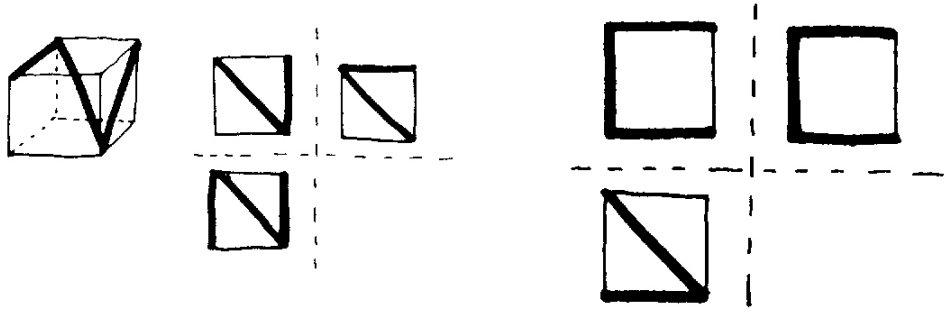


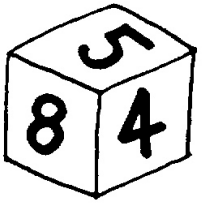
7. Iz lonca, ki je do vrha napolnjen z mlekom, odlij natančno polovico, ne da bi rabil kakršnokoli pripravo.



8. Perica iz polne skodelice kave popije $1/6$ in dolije mleko do vrha. Potem popije $1/3$ in spet dolije mleko. Potem popije $1/2$ skodelice in spet dolije mleko. Koliko je sedaj kave v skodelici?

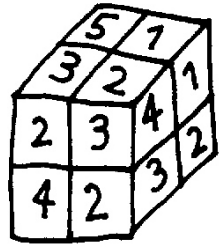
9. Na sliki je prikazana žica, ki je položena v zamišljeni kocki. Desno od nje so podane pravokotne projekcije te žice, to je slike, ki jih vidimo, če gledamo spredaj, od zgoraj in z leve. Iz treh slik na desni poskušaj ugotoviti, kako je prepognjena v tem primeru.

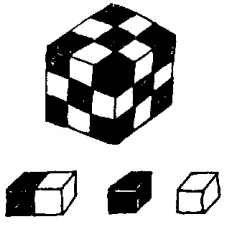




10. Na treh stranicah kocke so napisana števila 4, 5 in 8. Na ostale tri stranice moramo napisati števila tako, da bodo vsote števil na nasprotnih stranicah enake.

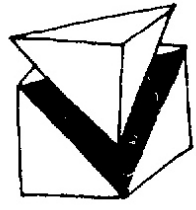
11. Vsaka mejna ploskev kocke je razdeljena na 4 kvadrate in na vsako polje je vpisano naravno število. Ali lahko vpišemo števila tako, da bo vsota števila in njegovih štirih sosedov, to je tistih, katerih polja imajo skupno stranico, enaka 13? Seveda mora ta pogoj veljati za vsako polje.

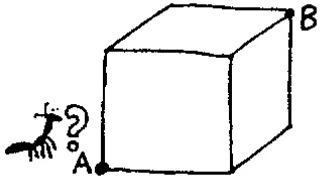




12. Velika kocka je sestavljena iz 13 "dvojnih" črnobelih kockic in ene "enojne". Kakšne barve je ta "enojna", in kje je postavljena?

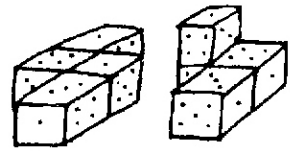
13. Ravnina preseka kocko tako, da je presek enakostraničen trikotnik, katerega stranice so diagonale mejnih ploskev kocke. Nariši mreži teles, na kateri je razpadla kocka.





14. V oglišču A se nahaja mravlja, ki želi priti v oglišče B. Po kateri poti naj gre, da bo le-ta najkrajša?

15. Štiri kocke za "Človek, ne jezi se" so položene druga ob drugi. Kako jih velja sestaviti, da bo število točk, ki se vidijo, najmanjše? Kako pa, da bo največje?



Rešitev križanke:

	1 4	2 2	3 3	4 9	
5 9	1	2	6	7	6 3
7 5	3			8 3	5
9 2	9			10 4	0
	11 2	12 5	13 1	3	
		14 8	1		
	15 2	9	0	16 2	
17 7	8			18 8	19 6
20 8	9			21 1	3
22 4	9	23 4	24 5	5	0
	25 3	7	8	2	

MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

MFL je srednješolski časopis za matematiko, fiziko in informatiko z dodatkom iz fizike za osnovnošolce. Naročnina za leto 94/95 je bila 40 kn, oziroma 20 DEM za inozemstvo. Časopis lahko naročite na naslov: Ilica 16/III, 41001 Zagreb.

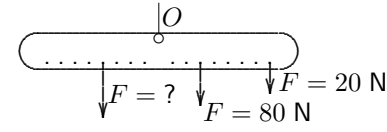
Vsebina 4. (zadnje) številke za š.l. 94/95 je takale. *Matematika:* Napoleonov izrek in posledice; *Fizika:* Dolga zgodovina termometra; *Informatika:* Realizacija algoritma za izračun kvadratnega korena z uporabo kitajskega abakusa; *Iz moje delavnice in laboratorija:* Koherer in 100 let radia; *Astronomija:* Tako še nihče ni izmeril; *Zabavna matematika*; *Naloge in rešitve:* Naloge iz matematike, Naloge iz fizike, Rešitve iz matematike, Rešitve iz fizike; *Zanimivosti:* Matematični aforizmi, Seventh Irish Mathematical Olympiad, Od 1 do 50 s 1995, Slavonska matematična zgodba, Neka metoda za sestavljanje magičnih kvadratov, Uporaba neke lastnosti logaritemske funkcije pri reševanju logaritemskih neenačb, Translacija koordinatnega sestava, še en dokaz Heronovega obrazca, Še nekaj uporab Jacobijevega izreka, Dvojke in Paul Dirac; *In memoriam:* Prof. dr. sc. Petar Kulišić; *Šahovski kotiček*, *Seznam reševalcev*, *Nagrade*, *Nagradni natečaj*.

Iz 1. številke MFL-ja bomo predstavili *3. državno srečanje mladih hrvaških fizikov*. Srečanje je potekalo v Varaždinu, udeležilo pa se ga je 155 osnovnošolcev in srednješolcev, 127 jih je sodelovalo v tekmovalnem delu, 28 pa je predstavilo eksperimentalna dela. Osnovnošolci so tekmovali v eni sami skupini (pri nas tekmujejo v 7. in 8. razredu). Predstavili bomo naloge za osnovnošolce.

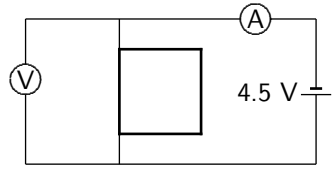
Pisne naloge

1. Varaždin je mesto glasbe. Tule je vprašanje na to temo. Kot izhodišče za izdelavo glasbene lestvice se vzame ton a_1 s 435 utripov v sekundi, ki se po zraku pri $26°C$ širi s hitrostjo $348\ \mathrm{m/s}$.
   (a) Kolika je valovna dolžina tona a_1 pri danih pogojih?
   (b) Koliko valovnih dolžin znaša oddaljenost od zvočnega izvora do slušatelja, če zvok to razdaljo preide v $1/10\ \mathrm{s}$?

2. Na risbi je prikazana ročica z enakima krakoma v ravnovesju. Določi neznano silo F.



3. Iz žičnega upornika z uporom 12Ω je narejen kvadrat, ki je postavljen v električni krog, kot kaže slika.
   (a) Kolikšen tok kaže ampermeter?
   (b) Kolikšno napetost kaže voltmeter?



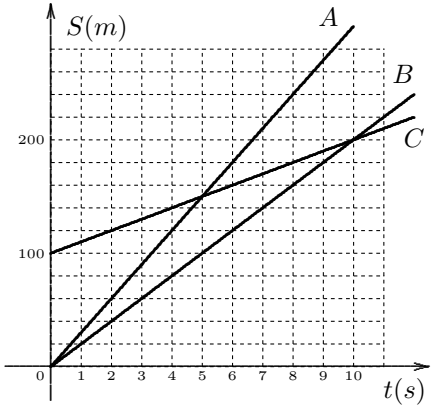
4. Električni grelec upornosti 44Ω, ki je priključen na napetost $220\ \mathrm{V}$, segreva $5\ \mathrm{l}$ vode ($c = 4,2\ \mathrm{J/gK}$). Kolikšna je temperatura vode po dveh minutah segrevanja, če je začetna temperatura $18°C$?

5. Graf prikazuje gibanje treh avtomobilov na isti cesti v isti smeri.

   (a) Določi čas, ki ga potrebuje avtomobil "A", za pot $140\ \mathrm{m}$.

   (b) Določi čas, ko avtomobil "B" dohiti avtomobil "C".

   (c) Določi hitrost avtomobila "C".



Eksperimentalne naloge

1. Znano je, da kreda hitro vpije vodo. Ta pojav se tolmači s poroznostjo materiala.
   (a) Določi maso vode, ki jo vpije šolska kreda.
   (b) Koliko procentov prostornine krede odpade na luknjice in koliko na material, iz katerega je kreda?

2. V tovarni pohištva "ŠAVRIĆ" so izdelali zamaške iz deske oblike kvadra dimenzij $5\ \mathrm{cm}$, $2\ \mathrm{dm}$ in $3\ \mathrm{m}$. Od teh je eden na razpolago za proučevanje. Kolikšna je masa deske, v kilogramih, iz katere so izdelani zamaški?

3. (a) Določi upornost danega žičnega upornika.
   (b) Izmeri potrebne količine in grafično prikaži odnos med tokom in dolžino žice.

   (Pribor: ampermeter do $1\ \mathrm{A}$, baterija $1,5\ \mathrm{V}$, lesen zamašek, nit, kreda (oblike kvadra), krokodil spojke (6 kom.), menzura $100\ \mathrm{cm}^3$, milimetrski papir, žični upornik, plastičen kozarec $0,2\ \mathrm{dl}$, premično merilo, natančna tehtnica, ravnilo $40\ \mathrm{cm}$, vezne žice (6 kom.), škarje in voltmeter do $6\ \mathrm{V}$.)

GOBELIN

Navodila za reševanje so preprosta. Število števil ob levem robu vsake vrstice in na vrhu vsakega stolpca pove, koliko skupin črnih kvadratkov je v posamezni vrstici oziroma stolpcu. Vsako število pa pove, koliko zaporednih črnih kvadratkov je v posamezni skupini.

Recimo, da sta pred vrstico števili 2 10; to pomeni, da sta v vrstici dve skupini zaporednih črnih kvadratkov, prva vsebuje dva, druga pa deset črnih kvadratkov, skupini sta ločeni z vsaj enim nepočrnjenim kvadratkom.

1.

	4	2 1	2 1 2	2 1 2	2 1 2	2 1 2	2 2	1 3 1	1 2 1	1 2 4 1	1 2 4 3	2 1 5 3	1 1 2 1 4	2 4 6	2 2 5	1 2 1 4	1 2 4	4 3	2	2 1	7
4																					
1,1,2																					
1,1,2																					
1,1,1,1																					
6,2,1,1,1																					
6,2,1,1,1																					
1,1																					
6,1,1,2																					
1,1,3																					
1,6,1																					
1,6,2,1																					
6,2																					
4,1,1																					
3,2,1																					
1,5,1																					
8,1																					
9,1																					
14																					

2.

	12	311	311	361	3210	313	21411	15111	121	11	11	11111	2111121	15222	20	20	4612	1111111	11123	11121
1,2,2																				
1,2,1,3,1																				
2,3,2,1,3,1																				
2,4,1,4																				
2,1,3,4																				
1,3,3,1,2,2																				
2,5,6																				
2,2,2,1,4,1																				
1,5,6,1																				
3,1,4,1																				
2,8																				
2,3																				
2,3,2,1																				
2,8																				
2,3,1																				
2,2																				
2,2																				
4,2																				
1,1,4																				
1,1,6																				

3.

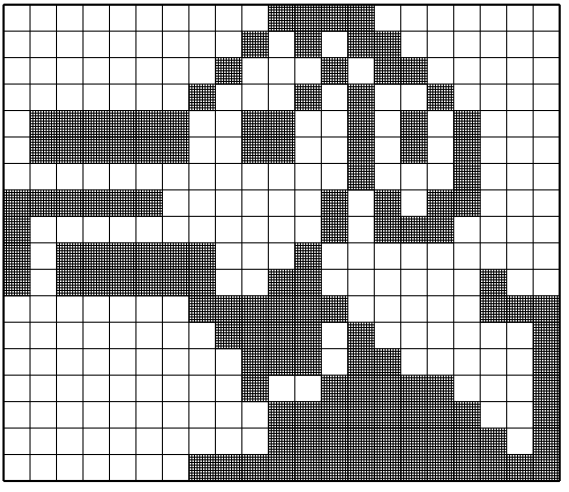
	42	224	224	224	222	12	129	11612	129	11	1291	11411	1291	11	129	124111	129	12	222	224	224	224	42
2,2																							
2,2,2,2																							
1,1,1																							
2,2																							
2,1,1,1,2																							
2,1,1,1,1,3,2																							
2,3,1,1,1,1,2																							
1,1,1,1,1																							
1,1,1,1,1																							
2,1,1,1,2																							
2,3,3,3,2																							
2,3,1,1,1,1,2																							
2,1,1,1,1,3,2																							
5,1,1,1,3																							
2,1,1,1,4																							
3,1,1,1,1																							
1,1,1,1,3																							
1,1,3,1,1,1,1,1																							
5,3,3,3,5																							
5,1,1,5																							
3,1,1,3																							
1,1,1																							

4.

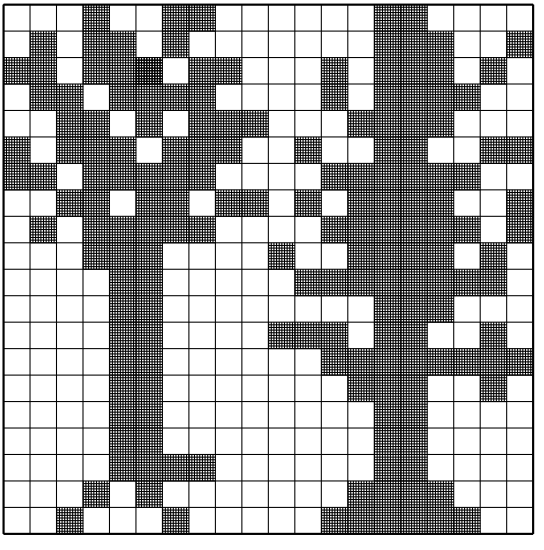
	8	111	21111	111111	1111111	111114	112114	112114	111114	1111122	1111122	2223	123	163	13	2651	338
6																	
1,1,3																	
6,2																	
1,1,1																	
1,1,2																	
1,1,1,1,1																	
1,1,1,2,1,1,1,1																	
1,1,4,1,1,1																	
1,1,1																	
1,1,1,1,2																	
1,2,2,1,1																	
1,1,1																	
1,1,1,1,1,1																	
1,1,1,1,1,1,3																	
1,1,1,1,3																	
1,3,2,4																	
1,2,2,2																	
6,3,1																	
4,3,1																	
7,1																	
9,2																	

Rešitve

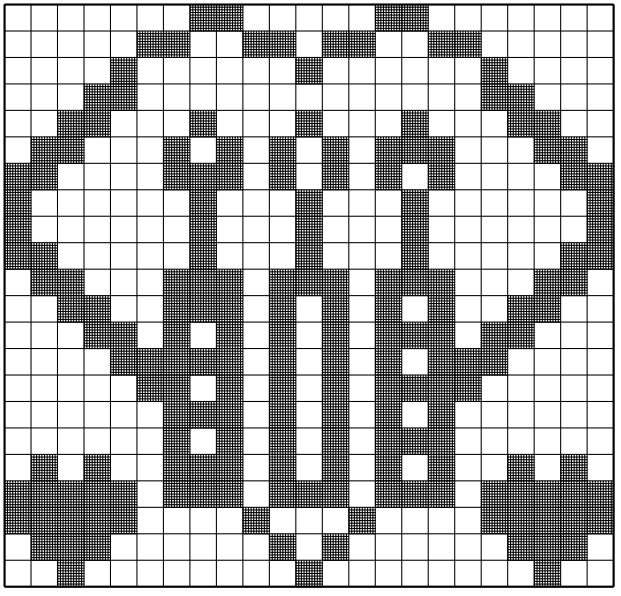
1. Kuža



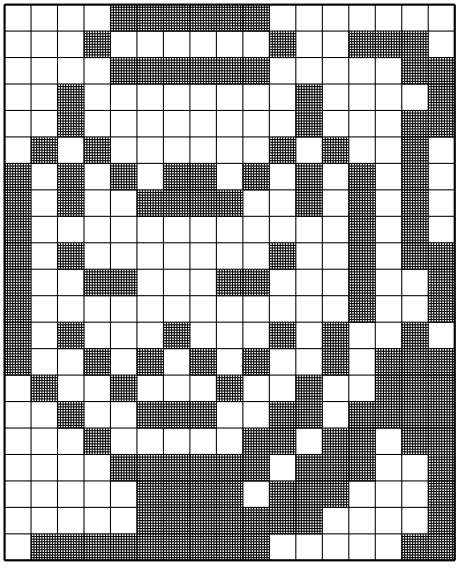
2. Gozd



3. Tretji rojstni dan



4. Muca



Katka Kurent

DVE UGANKI

1. MATEMATIČNI KROKET

Kroket je na Slovenskem manj znana športna igra, toliko raje pa so se z njo zabavali v Angliji prejšnjega stoletja. Pravila zanjo so preprosta: vsak igralec z lesenim kladivom ali batom poskuša spraviti svojo kroglo skozi več razporejenih vratc iz ukrivljene žice do obračalnega količka in spet po isti poti nazaj. Zmaga tisti, ki prvi doseže ciljni količek.

Književnik in matematik *Lewis Carroll* (njegovo pravo ime je Charles Lutwidge Dodgson) se je kroketu posvetil trikrat in to vsakokrat na nadvse izviren način. Prvič ga je leta 1862 vpletel v pravljico o zmedenem in sprevrnjenem svetu sanjske dežele, ki jo je na izletu pripovedoval Lorini, Alici in Edith, hčerkam svojega predstojnika dekana Liddella, in jo je kasneje vključil v rokopisno knjižico *Aličine prigode v podzemlju*. Iz te je nastala *Alica v Čudežni deželi* in v njej igrajo zares prismuknjen kroket:

> *Alica je pomislila, da še nikdar v življenju ni videla tako čudnega igrišča za kroket: bili so ga sami hribčki in dolinice, žoge so bili živi ježi, bati pa živi plamenci; vojščaki so se morali upogniti in postaviti na vse štiri, da so bili pravi pravcati živi loki.*

Carroll je Liddellovim deklicam priredil tudi pravila pravega kroketa in je svojo inačico imenoval "grajski kroket". Dekanove hčerke se na vrtu sredi oxfordskih univerzitetnih palač pač niso smele igrati kakih hrupnih iger, saj bi sicer zmotile zbranost profesorjev in študentov.

V osebni dnevnik pa je 24. oktobra 1872 zapisal, da je deklici Gwendolen Cecil poslal pravila miselne igre "numerični kroket". Pismo se ni ohranilo, toda v Carrollovi zapuščini so našli list iz kasnejših let, na katerem je predstavljena omenjena igra. To pot ji je dal naslov *Aritmetični kroket*, igra pa se takole:

1. Prvi igralec pove število, ki ne sme biti večje od 8; drugi stori prav tako. Nato prvi izreče višje število, toda največ za 8 višje od svojega prejšnjega; in izmenično tako naprej. Kdor prej doseže 100, kar je "ciljni količek", zmaga v igri.
2. Števila 10, 20 itd. predstavljajo "vratca". Za uspešen prehod skozi ta vratca je potrebno skočiti s števila pred njimi na enako razdaljo za njimi. Na primer: premik s 17 na 23 bi pomenil "osvojena" vratca 20; če pa bi igralec šel na katerokoli drugo število nad 20, bi jih "zgrešil". V takem primeru bi se moral, ko bi bil ponovno na vrsti, pomakniti nazaj na število pod 20, da bi poskusil pravilno priti skozi vratca. Kdor dvakrat zgreši vratca, izgubi igro.
3. Vratca je dovoljeno osvojiti tudi tako, da najprej igraš vanje, ko si naslednjič na vrsti, pa ven na isto razdaljo nad njimi. Na primer: premik s 17 na 20 in nato z 20 na 23 bi pomenil osvojena vratca 20. Igralec, ki je v vratcih, ne more igrati iz njih z nobenim drugim številom, kakor je predpisano.
4. Katerokoli potezo napravi en igralec, s tem onemogoči drugega, da bi napravil enako potezo ali razliko med njo in 9. Na primer: če igralec napreduje za 2, soigralec ne sme napredovati za 2 ali 7. Igralec pa nima moči oviranja, kadar igra v vratca ali kadar igra s kateregakoli števila med 90 in 100, razen če ni soigralec tudi na takšnem številu.

5. "Ciljni količek" se prav tako kakor vratca lahko enkrat zgreši. Kdor ga zgreši dvakrat, igro izgubi.
6. Ko je en igralec v vratcih, ga soigralec lahko zadržuje tam z igranjem števila, ki ga ta potrebuje, da bi prišel ven. Isto lahko doseže tudi z igranjem razlike med tem številom in 9. In tako lahko izmenično nadaljuje z igranjem dveh ovirajočih števil, toda nobenega ne sme igrati dvakrat zaporedoma. Na primer: če gre igralec s 17 na 20, ga soigralec lahko zadržuje z igranjem 3, 6, 3, 6 itd.

S prijateljem poskusite igrati ta Carrollov miselni kroket. Če vama bo igra povzročala težave, si na začetku pomagajta z zapisovanjem potez. Ker vaja dela mojstra, vama bo kasneje prav gotovo šlo gladko tudi brez papirja in svinčnika.



2. KDO GOVORI RESNICO?

Lewis Carroll si je v svojem dnevniku z natančnostjo vestnega knjigovodje ohranjal spomin na vse pomembnejše dogodke, a tudi drobne pripetljaje svojega življenja. V dnevniške zvezke si je kdaj pa kdaj zapisal tudi kako logično uganko, ki mu je ravno prišla na misel. Ena izmed njih je tudi tale o lažnivcih iz Čudežne dežele.

Izumrla ptica Dodo ter prismuknjenca Marčni zajec in Klobučar, bitja iz Carrollove pravljice *Alica v Čudežni deželi*, se srečajo v uganki pa se brž začnejo prepirati.

Dodo pravi, da Klobučar laže.
Klobučar pravi, da laže Marčni zajec.
Marčni zajec pravi, da oba, Dodo in Klobučar, lažeta.

Kdo govori resnico? Pojasni svoj odgovor.

Rešitev uganke

Resnico govori Klobučar.

Dodo laže, ko pravi, da laže Klobučar. Klobučar govori resnico, ko pravi, da laže Marčni zajec. Marčni zajec laže, ko pravi, da lažeta oba, Dodo in Klobučar, saj eden od njiju govori resnico.

Miha Mohor





INTERNATIONAL MATHEMATICAL TALENT SEARCH

Problems, Round 17

Problem 1/17. The 154-digit number, $19202122\ldots939495$, was obtained by listing the integers from 19 to 95 in succession. We are to remove 95 of its digits, so that the resulting number is as large as possible. What are the first 19 digits of this 59-digit number?

Problem 2/17. Find all pairs of positive integers (m, n) for which $m^2 - n^2 = 1995$.

Problem 3/17. Show that it is possible to arrange in the plane 8 points so that no 5 of them will be the vertices of a convex pentagon. (A polygon is convex if all of its interior angles are less than or equal to $180°$.)

Problem 4/17. A man is 6 years older than his wife. He noticed 4 years ago that he has been married to her exactly half of his life. How old will he be on their 50-th anniversary if in 10 years she will have spent two-thirds of her life married to him?

Problem 5/17. What is the minimum number of $3qtimes5$ rectangles that will cover a 26×26 square? The rectangles may overlap each other and/or the edges of the square. You should demonstrate your conclusion with a sketch of the covering.