ČETRTI LETNIK — 1994–1995 – 6

LOGIKA

&

RAZVEDRILNA MATEMATIKA

Revijo sta za splet pripravila Nada in Marko Razpet
na podlagi datotek, ki jih je izdelal Darjo Felda.

Obvestilo naročnikom

Dobili ste 6. številko revije *Logika & Razvedrilna matematika*, to je zadnjo številko v tem šolskem letu. Individualni naročniki, to je tisti, ki revijo prejemate na dom, ostajate še naprej naročniki, dokler naročila **pismeno ne prekličete**. Prav tako ne naročite še enkrat revije preko poverjenika na šoli.

Na šole bomo poslali v začetku šolskega leta toliko izvodov, kolikor je bilo naročnikov v tem letu. Morebitne spremembe pa bomo upoštevali takoj, ko bo javljeno novo število naročnikov.

Še enkrat prosimo vse tiste individualne naročnike, ki ne želijo več prejemati revije, da to čimprej pisno sporočijo.

V S E B I N A

Enakostranični trikotnik iz žetonov 3
Čarovnije Lewisa Carrolla 10
Natečaj za najboljšo logično nalogo 13
Dokazovanje z metodo supozicije 16

Bilten 4. državnega tekmovanja za zlato Vegovo priznanje

Diofantske enačbe 21
Psevdokemijske enačbe 26
Tekmujmo v razvedrilni matematiki 29
39. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije 31

Izdaja: Založniško podjetje LOGIKA d.o.o., Svetčeva 11, 61240 Kamnik,
št. žiro računa: $50140 - 603 - 57434$

Za izdajatelja: Izidor Hafner

Revija *Logika & Razvedrilna matematika* je vpisana v register časopisov pri *Ministrstvu za informiranje* pod registrsko številko *949*. Po mnenju *Ministrstva za informiranje* št. *23/89–92* šteje revija *Logika & Razvedrilna matematika* med proizvode informativnega značaja, za katere se plačuje davek od prometa po stopnji 5%.

Revijo *Logika & Razvedrilna matematika* subvencionira *Ministrstvo za šolstvo in šport*

Člani časopisnega sveta: prof. dr. Frane Jerman, prof. dr. Tomaž Pisanski in Darjo Felda, prof.

Strokovni pokrovitelj: Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko – Oddelek za teoretično računalništvo

Glavni in odgovorni urednik: dr. Izidor Hafner

Sodelavci: Urša Demšar, Gregor Dolinar, Urška Drčar, Petra Ipavec, Alenka Kavčič, Dušanka Kocić, Katka Kurent, Meta Lah, Nina Milač, Nika Novak, Hiacinta Pintar, Maja Pohar, Darja Polak, Tanja Soklič, Mirjana Todorovič in Aleš Vavpetič

Jezikovni pregled: računalniški program *Besana*

Generalni sponzor: Marand d.o.o., zastopstvo Borland

Sponzorji: DZS d.d., Časopisno podjetje *Dnevnik*, NIL d.o.o.

Tisk: Tiskarna "Planprint", Rožna dolina c. IV/32–36, Ljubljana

Ilustrirala: Ana Hafner

Naklada: 2500 izvodov

© 1995 LOGIKA d.o.o.

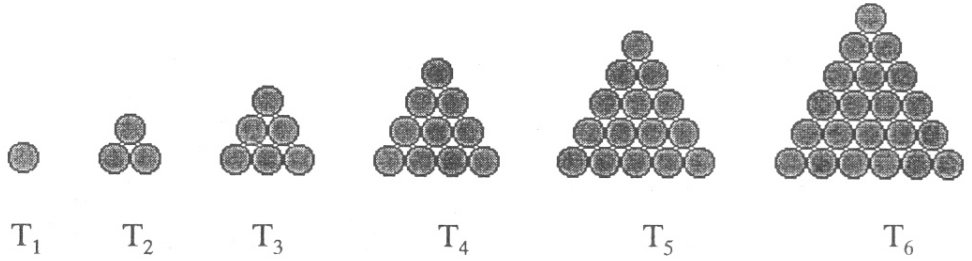
ISSN $0354 - 0359$

LOGIKA & RAZVEDRILNA MATEMATIKA
letnik *IV*, št. 6, 1994/95

Cena revije: v prosti prodaji 330 SIT, za naročnike 275 SIT in vključuje 5% prometni davek

Enakostranični trikotnik iz žetonov

Okrogle in med seboj enako velike žetone lahko na zelo preprost način zložimo drug zraven drugega tako, da sestavljajo "enakostranični trikotnik". Povedano natančneje: središča izbranih trojic krogov so v tem primeru hkrati tudi oglišča enakostraničnih trikotnikov. Na spodnji risbi je nekaj najmanjših tovrstnih trikotnikov:



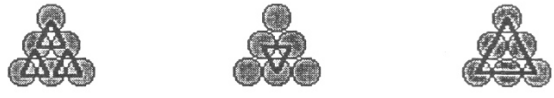
Trikotnike smo zapovrstjo označili s T_1, T_2, T_3... Opazimo lahko, da jih je mogoče sestavljati samo iz 1 ali 3 ali 6 ali 10 ali 15... žetonov. Sami poskusite preveriti, da na opisani način ni mogoče sestaviti enakostraničnega trikotnika iz, denimo, 12 žetonov.

Pravzaprav so ti trikotniki že zelo zgodaj pritegnili pozornost matematikov, saj so jim posebno pozornost namenjali že starogrški Pitagorejci. Služili so jim namreč kot izhodišče za študij tako imenovanih *trikotniških števil* oziroma splošneje *figurativnih števil*. Na podoben način lahko namreč sestavljamo tudi kvadrate, petkotnike, šestkotnike in še druge like. Vsa ta števila krasijo številne zanimive lastnosti, ki jih je, na srečo, moč odkriti na sorazmerno preprost način. In nekaj tovrstne zabave vam ponujajo tudi naloge v nadaljevanju.

Vrnimo se torej k trikotnikom iz začetne risbe. Za začetek se kar sama po sebi ponuja osnovna naloga o preštevanju žetonov v njih.

1. Koliko žetonov je v trikotniku T_{10}?
2. Kakšna je zveza med številoma žetonov v dveh zaporednih trikotnikih T_n in T_{n+1}?
3. Koliko žetonov je v trikotniku T_n? Pri tem naj bo n poljubno izbrano naravno število.
4. Ali je mogoče na opisani način sestaviti tudi enakostranični trikotnik iz 210 žetonov?

Opazimo lahko, da se v vsakem od trikotnikov T_n skriva še kopica manjših, prav tako enakostraničnih trikotnikov. Na primer: v trikotniku T_3 je kar pet takšnih "skritih" notranjih trikotnikov.



Zgornji primer najbrž zadošča, da se lahko podkovano lotite tudi nekoliko zahtevnejših preštevanj v večjih trikotnikih.

5. Koliko je vseh različnih enakostraničnih trikotnikov, ki imajo oglišča v središčih krogov v trikotniku T_4?
6. Koliko je vseh različnih enakostraničnih trikotnikov, ki imajo oglišča v središčih krogov v trikotniku T_5?
7. Koliko je vseh različnih enakostraničnih trikotnikov, ki imajo oglišča v središčih krogov v trikotniku T_6?

Zanimive so tudi naslednje naloge o obračanju trikotnikov. Čeprav so dokaj znane in jih lahko najdemo v številnih knjigah o razvedrilni matematiki, bodo za večino mlajših reševalcev najbrž vendarle povsem sveže.

8. Najmanj koliko žetonov je treba premakniti v trikotniku T_3, da dobimo iz "pokončnega" trikotnika na levi strani "obrnjeni" trikotnik na desni strani? Obrazloži premike.



9. Najmanj koliko žetonov je treba premakniti v trikotniku T_4, da ga, podobno kakor v prejšnji nalogi, "obrnemo"?
10. Najmanj koliko žetonov je treba premakniti v trikotniku T_5, da ga, podobno kakor v prejšnji nalogi, "obrnemo"?

V pomoč vam izdamo, da je v "pokončnem" trikotniku T_2 treba premakniti le en sam žeton, da dobimo "obrnjeni" trikotnik. In če vam zgornje tri naloge morebiti ne gredo najbolje od rok, poskusite poiskati najprej rešitev na tem manjšem trikotniku.

V začetnih nalogah ste morali trikotnike preštevati, naslednje tri pa terjajo od vas, da jih "razdrete". Te zanimive naloge si je izmislil znani japonski sestavljalec ugank *Kobon Fujimura*.

11. Najmanj koliko žetonov je treba odstraniti iz trikotnika T_3, da med preostalimi žetoni ne bo več oglišč nobenega enakostraničnega trikotnika.
12. Najmanj koliko žetonov je treba odstraniti iz trikotnika T_4, da med preostalimi žetoni ne bo več oglišč nobenega enakostraničnega trikotnika.
13. Najmanj koliko žetonov je treba odstraniti iz trikotnika T_5, da med preostalimi žetoni ne bo več oglišč nobenega enakostraničnega trikotnika.

Domenimo se za nadalje, da je lahko vsak žeton v trikotnikih T_n rumene ali modre barve. V naslednjih štirih nalogah morate v posameznih trikotnikih T_n poiskati vse različne postavitve žetonov. Pri tem vzemimo, da sta dve postavitvi žetonov enaki, če:

– je mogoče dobiti eno z ustreznim zasukom druge okrog središča trikotnika,
– če je mogoče dobiti eno s pomočjo zrcaljenja druge čez simetralo trikotnika
– ali pa če je mogoče dobiti eno z ustreznim zaporedjem zasukov in zrcaljenj.

Za ponazorilo so na spodnji risbi prikazane vse 4 različne postavitve obarvanih žetonov v trikotniku T_2.

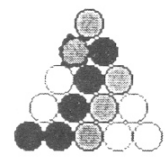


Poskusite sedaj streti še kak oreh o "obarvanih trikotnikih". Prva naloga v četverici služi kot "ogrevanje" za naslednje tri.

14. Koliko je vseh različnih postavitev obarvanih žetonov v trikotniku T_3?
15. Koliko je vseh takšnih različnih postavitev žetonov v trikotniku T_3, v katerih ni nobenega enakostraničnega trikotnika, ki bi imel na svojih ogliščih vse tri žetone enakih barv?
16. Koliko je vseh takšnih različnih postavitev žetonov v trikotniku T_4, v katerih ni nobenega enakostraničnega trikotnika, ki bi imel na svojih ogliščih vse tri žetone enakih barv?
17. Koliko je vseh takšnih različnih postavitev žetonov v trikotniku T_5, v katerih ni nobenega enakostraničnega trikotnika, ki bi imel na svojih ogliščih vse tri žetone enakih barv?

Za konec pa vam predlagamo še zanimivo igro $Trik$ na trikotnikih T_n, namenjeno dvema igralcema. Vsak ima na zalogi žetone svoje barve, ki jih zatem v igri izmenjaje polagata na kroge oz. igralna polja trikotnika. Zmaga tisti, ki prvi prisili nasprotnika, da s svojo barvo sestavi enobarvni enakostranični trikotnik (natančneje: trojico enako obarvanih oglišč nekega enakostraničnega trikotnika). Če nimate pri roki ravno žetonov, si lahko pomagate tudi z barvanjem igralnih polj s svinčnikom.

Za ilustracijo si oglejmo pozicijo na desni. V njej je igralec, ki je na potezi, pa naj bo to "rumeni" ali "modri", pred neizbežnim porazom. S svojim naslednjim žetonom si bo namreč zagotovo napravil enobarvni enakostranični trikotnik. Za vajo tudi sami preverite vse možne poteze.



Sicer pa je priporočljivo, da se za resnejšo pripravo na Trik najprej lotite zgornjih nalog (ali pa v skrajnem primeru vsaj njihovih rešitev). Na ta način boste imeli namreč boljši pregled nad igro, lažje boste prepoznavali enobarvne trikotnike, lažje se boste torej izogibali svojim enobarvnim trikotnikom in jih obenem spretneje "podtikali" nasprotniku.

Najbrž bo najbolje, če igrate v začetni fazi učenja Trik na trikotnikih T_4 ali T_5, kasneje pa lahko pridobljene izkušnje uporabite tudi v igri na večjih igralnih poljih.

Za "teoretike" Trika pa se seveda tudi v tem primeru ponuja kopica zanimivih izzivov. Denimo:

18. Poiščite najkrajšo možno partijo igre Trik na trikotniku T_5. Pri tem navedite le končno pozicijo, v kateri je igralec, ki je na potezi, pred zanesljivim porazom. Seveda pri tem nima smisla upoštevati tistih rešitev, ki vsebujejo namerno sestavljene enobarvne trikotnike enega od igralcev.

19. Poiščite morebitno najdaljšo možno partijo igre Trik na trikotniku T_5. Pri tem navedite spet le končno pozicijo, v kateri je igralec, ki je na potezi, pred zanesljivim porazom.
20. Ali obstaja partija igre Trik na trikotniku T_5, ki se konča neodločeno – brez zmagovalca? Navedite le morebitno končno pozicijo.
21. Poiščite najkrajše in najdaljše možne partije igre Trik še za nekatere druge trikotnike T_n. Pri tem spet navedite le končne pozicije, v katerih je igralec, ki je na potezi, pred zanesljivim porazom.

Zagotovo boste po daljšem igranju prišli do svoje, bolj ali manj učinkovite strategije za vsakega od obeh igralcev. Vabimo vas, da tovrstne razmisleke, lahko tudi zanimive predloge za morebitno izboljšavo igre, pošljete na uredništvo revije. Najzanimivejše bomo objavili in nagradili.

Pa veliko zabave.

Rešitve

1. Označimo z $\check{z}_n$ število vseh žetonov v trikotniku T_n (npr.: $\check{z}_1 = 1$, $\check{z}_2 = 3$, $\check{z}_3 = 6$...). Tedaj je:
$$\check{z}_{10} = 10 + 9 + 8 + ... + 2 + 1 = 55.$$

2. Iskano zvezo opisuje t. i. rekurzivna formula: $\check{z}_{n+1} = n + 1 + \check{z}_n$.
3. $\check{z}_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
4. Da, trikotnik T_{20} je sestavljen iz 210 žetonov.
5. V trikotniku T_4 je naslednjih 15 enakostraničnih trikotnikov:



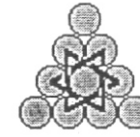
6 trikotnikov



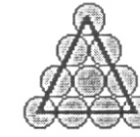
3 trikotniki



3 trikotniki

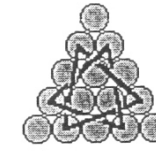


2 trikotnika

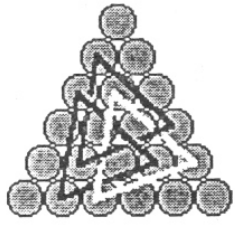


1 trikotnik

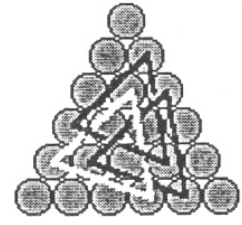
6. V trikotniku T_5 je vsega skupaj kar 35 enakostraničnih trikotnikov. Na desni risbi sta le tista dva trikotnika, ki ju je zaradi neobičajne "poševne" lege morebiti nekoliko težje odkriti. Ostale poiščemo podobno, kakor v predhodni nalogi.



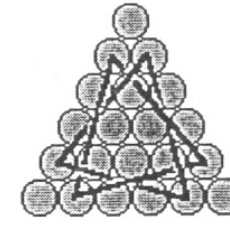
7. V trikotniku T_6 je vsega skupaj 70 enakostraničnih trikotnikov. Spet je na spodnji risbi le tistih 8 trikotnikov, ki jih je nekoliko težje odkriti. Sami preverite, da so vsi navedeni trikotniki zares enakostranični.



3 trikotniki



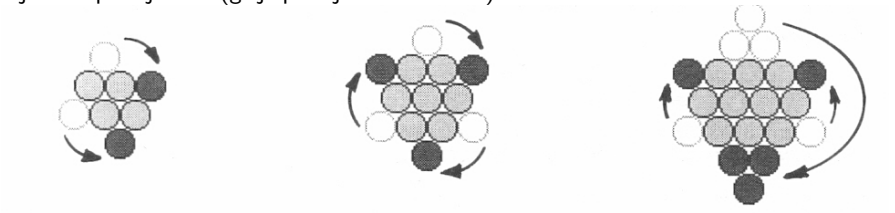
3 trikotniki



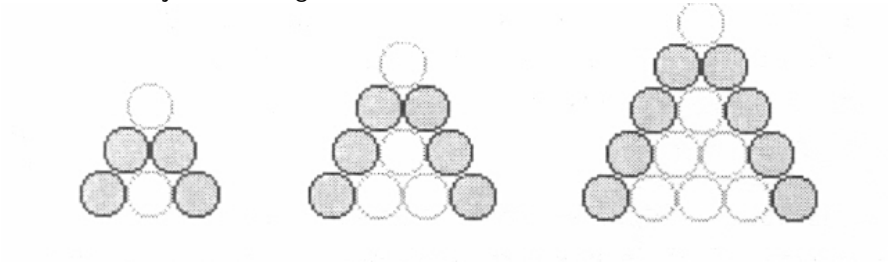
2 trikotnika

Kot zanimivost dodajmo, da je v poljubno izbranem trikotniku T_n vsega skupaj $t_n = \dfrac{(n-1)(n+1)(n+2)}{24}$ enakostraničnih trikotnikov. Dokaz za to splošno formulo terja od bralca nekoliko več pozornosti in bi ga utegnil po nepotrebnem oddaljiti od nadaljne zgodbe, zato ga ne navajamo. Brez posebnega napora pa se lahko sam prepriča, da je $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = 5$, $t_4 = 15$, $t_5 = 35$ in $t_6 = 70$, kar ustreza doslej znanim dejstvom.

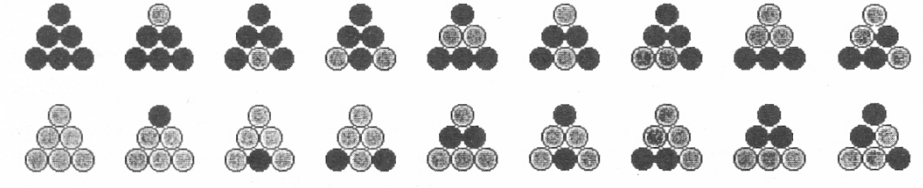
8. Za obrat trikotnika T_3 zadošča premakniti samo 2 žetona – vrhnjega in enega izmed obeh krajnih v spodnji vrsti (glej spodnjo risbo na levi).



9. Za obrat trikotnika T_4 zadošča premakniti samo 3 žetone – in to vse tri ogliščne (glej zgornjo risbo na sredini).
10. Za obrat trikotnika T_5 je treba premakniti samo 5 žetonov – oba ogliščna v spodnji vrsti in vse tri vrhnje v zgornjih dveh vrstah. Rešitev je prikazana na zgornji desni risbi.
11. Odstraniti je treba dva žetona, ki jih prikazuje spodnja risba na levi. Naloga ima v resnici še dve rešitvi, ki pa sta pravzaprav enaki tej, ki smo jo navedli. Dobimo ju namreč kar z zasukom risbe za 120° oziroma 240° okrog središča trikotnika. Podobna opomba velja tudi za rešitvi naslednjih dveh nalog.



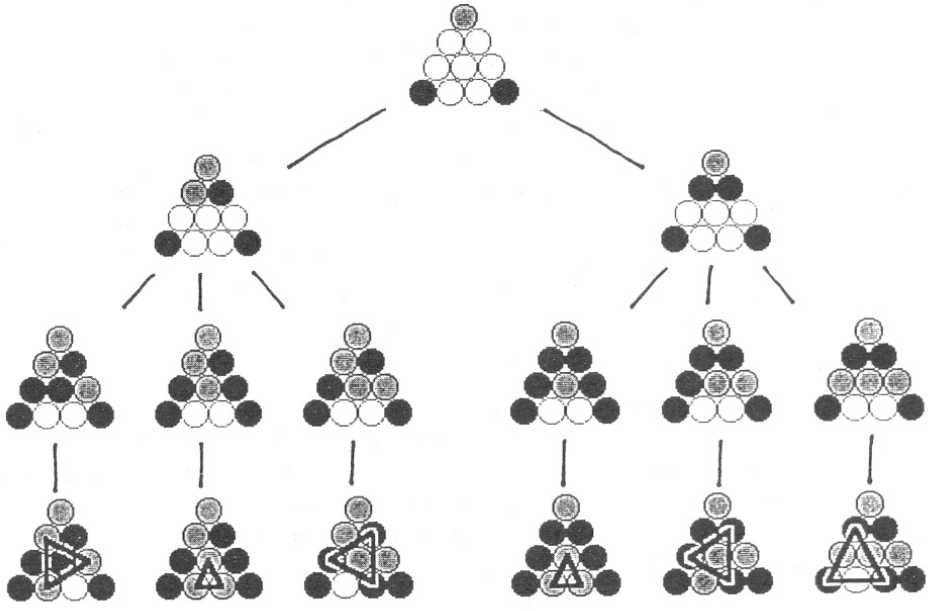
12. Odstraniti je treba 4 žetone, ki jih prikazuje zgornja risba na sredini. Ni se težko prepričati, da brez teh 4 žetonov ne moremo sestaviti nobenega od 15 enakostraničnih trikotnikov. To pomeni, da več kakor 4 žetonov zares ni treba odstranjevati iz začetnega trikotnika. Sami še preverite, da pa lahko ob samo 3 odstranjenih žetonih v vsakem primeru poiščemo v preostanku trikotnika trojico žetonov, ki določajo enakostranični trikotnik.
13. Odstraniti je treba 7 žetonov, ki jih prikazuje zgornja risba na desni.
14. Trikotnik T_3 lahko sestavimo iz obarvanih žetonov na 18 različnih načinov:



15. Dvobarvnih trikotnikov T_3, ki ustrezajo opisanim zahtevam, je 6. Na spodnji risbi so samo 3 rešitve; preostale 3 pa dobimo, če v navedenih zamenjamo med seboj rumeno in modro barvo žetonov.



16. Trikotnika T_4 ni mogoče tako sestaviti iz obarvanih žetonov, da bi v njem ne bilo nobenega enobarvnega enakostraničnega trikotnika. O tem se zlahka prepričamo, če preverimo vsa možna barvanja. Denimo takole, kot kaže naslednji drevesni diagram:



17. Ker niti trikotnika T_4 ni mogoče tako sestaviti iz obarvanih žetonov, da bi v njem ne bilo nobenega enobarvnega enakostraničnega trikotnika, je to le še toliko bolj neizvedljivo za trikotnik T_5. Iz povedanega tudi sledi, da se v nadaljevanju opisana igra *Trik* zmeraj konča z zmagovalcem.

Vilko Domajnko

Čarovnije Lewisa Carrolla

"Vidim, da občuduješ moj zabojček," je prijazno rekel Vitez. *"To je moja lastna iznajdba – za obleko in sendviče. Kot vidiš, ga nosim okoli obrnjenega, da mi dež ne pada noter."*
"Zato vam pa vse drugo lahko pade ven," je blago pripomnila Alica.

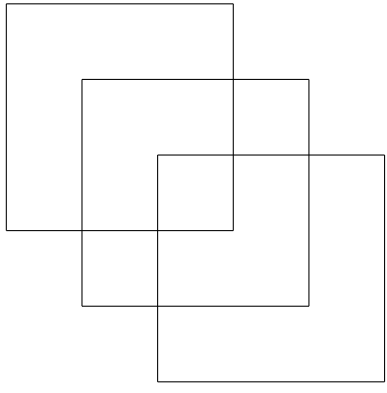
Kdor je že kdaj prebiral *Alico v ogledalu*, se je ob teh vrsticah spomnil najbolj simpatičnega junaka Carrollove pravljice: očarljivo nerodnega, profesorsko raztresenega in strastno iznajditeljskega Belega viteza. Mnogi biografi Lewisa Carrolla opozarjajo, da si je avtor v vitezovem liku izrisal karikiran avtoportret.

Charles Lutwidge Dodgson (to je bilo Carrollovo pravo ime) je bil zares nenavaden človek. Svoj vek je preživel kot konzervativen profesor matematike na oxfordski univerzi *Christ Church*, napisal je vrsto priročnikov iz matematike in logike, obenem pa je snoval nesmiselne verze in pravljice ter bil eden izmed pionirjev portretne fotografije in navdušen izumitelj. Vse življenje je ostal samski. Skrbno si je izbiral znance, najraje pa je prijateljeval z deklicami. Zanje si je izmišljal pesmice in zgodbice, ure nespečnosti pa je koristno prebil tako, da je sestavljal uganke, igrice in igračke, s katerimi je potem zabaval male prijateljice. Z dovoljenjem staršev jih je vabil k sebi na čajanke in jih fotografiral. Na potovanja je nosil veliko črno torbo, polno presenečenj za otroke, ki bi jih lahko po naključju spoznal. Z njimi se je še dolgo potem, ko so se njihova pota ločila, zvesto dopisoval.

Trije kvadrati

Lewis Carroll je leta 1969 odpotoval v Reading. Tam je v knjigarni rezerviral nekaj knjig, potem pa se je zgodilo, da se je seznanil z deklico Isabel Standen. Imenitno sta se zabavala z ugankami in Carroll se je šele pri svojih domačih v Gilfordu spomnil na knjige. Zato jo je v pismu poprosil, če bi šla v knjigarno in tam uredila, da bi mu jih poslali po pošti. Povprašal pa jo je tudi, ali je že uspela razvozlati problem s tremi kvadrati.

In kakšna je bila ta Carrollova uganka s kvadrati?



Z eno samo neprekinjeno črto nariši takole prepletene kvadrate. Pri tem pazi, da ne bi s svinčnikom potegnila po že izrisani črti ali je kjerkoli sekala.

Skrivnostno število

Število 142857 na prvi pogled ni nič posebnega, pa le igra glavno vlogo v uganki s ponavljajočimi se števkami, ki jo je Lewis Carroll 26. januarja 1897. omenil v svojem dnevniku in so mu jo štirinajst dni kasneje nepodpisano objavili v reviji *Chatterbox* (Klepetulja).

In kaj je pri tem številu tako nenavadnega? No, pomnožite ga s števili od 2 do 7, pa boste videli.

$$142857 \times 2 = 285714$$
$$142857 \times 3 = 428571$$
$$142857 \times 4 = 571428$$
$$142857 \times 5 = 714285$$
$$142857 \times 6 = 857142$$
$$142857 \times 7 = 999999$$

Opazili ste, da prvo peterico rezultatov sestavljajo iste števke in da se te vrstijo v istem zaporedju, le da vsakega začenja druga. Najbolj nenavadno pa je, da je sedemkratnik tega skrivnostnega števila 999999. Navdušenega bralca *Alice v Čudežni deželi* bo vsa ta reč morebiti spomnila na prismuknjeno čajanko pri Klobučarju, Marčnem zajcu in Polhu, ki se presedajo okrog dolge mize, da se tako izognejo pomivanju skodelic, vi pa raje poskušajte razkriti skrivnost števila 142857.

Naj vam nekoliko pomagamo? Za začetek 1 delite s 7.

Napoved seštevka

Lancelot Robson, sin enega izmed Carrollovih prijateljev, se je vse življenje rad spominjal čarovnije s številkami, ki ji je bil v mladih letih priča na otroški zabavi. Gospod *"Alica v Čudežni deželi"*, tako so otroci poimenovali pisatelja, je male goste presenetil s trditvijo, da lahko napove seštevek še ne določenih števil. *"Žal obiskujete nadvse slabe šole! Jaz se nikoli ne trapim s seštevanjem, raje najprej napišem seštevek in šele potem seštevam."* V dokaz temu nenavadnemu govorjenju je na kos papirja zapisal svojo napoved rezultata in poprosil enega izmed odraslih, naj jo shrani. Na nov list je nato napisal štirimestno število in povabil deklico iz publike, naj podenj prispeva četvero poljubnih števk. Carroll je tem spodaj brž pripisal še četvero števk, nagovoril nekega dečka, da je dodal štiri števke po svoji izbiri, ter stolpec zaključil s peto vrstico.

1066 – Lewis Carroll
2961 – deklica
7038 – Lewis Carroll
5017 – deček
4982 – Lewis Carroll

Otroci so nato dobili nalogo ta števila sešteti in najbrž ni potrebno posebej poudariti, da se je rezultat natanko ujemal s Carrollovo napovedjo: 21064.

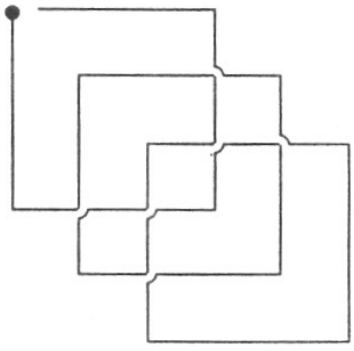
Kaj mislite, kako je ta matematik in književnik čaral s številkami?

Rešitve ugank

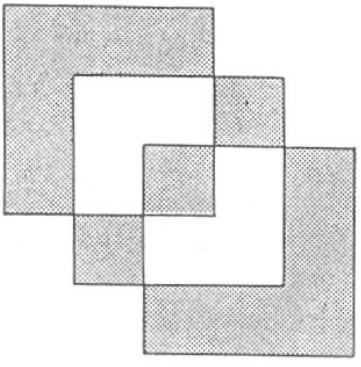
Trije kvadrati

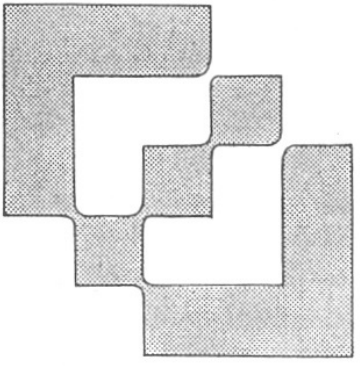
Risbe prikazujejo dve izmed možnih rešitev problema s kvadrati.

1.



2.





Skrivnostno število

Ko delimo 1 s 7, dobimo $0,142857142857142857...$ Pred seboj imamo periodično število, saj se v njem decimalke ponavljajo. Carroll je do svojega "skrivnostnega števila" prišel tako, da je prvih šest decimalnih mest (pred ponovitvijo) zapisal kot popolno število. Ena sedmina pomnožena s 7 da 1 (ali $0,999999$, če omejimo število samo na šest decimalnih mest).

Napoved seštevka

Čarovniški trik je temeljil na dejstvu, da je Carroll številoma, ki sta ju pripisala otroka, takoj dodal taki števili, da je v obeh primerih dobil seštevek 9999. Zato je končni rezultat lahko le dvakrat 9999 plus število, ki je bilo zapisano na začetku. Lahko bi rekli tudi takole: prvo število plus 20000 minus 2.

Miha Mohor

Natečaj za najboljšo logično nalogo

Pravljica o pravljici

Nekoč je šla mama Koza po opravkih. Kozlički, bilo jih je sedem, so ostali sami doma. Bili so še majhni in naivni. Ko je nekdo potrkal na vrata, so se preplašeni poskrili po hiši, misleč, da je Hudobni volk. Toda, ko je najmlajši kozliček, po imenu Mezinček, radovedno pogledal skozi okno (zanimalo ga je namreč, kako izgleda Hudobni volk), je videl, da stoji pred vrati le poštar. Prinesel jim je pismo mame Koze (v tistem času niso poznali telefonov, telegramov in takih stvari), v katerem jim je sporočala, da pride domov kasneje, kot je predvidevala. Kozlički niso bili posebno zaskrbljeni zaradi tega. Veselo so se igrali naprej. Pozvonilo je še enkrat. Tokrat pa so pozabili na previdnost. Odpahnili so vrata, a že v naslednjem trenutku je nekdo planil v sobo. Preplašeni so si malčki poiskali skrivališča, toda volk - kajti bil je volk - je enega za drugim zbasal v vreče, ki jih je v ta namen prinesel s seboj. Našel je vse kozličke. Le najmanjšega, Mezinčka, ni bilo nikjer. Volku se ni ljubilo premetati vse hiše zaradi tega "smrkavčka", ki tako ali tako ni bil ne vem kakšen posladek, ko ni imel še nič mesa. A Mezinček se je skril v stensko uro in je videl mnogo stvari. Tako je preplašen čakal na mamo Kozo, da bi ji povedal, kaj je bilo.

Toda groza – vrnila se je šele ob mraku in zato nista mogla poiskati volka še istega dne. Mama Koza se je hitro zbrala, saj se je spomnila, da volk kozličkov ne bo požrl sam in takoj. Razdelil jih bo še med svoje brate. To pa se bo zgodilo vsaj kak dan po dogodku. Vprašala je Mezinčka, kje je stal vsak kozliček in kakšno barvo obleke je nosil. Pa tudi to je hotela vedeti, v vrečo katere barve ga je volk stlačil. Razložila je Mezinčku, da bi bilo dobro to vedeti, kajti v tej deželi je navada, da ujame en volk iz družine nekaj kozličkov, jih zbaše v vreče različnih barv, toda v vreči ne sme biti kozliček z obleko enake barve. Ko volk prinese vreče s kozlički svojim bratom, poje vsak kozlička, ki je oblečen v obleko take barve kot on. Toda Mezinček iz ure seveda ni mogel videti vsega. Pa tudi pozabil je že nekaj stvari. Zato jih mami Kozi ni mogel povedati točno takih, kot so bile. Vedel je le to:

1. V rumeno vrečo je Hudobni volk stlačil Janezka, vendar se le-ta ni skrival za pečjo.
2. Tisti kozliček, ki se je skrival za pečjo, ni bil oblečen v oblačilo ne rjave, ne sive barve. Eden od teh dveh se je skrival na omari.
3. V rumeno vrečo volk ni zbasal kozlička, ki je bil odet v črno, ne kozlička, ki se je skrival za pečjo.
4. V modro obleko ni bil oblečen ne tisti kozliček, ki se je skrival na omari, ne Dija in ne kozliček, ki ga je dal volk v sivo vrečo.
5. Bumbi ni bil kozliček, ki se je skrival na omari, niti ni bil oblečen v rjavo obleko.
6. V rumeni vreči ni bil ne kozliček v sivi, ne kozliček v zeleni obleki in ne kozliček, ki se je skril med igrače.

7. Dija ni bil tisti korenjak, ki se je skril pod mizo, niti ni bil kozliček z rjavo obleko. Tudi Muki ni imel rjave obleke. Kozliček v rjavi obleki se ni skril za omaro.
8. Benjamin ni imel črne obleke, pa tudi v rjavo vrečo ga niso stlačili.
9. Tisti, ki se je skrival po mizo, ni bil Guliver, niti ni bil tisti kozliček, ki je imel rjavo obleko, ne tisti, ki je imel črno.
10. Kozliček, ki je bil oblečen v sivo obleko, ni bil ne Muki ne Guliver.
11. Guliver se je skril med igrače in ni bil oblečen v modro.
12. Dija ni bil kozliček, ki se je skrival za pečjo, niti ne kozliček z zeleno obleko. Ta je bil namreč Bumbi.
13. V sivo vrečo volk ni zbasal Bumbija. Kozliček, ki ga je dal volk v rjavo vrečo, ni kozliček v zelenem, ne Dija.
14. V modri vreči ni Dije, ne kozlička v zeleni obleki.

Podatki so še: skrivališče v akvariju, rumena obleka, črna in zelena vreča.

Mama Koza je po kratkem premisleku seveda ugotovila, kje so se kozlički skrivali, kakšne barve obleko so si nadeli (tega ni mogla vedeti od prej, saj je odšla že zgodaj zjutraj, ko so kozlički še spali) in v katere vreče jih je volk stlačil.

Bojevito je vstala s stola in z Mezinčkom sta se odpravila na lov za volkovi. Prišla sta do jase, kjer so počivali volkovi po obilnem kosilu. Torej sta prišla prepozno. Toda pogumno sta stopila na jaso in Hodobni volk, ki je ugrabil kozličke, je planil pokonci in močno zatulil, da bi opozoril brate, kajti spoznal ju je. Nato je rekel: *"Kozličke smo že požrli. Ne dobita jih nazaj!"*

Koza si je oddahnila. Torej so vsaj še celi. Niso jih pojedli, temveč požrli! Čimprej jih mora rešiti, tako kot je to naredil lovec pri Rdeči kapici. Toda opazila je, da volkov ni šest, temveč deset! V sivo obleko jih je bilo oblečenih kar pet. Kdo izmed teh petih je torej požrl kozlička? Koza se je odločila, da jih bo kar naravnost vprašala. Bo že ugotovila, kdo izmed njih laže in kdo govori resnico. Nato je opazila še, da imata izmed petih sivih volkov le četrti in peti volk precej napet trebuh, zato je sklepala, da je kozlička požrl eden izmed njiju. Vprašala je torej vseh deset volkov, kdo od njih je požrl katerega kozlička. Odgovori so bili taki:

1. volk (v sivem): *5. volk je že marsikdaj pojedel kakega kozlička.*
2. volk (v sivem): *Resnico govori 1. ali 10. volk, mogoče pa tudi oba.*
3. volk (v sivem): *5. in 10. volk govorita resnico.*
4. volk (v sivem): *Nisem požrl Benjamina.*
5. volk (v sivem): *4. volk je že marsikdaj požrl kakega kozlička.*
6. volk (v rumenem): *7. volk govori resnico, 8. volk pa laže.*
7. volk (v modrem): *Resnico govori ali 9. ali 3. volk, mogoče pa tudi oba.*
8. volk (v zelenem): *5. in 2. volk govorita resnico.*
9. volk (v črnem): *5. in 1. volk govorita resnico.*
10. volk (v rjavem): *1. volk je že marsikdaj pojedel kakega kozlička.*

Hudobni volk pa je rekel še, da sta izjavi 4. in 6. volka obe hkrati resnični ali pa obe hkrati neresnični. To se je kasneje izkazalo za absolutno resnično.

Mama Koza je dobro premislila in nato prišla do zaključka, kdo je požrl kozlička v sivem. Za druge pa je to tako ali tako vedela po barvi oblek. Z Mezinčkom sta se poslovila in rekla, da gresta domov. Toda skrila sta se za drevesi in počakala, da so volkovi znova zaspali. Nato je mama Koza iz žepa potegnila škarje in z Mezinčkom sta se podala na delo...

Rešila sta vseh šest kozličkov in to po zaslugi mame Koze (Mezinček je ob paranju trebuhov omedlel). Kozlički pa so bili pri odpiranju vrat odslej previdnejši.

Rešitev:

1.

kozliček	skrivališče	barva obleke	barva vreče
Benjamin	na omari	siva	modra
Bumbi	pod mizo	zelena	črna
Janezek	akvarij	rjava	rumena
Dija	za omaro	črna	zelena
Muki	za pečjo	modra	rjava
Guliver	med igračami	rumena	siva

2. Kozlička v sivem je pojedel 4. volk.

Polona Udovič
Ljubljana

Dokazovanje z metodo supozicije

1. Osnovna dejavnost v matematiki je dokazovanje. Pri dokazovanju izhajamo iz že znanih izrekov in nato izpeljujemo nove in nove matematične resnice. V tej smeri seveda ni konca, vedno se da formulirati novo trditev, ki jo je treba dokazati. Kaj pa v obratni smeri? Pri dokazu vsakega izreka se sklicujemo na že dokazane izreke in teh je seveda le končno mnogo. Tako pridemo do prvega dokazanega izreka. V tem prvem dokazu se lahko sklicujemo le na trditve, ki smo jih privzeli brez dokaza – to so *aksiomi*. Naslednja stvar, ki jo je treba omeniti, pa so pravila sklepanja, ki jih pri izpeljevanju uporabljamo. Le-ta imajo obliko

$$\frac{A_1 \ldots\ldots A_n}{B}$$

uporabljamo pa jih takole: če smo že dokazali izreke A_1, ..., A_n, potem lahko k teoriji dodamo nov izrek B.

Seveda pa se vse, kar je v zvezi z dokazovanjem, tudi zapisuje, to je, dogaja se v okviru nekega jezika.

Če torej želimo opredeliti pojem dokaza ali pojem dokazane trditve, moramo:
– opisati jezik, v katerem bomo izrazili našo teorijo,
– našteti vsa pravila sklepanja, ki jih smemo uporabljati,
– izmed trditev izbrati nekatere za aksiome,
– če imamo tudi definicije, moramo formulirati njihovo konstruiranje.

Vse, kar smo do sedaj našteli, nam že namiguje, da ne bo mogoče opredeliti najbolj splošnega pojma dokaza v matematiki, pač pa bomo skušali opredeliti pojem dokaza za kakšen majhen del matematike, to je, za kakšno enostavno matematično teorijo.

2. V tem sestavku se bomo ukvarjali z lastnostmi negacije in implikacije ter z njunimi medsebojnimi odnosi. Tej teoriji bomo rekli izjavni račun.

Da bi lahko opisali jezik, moramo najprej našteti znake, ki jih lahko uporabljamo:
– znaki za izjavne spremenljivke so: p, q, r, s, t, u, v
– znak za negacijo: N
– znak za implikacijo: C

Vsakemu končnemu zaporedju znakov pravimo *izraz*. Med izrazi bomo izbrali nekatere, rekli jim bomo formule, ki ustrezajo stavkom v pogovornem jeziku:
a) Vsaka izjavna spremenljivka je formula.
b) Če je izraz A formula, potem je tudi izraz NA formula.
c) Če sta izraza A in B formuli, potem je tudi izraz CAB formula.
d) Izraz je formula, če je dobljen po končnem številu uporab točk *a)*, *b)* in *c)*.

To, da pišemo znak za povezavo pred obema argumentoma, imenujemo *poljska notacija*, ki jo je prvi uporabljal Lukasiewicz. Formulo "Np" preberemo "*ni res, da* p" ali "*ni* p". Formulo "Cpq" preberemo "*če* p, *potem* q".

Zdaj želimo doseči, da bo možno dokazovati v naši teoriji formulo $CpCCpqq$ takole:

Recimo, da velja p. Pri tej predpostavki privzemimo še, da velja Cpq. Od tod sklepamo, da velja q. Ker pri predpostavki Cpq velja q, velja $CCpqq$. Iz p torej sledi $CCpqq$, zato velja $CpCCpqq$.

Ta dokaz bomo v formalizmu zapisali takole:

1	. p	PR (predpostavka)
2	. . Cpq	PR
3	. . q	$EC\ 1,2$ (vrstica 3 sledi iz vrstic 1 in 2 z opustitvijo – Eliminacijo – znaka C)
4	. $CCpqq$	$IC\ 2,3$ (vrstica 4 sledi iz vrstic 2 in 3 po pravilu uvedbe – Introdukcije – znaka C)
5	$CpCCpqq$	$IC\ 1,4$

Pika (oziroma pike) pred formulo zaznamuje odvisnost formule od predpostavke, ki to piko uvaja. Formule, ki nimajo nobene pike, so dokazane; formule, pred katerimi je ena pika, veljajo pri pogoju, da velja predpostavka, ki to piko uvaja. Formule, pred katerimi je n pik, veljajo pri pogoju, da veljajo vse predpostavke, ki uvajajo 1, 2, ..., n pik. Formule, ki imajo pred seboj n pik, imenujemo *domena predpostavke*, ki prva uvaja n pik. Formule, ki imajo $n-1$ pik pred seboj, sestavljajo *neposredno naddomeno*, formule z $n+1$ pikami pred seboj pa *neposredno poddomeno* formule, ki uvaja n pik. Izraz poddomena (oz. naddomena) je rezerviran za množico formul, pred katerimi je večje (manjše) število pik kot pri dani predpostavki. Formula, ki velja v naddomeni, velja tudi v poddomeni.

V zvezi z negacijo bomo uporabljali še naslednjo obliko pravila *reductio ad absurdum*: če v domeni predpostavke NA veljata formuli B in NB, potem izjava A velja v neposredni naddomeni predpostavke NA.

Tako dokaz formule $CCNpNqCqp$ izgleda takole:

1	. $CNpNq$	PR
2	. . q	PR
3	. . . Np	PR
4	. . . Nq	$EC\ 3,1$
5	. . p	$EN\ 3,2,4$ (vrstico 5 smo dobili iz vrstic 3,2 in 4 z eliminacijo negacije)
6	. Cqp	$IC\ 2,5$
7	$CCNpNqCqp$	$IC\ 1,6$

(Pri pravilu reductio ad absurdum sklepano z NP na p, to je, pri sklepu eliminiramo znak N, zato oznaka EN).

Pravili opustitve (eliminacije) in uvedbe (introdukcije) za implikacijo formuliramo takole:

a) Če veljata A in CAB, velja tudi B. Število pik pred formulo B je enako večjemu od števila pik pred formulama A oz. CAB.

b) Če v domeni predpostavke A velja formula B, potem lahko dodamo formulo CAB v neposredno naddomeno predpostavke A.

Sedaj lahko opredelimo pojem dokaza za našo teorijo: dokaz je zaporedje formul, vsaka

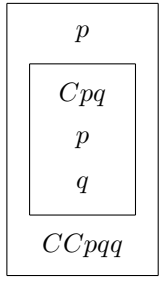
izmed njih je predpostavka ali pa je dobljena iz predhodnih formul z enim od treh opisanih pravil sklepanja.

Če je zadnja formula veljavna v ničelni domeni (v domeni brez pike), rečemo, da je dano zaporednje dokaz te zadnje formule. Formula je dokazljiva, če obstaja kakšen dokaz zanjo.

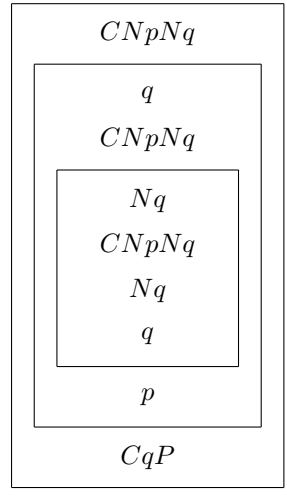
Analiza dokaza, označba vrstic in pike niso del dokaza, pač pa takšen zapis povečuje preglednost in razumljivost dokaza.

Zanimivost tega sistema je, da nima aksiomov.

Ta sistem je izdelal poljski logik Stanislaw Jaskowski leta 1926, katerega je na način sklepanja opozoril Jan Lukasiewicz. V prvotni obliki sta zgornji izpeljavi izgledali takole:



$CpCCpqq$



$CCNpNqCqp$

Nekateri izrazi, kot so $'p'$, $'q'$, $'CNpNq'$, ki so zapisani zunaj nekega pravokotnika, so bili zapisani ponovno znotraj pravokotnika, kar se je z dopolnilom pravil pokazalo za odveč. Seveda pa pravokotniki lepo ponazarjajo domeno predpostavke.

Dopolnimo naslednje dokaze z analizo ali manjkajočimi formulami:

a)

1	$. NNp$	?
2	$. . Np$	?
3	$. . Np$	?
4	$CNNpp$	?

b)

1	?	PR
2	?	PR
3	?	PR
4	?	$EN\ 3,3,2$
5	?	$EN\ 2,1,4$
6	$CpNNp$	$IC\ 1,5$

a) Za prvo in drugo vrstico je razlaga PR, saj uvajata pike. V domeni predpostavke $Np(2)$ veljata tako $Np(2)$ kot $NNp(1)$, zato je razlaga za tretjo vrstico $EN\ 2,2,1$, četrta vrstica uvaja znak C, zato $IC\ 1,3$.

b) Šesta vrstica nam pove, da v prvi oz. peti vrstici manjkata ”$. p$” oz. ”$. NNp$”. Peta vrstica nam pove, da imamo v drugi vrstici ”$. . NNNp$” in da je četrta vrstica negacija

prve, to je ". . Np", mora pa imeti dve piki. Tretja vrstica ima tri pike, ker vsaka predpostavka uvaja dodatno piko, formulo pa dobimo iz formule druge vrstice, če ji odstranimo en "N": ". . . NNp".

V našem sistemu (sistem naravne dedukcije, ki ga je uvedel poljski logik Stanislaw Jaskovski) smo imeli tri pravila sklepanja, oziroma štiri, če računamo še uvedbo predpostavke. Lahko bi dodali še kakšno pravilo. To bi skrajšalo nekatere dokaze. Zanimivo pa je, da že s temi pravili lahko dokažemo vse tavtologije, v katerih nastopajo le negacije in implikacije. Temu pravimo, da je naš sistem *popoln*. Obratno, da lahko dokažemo le tavtologije, pomeni, da je naš sistem *zdrav* ali *konsistenten*.

Rešimo še naslednjo nalogo: Imamo tri ljudi. Vemo, da je kvečjemu eden od njih lažnivec, to je, da se včasih tudi zlaže. Pokažimo, da lahko z vprašanjem *"Ali je prvi resničnik?"*, ki ga postavimo drugemu, najdemo človeka, ki vedno govori resnico.
Kako bi formulirali problem samo z negacijo in implikacijo? Najprej uvedimo okrajšave:

$p =$ *Prva oseba je resničnik.*
$q =$ *Druga oseba je resničnik.*
$r =$ *Tretja oseba je resničnik.*

Kako bi zapisali dejstvo, da je kvečjemu eden lažnivec? Sestavili bi ga iz treh oz. šestih pogojev: *Če je i lažnivec, potem j $(i \neq j)$ ni lažnivec*:

$$CNpq,\ CNpr,\ CNqp,\ CNqr,\ CNrp,\ CNrq.$$

Če sedaj drugega človeka vprašamo, ali je prvi resničnik, imamo dve možnosti:

a) da reče "da", tedaj vemo še Cqp;
b) da reče "ne", tedaj vemo še $CqNp$.

Vse te formule imajo vlogo aksiomov in so veljavne v vsaki domeni.

1	Cqp	odgovor "da"
2	$CNpq$	eden od pogojev naloge
3	$. Np$	PR
4	$. q$	$EC\ 3,2$
5	$. p$	$EC\ 4,1$
6	p	$EN\ 3,5,3$

V tem primeru je prva oseba resničnik.

Sklepanje v drugem primeru je takole:

1	$CqNp$	odgovor "ne"
2	$CNrp$	pogoj naloge
3	$CNrq$	pogoj naloge
4	$. Nr$	PR
5	$. p$	$EC\ 4,2$
6	$. q$	$EC\ 4,3$
7	$. Np$	$EC\ 7,1$
8	r	$EN\ 4,5,7$

V tem primeru je tretja oseba resničnik.

Vaja: Zadnja dva dokaza prevedi v pogovorni jezik.

Naloge

1) Dopolni dokaze z analizo:

a)

1	. p	?
2	. . Cpq	?
3	. . q	?
4	. $CCpqq$	?
5	$CpCCpqq$	?

b)

1	. p	?
2	. . p	?
3	. Cqp	?
4	$CpCqp$	?

c)

1	. p	?
2	. . Np	?
3	. . . Nq	?
4	. . q	?
5	. $CNpq$	?
6	$CpCNpq$	?

2) Dopolni dokaze

a)

1	. Cpq	PR
2	?	PR
3	?	PR
4	?	$EC\ 3,1$
5	?	$EC\ 2,4$
6	?	$IC\ 3,5$
7	?	$IC\ 2,6$
8	$CCpqCCqrCpr$	$IC\ 1,7$

b)

1	?	PR
2	?	PR
3	?	$EC\ 2,1$
4	?	$EN\ 2,3,2$
5	$CCNppp$	$IC\ 1,4$

c)

1	. $CNpNCrNNr$	PR
2	. . Np	PR
3	?	$EC\ 2,1$
4	?	PR
5	?	PR
6	?	PR
7	?	$EN\ 6,6,5$
8	?	$EN\ 5,7,6$
9	?	$IC\ 4,8$
10	. p	$EN\ 2,9,3$
11	$CCNpNCrNNrp$	$IC\ 1,10$

Izidor Hafner

Diofantske enačbe

Kadar moramo poiskati celoštevilske rešitve enačbe s celoštevilskimi koeficienti, pravimo, da imamo opravka z *diofantsko enačbo*. S takšnimi problemi se je prvi ukvarjal grški matematik Diofant, ki je živel okoli leta 250 po našem štetju.

1. Poišči celoštevilske rešitve enačbe $3x - 8y = 29$.

Rešitev: Oglejmo si, kako bi nalogo reševal veliki švicarski matematik L. Euler (1707 - 1783). Bistvo njegovega postopka je, da se tista neznanka, ob kateri je koeficient absolutno manjši, izrazi z drugo neznanko. V našem primeru rešimo po x:

$$x = \frac{8y + 29}{3}.$$

Ulomek na desni zapišemo v obliki celega dela in ulomka:

$$x = 2y + 9 + \frac{2y + 2}{3}.$$

Da bi bilo x celo število, mora biti $\frac{2y+2}{3}$ celo število, to je

$$2y + 2 = 3t,$$

kjer je t celo število. To pa je spet diofantska enačba, le da je koeficient ob y v njej absolutno manjši, kot je bil v prvotni enačbi.

Ponovimo postopek na novi enačbi:

$$y = \frac{3t - 2}{2} = t - 1 + \frac{t}{2}.$$

Da bi bilo y celo število, mora biti $t = 2v$ in v celo število.

Izrazimo najprej y nato pa še x z v pa dobimo $y = 3v - 1$ in $x = 8v + 7$.

2. Dokaži, da enačba $12x + 15y = 20$ ni rešljiva v množici celih števil.

Rešitev: Če bi enačba imela rešitev v množici celih števil, bi bila njena leva stran deljiva s 3, desna stran pa ni deljiva s 3. To ni mogoče.

Velja izrek (glej): *Enačba $ax + by = c$ je rešljiva v celih številih natanko tedaj, kadar je število c deljivo z največjim skupnim večkratnikom števil a in b.*

3. Reši diofantsko enačbo $103x + 107y = 0$.

Rešitev: Konstantni člen te enačbe je enak 0. Takšnim enačbam pravimo *homogene enačbe*. Homogena enačba ima vedno rešitev $(0,\ 0)$. Lahko bi uporabili Eulerjev postopek, vendar je lažje uporabiti izrek (glej [1]):

Enačba $ax + by = 0$ *ima za rešitev vse pare* $x = \frac{b}{d}t$, $y = -\frac{a}{d}t$, *kjer je* $d = D(a, b)$ *največji skupni delitelj števil* a *in* b.

Ker je v našem primeru $d = 1$ (zakaj?), je rešitev $x = 107t$, $y = -105t$, t pa preteče vsa cela števila.

4. Reši enačbo $5x - 2y = 7$.

Rešitev: $x = 2t + 1$, $y = 5t - 1$.

5. Marko je bil leta 1994 star toliko, kot znaša vsota števk njegove letnice rojstva. Koliko je danes star Marko?

Rešitev: 26 let.

6. Pokaži, da sistem

$$x + y + z = 100$$
$$2x + 3y + 4z = 200$$

nima nobene rešitve v pozitivnih celih številih. Koliko rešitev ima v nenegativnih številih? ([1], str. 57).

Rešitev: Izrazimo z iz prve enačbe, tako da dobimo $z = 100 - x - y$, in ga vstavimo v drugo enačbo. Po ureditvi dobimo:

$$2x + y = 200.$$

Potem je $y = 200 - 2x = 2(100 - x)$, $z = x - 100$. Vidimo, da je $y > 0$ natanko tedaj, kadar je $z < 0$. Neničelna rešitev je samo $x = 100$, $y = 0$, $z = 0$.

7. Pri katerih celih številih a ima sistem

$$2x - 3y + az = 0$$
$$-4x + 6y + 8z = 0$$

celoštevilske rešitve?

Rešitev: Gre za homogen sistem enačb, ki ima gotovo vsaj *trivialno rešitev*, kot pravimo rešitvi $(0,\ 0,\ 0)$.

i) Če je $a = -4$, druga enačba ni nič drugega, kot prva, pomnožena z -2. Zato je ena enačba odveč. Izrazimo x iz prve in dobimo $x = y + 2z + \frac{y}{2}$. Potem mora biti y sodo, to je $y = 2t$, z je poljubno celo število, $x = 3t + 2z$. Rešitev je odvisna od izbire dveh števil (t in z), zato pravimo, da imamo dvoparametrično rešitev.

ii) Naj bo $a \neq -4$. Vstavimo $-4x + 6y = -2(2x - 3y) = 2az$ v drugo enačbo. Tako dobimo:

$$2az + 8z = 0$$
$$z(a + 4) = 0$$

Ker je a različen od -4, je $z = 0$. Rešitev enačbe $2x - 3y = 0$ pa je $x = 3t$, $y = 2t$, kjer parameter t preteče množico celih števil.

Opomba: V primeru *i)* smo dejansko imeli samo eno enačbo in tri neznanke, zato smo imeli dvoparametrično rešitev. V primeru *ii)* pa smo imeli dve enačbi in tri neznanke, zato je bila rešitev enoparametrična. Splošno pravilo pravi: *Če imamo m enačb in n neznank, kjer je $m \leq n$, potem lahko m neznank izrazimo z preostalimi $n - m$ neznankami. Lahko pa se zgodi, da sistem sploh nima rešitve.*

8. Zakaj sistem

$$x + y + z = 1$$
$$x + y + z = 2$$

nima rešitve (je protisloven)?

Rešitev: Če bi obstajala števila, da bi bili izpolnjeni obe enačbi, bi sledilo $1 = 2$, kar je protislovje.

9. Zakaj ima sistem

$$x + y + z = 1$$
$$2x + 2y + 2z = 2$$

dvoparametrično rešitev in ne enoparametrično, kot bi pričakovali na osnovi splošnega pravila?

Rešitev: Druga enačba ne prinaša nobenega novega podatka, saj sledi iz prve. Tu imamo v bistvu le eno enačbo. Podobno imamo v sistemu $x + y = 2$, $x - y = 0$, $4x - 2y = 6$ samo dve neodvisni enačbi. Če prvo pomnožimo s 3 in dodamo drugo, dobimo tretjo enačbo.

10. Uporabimo sedaj naše znanje pri reševanju kemijskih enačb (glej [2]). Poiskati moramo reakcijske koeficiente posameznih kemijskih snovi, ki nastopajo v reakciji:

$$x\ Ba(OH)_2 + y\ H_3PO_4 \to z\ Ba_3(PO_4)_2 + v\ H_2O$$

Rešitev: Pogoj, ki ga moramo upoštevati, je, da je število atomov posameznega elementa na levi enako številu na desni. Imamo 4 elemente: Ba, O, H, P. V reakciji nastopata dva reaktanta in dva produkta, neznanke x, y, z, v predstavljajo število molekul teh snovi.

Za Ba velja: (1) $x = 3z$
Za O velja: (2) $2x + 4y = 8z + v$
Za H velja: (3) $2x + 3y = 2v$
Za P velja: (4) $y = 2z$

Ta homogen sistem diofantskih enačb najlažje rešimo tako, da neznanki x in y, izraženi z neznanko z v enačbah (1) in (4), vstavimo v (2) in (3). Tako dobimo

(2') $6z + 8z = 8z + v$ in odtod $v = 6z$
(3') $6z + 6z = 2v$ in odtod $v = 6z$

Vidimo, da je ena od zadnji dveh enačb odveč, saj je izpeljiva iz ostalih. Če vzamemo $z = 1$, dobimo $x = 3$, $y = 2$, $v = 6$. Kemijska enačba se torej glasi:

$$3\,Ba(OH)_2 + 2\,H_3PO_4 \rightarrow Ba_3(PO_4)_2 + 6\,H_2O$$

(koeficienta 1 ne pišemo).

Kaj bi se zgodilo, če nobena enačba ne bi bila izpeljiva iz drugih? Matematično gledano bi imeli samo trivialno rešitev in nobene reakcije.

11. Poišči reakcijske koeficiente naslednjih reakcij:

(a) $PCl_3 + H_2O \rightarrow H_3PO_3 + HCl$
(b) $C_2H_6 + O_2 \rightarrow CO + H_2O$
(c) $Cu(NO_3)_2 + NaI \rightarrow CuI + I_2 + NaNO_3$
(č) $HCl + KMnO_4 + H_2C_2O_4 \rightarrow CO_2 + MnCl_2 + KCl + H_2O$

Odgovori (koeficienti po vrstnem redu snovi v enačbi):

(a) 1, 3, 1, 3
(b) 2, 5, 4, 6
(c) 2, 4, 2, 1, 4
(č) 6, 2, 5, 10, 2, 2, 8

[1] J. Grasselli, *Diofantske enačbe*, DMFA Slovenije, Ljubljana 1984.

[2] B. Čeh, *O urejanju kemijskih enačb nekoliko drugače*, Kemija v šoli, April 1993, str. 12–16.

Izidor Hafner

Psevdokemijske enačbe

Pri urejevanju kemijske enačbe, kakršna je npr.

$$FeS_2 + O_2 \to Fe_2O_3 + SO_2$$

moramo določiti neznanke x, y, z in w v enačbi

$$x\,FeS_2 + y\,O_2 \to z\,Fe_2O_3 + w\,SO_2$$

tako, da bo število atomov posameznega elementa na levi in na desni enako. Pri tem moramo poiskati rešitev, v kateri nastopajo najmanjša naravna števila. Pogoji so

Fe: $x = 2z$
S: $2x = w$
O: $2y = 3z + 2w$

Druga enačba nam da w izražen z x, prva pa x izražen z z. Tako je $w = 4z$ in če gremo v tretjo enačbo, dobimo $2y = 3z + 8z = 11z$. Najmanjša rešitev je $z = 2$, $y = 11$, $w = 8$ in $x = 4$. Enačba reakcije se torej glasi:

$$4\,FeS_2 + 11\,O_2 \to 2\,Fe_2O_3 + 8\,SO_2$$

Da ne bi bili preveč vezani na kemijo, predpostavimo, da imamo elemente: A, B, C, D, E..., ki tvorijo spojine, mi pa moramo urediti enačbe, ki jih bomo zapisali kar z enakostjo.

1. Uredi enačbo

   $$A_7B_6C_2 + C_2 = AC_2 + B_2C$$

   Rešitev: Iščemo naravna števila x, y, z in w, tako da bo izpolnjena enačba:

   $$x\,A_7B_6C_2 + y\,C_2 = z\,AC_2 + w\,B_2C$$

   Izenačimo število atomov posameznih elementov na levi in na desni:

   A: $7x = z$
   B: $6x = 2w$
   C: $2x + 2y = 2z + w$

   Iz druge enačbe je $w = 3x$. Vstavimo to in z iz prve enačbe v tretjo $2x + 2y = 14x + 3x$ pa dobimo $2y = 15x$. Rešitev je $x = 2$, $y = 15$, $z = 14$ in $w = 6$. Enačba reakcije se glasi:

   $$2\,A_7B_6C_2 + 15\,C_2 = 14\,AC_2 + 6\,B_2C$$

2. Uredi enačbo

   $$A_3(BC_4)_2 + DC_2 + E = ADC_3 + EC + B_4$$

   Odgovor: $2\,A_3(BC_4)_2 + 6\,DC_2 + 10\,E = 6\,ADC_3 + 10\,EC + B_4$

3. Uredi enačbe:
   (a) $A_{10}B_8 + C_2 = A_8B_4C_3 + AC_2 + B_2C$
   (b) $AB(CD)_2 + AEF = B + ACD + E_2 + F_2E$
   (c) $A_4B_{10} + C_2B = C_3AB_4$
   (d) $AB + ACD + EB_2 = EB_3 + CD + A_2D$
   (e) $AB + CDE_4 + A_2F_2E_4 = FE_2 + DB_2 + CB + A_2E$

   Odgovori:
   (a) $2\,A_{10}B_8 + 9\,C_2 = 2\,A_8B_4C_3 + 4\,AC_2 + 4\,B_2C$
   (b) $4\,AB(CD)_2 + 4\,AEF = 4\,B + 8\,ACD + E_2 + 2\,F_2E$
   (c) $A_4B_{10} + 6\,C_2B = 4\,C_3AB_4$
   (d) $3\,AB + ACD + 3\,EB_2 = 3\,EB_3 + CD + 2\,A_2D$
   (e) $6\,AB + 2\,CDE_4 + 5\,A_2F_2E_4 = 10\,FE_2 + 2\,DB_2 + 2\,CB + 8\,A_2E$

4. Reši enačbo:
$$x\,ABC_2 + y\,C_3DB_4 = z\,A_3D_2B_8 + w\,C_aB_b$$

   Rešitev:
   A: $x \qquad = 3z$
   B: $x + 4y = 8z + bw$
   C: $2x + 3y = aw$
   D: $\qquad y = 2z$

   Izrazimo x iz enačbe A in y iz D ter ju vstavimo v enačbi B in C:
   $3z + 8z = 8z + bw$
   $6x + 6z = aw$

   Sledi $3z = bw$, $12z = aw$ in $a = 4b$.
   Rezultat: $b = 1$, $a = 4$, $w = 3$, $z = 1$, $x = 3$ in $y = 2$.

5. Reši enačbe:
   (a) $x\,ABC + y\,C_3DB_4 = z\,A_3DB_4 + w\,C_aB_b$
   (b) $x\,AB_3 + y\,C_2 = z\,AC + w\,B_aC_b$
   (c) $x\,A_3B_8 + y\,C_2 = z\,AB + w\,B_aC_b$

   Odgovori:
   (a) $3\,ABC + C_3DB_4 = A_3DB_4 + 3\,C_2B$
   (b) $4\,AB_3 + 5\,C_2 = 4\,AC + 6\,B_2C$
   (c) $2\,A_3B_8 + 7\,C_2 = 6\,AB + 8\,B_2C$

6. Lahko pa se zgodi, da enačba nima rešitev v množici naravnih števil:
$$x\,A + y\,B_2CD_4 = z\,A(CD_4)_3 + w\,B_2D$$

   A: $x = 2z$
   B: $2y = 2w$
   C: $y = 3z$

D: $4y = 12z + w$

Vstavimo y iz C v B in D in dobimo $6z = 2w$ in $12z = 12z + w$. Sistem reši samo trivialna rešitev, ko so vse neznanke 0.

7. Uporabimo še Gaussov postopek eliminacije.

$$x\ AB_2C_5D_6 + y\ A_2BC = z\ A_2C_4D_2 + w\ B_3CD_3$$

Sistem se glasi:

A: $x + 2y = 2z$
B: $2x + y = 3w$
C: $5x + y = 4z + w$
D: $6x \quad = 2z + 4w$

Koeficiente enačbe bomo zapisali v obliki pravokotne (kvadratne) sheme, ki ji pravimo *matrika*.

	x	y		z	w
A	1	2	=	2	0
B	2	1	=	0	3
C	5	1	=	4	1
D	6	0	=	2	4

Prvo enačbo bomo prepisali, nato bomo k drugi dodali z -2 pomnoženo prvo enačbo, potem k tretji enačbi dodamo z -5 pomnoženo prvo enačbo in k četrti enačbi z -6 pomnoženo prvo enačbo. Tako dobimo novo matriko

1	2	=	2	0
0	−3	=	−4	3
0	−9	=	−6	1
0	−12	=	−10	4

Tako smo eliminirali x iz vseh enačb razen iz prve. Zdaj prepišimo prvo enačbo, drugo pa pomnožimo z -1 in jo prepišimo. Nato pomnožimo drugo s 3 in jo dodajmo k tretji, potem pa pomnožimo drugo s 4 in jo dodajmo k četrti enačbi. Tako smo odstranili y iz tretje in četrte enačbe:

1	2	=	2	0
0	3	=	4	−3
0	0	=	6	−8
0	0	=	6	−8

Zdaj dodamo k 4. enačbi z -1 pomnoženo 3. enačbo in dobimo:

1	1	=	2	0
0	3	=	4	−3
0	0	=	6	−8
0	0	=	0	0

To, da smo dobili vrstico iz samih ničel, pomeni, da je bila četrta enačba odvisna od prvih treh in tako odveč. To pa nam tudi zagotavlja netrivialno rešitev, saj imamo samo tri neodvisne enačbe in štiri neznanke.

Tretja vrstica nam pomeni enačbo $8w = 6z$ ali $4w = 3z$. Najmanjša rešitev v naravnih številih je $z = 4$, $w = 3$. Vse naravne rešitve pa dajeta izraza $z = 4t$, $w = 3t$, kjer t preteče vsa naravna števila.

Iz druge enačbe dobimo $y = \frac{7t}{3}$. Zato mora biti $t = 3k$, kjer k preteče vsa naravna števila.

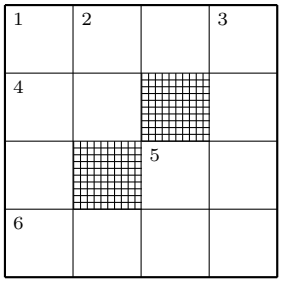
Najmanjša rešitev je za $k = 1$: $t = 3$, $z = 12$, $w = 9$, $y = 7$. Iz prve enačbe dobimo $x = 2z - 2y = 10$.

Odgovor: $10\ AB_2C_5D_6 + 7\ A_2BC = 12\ A_2C_4D_2 + 9\ B_3CD_3$

Izidor Hafner

Tekmujmo v razvedrilni matematiki

1. Reši številsko križanko



Vodoravno

1. $2N \times 4V$ (2 navpično krat 4 vodoravno)
4. $5N \times 2$
5. $5N + 2$
6. $1V - 20$

Navpično

1. Večkratnik števila 9
2. Glej $1V$
3. Palindrom (število, ki je enako svojemu obratu)
5. Kub

2. Reši kriptaritme. Pri tem moraš za različne črke najti različne števke, tako da bodo izpolnjene enačbe.

a) $30(UGH) + HUGE + UGLY = BUGS$
b) $PEEP \times PEEP = DUCKLING$
c) $FIRST + THREE + HORSES = TRIPLE$
d) $LION + ON + THE = PROWL$, kjer je IT liho število.
e) $ROOT + ROOT + ROOT = PIGS$, kjer $PIGS$ vsebuje tri zaporedne lihe števke.
f) $TRAP + RATS + STAN + IN + RAT = TRAPS$, kjer je $TRAPS$ praštevilo.
g) $MICE + MICE + RATS = PESTS$, kjer bo $RATS$ največje možno število.
h) Kaj daje tale zvok: $CALM + BAA + BAA = 2395$? Vsota tega kriptaritma bo povedala odgovor.
i) $LETS + REALLY + TALK = TURKEY$, kjer je $TURKEY$ liho število.
j) $TEN_{10} = NINE_9 + 1$, kjer je 1 ponovno uporabljena.
k) $SIX_6 = FIVE_5$. Poišči najmanjšo rešitev.
l) $NACL + KCL + LICL = SALT$. Ta zmes kloridov tvori največjo količino soli.
m) $TIS + JINGLE + BELLS + AGAIN = LISTEN$, kjer je $BELLS$ liho število.
n) $REIN + DEER + IS + RED = NOSED$, kjer je RED praštevilo.
o) $MERRY = XMAS + FROM + JRM$, kjer je $MERRY$ največje.
p) $I + GO + ON + ONEHORSE + OPEN = SLEIGH$
r) $MERRY + XMAS = DODGE$, kjer je $XMAS$ praštevilo.
s) $RED + BLUE + GREEN = BROWN$, kjer je $BLUE$ kvadrat.
t) $BROWN + YELLOW = PURPLE$
u) $ONE \equiv 1 (\mathrm{mod}\ TWO)$
$ONE \equiv 1 (\mathrm{mod}\ SIX)$
$SIX \equiv 0 (\mathrm{mod}\ TWO)$
To je kriptaritmični sistem. $x \equiv y (\mathrm{mod}\ z)$ pomeni, da ima x ostanek y pri deljenju z z.

Naloge smo našli v knjigi *Index to Mathematical Problems 1980-1984*, ki jo je uredil Stanley Rabinowitz, izšla pa je pri *MathPro Press*.

3. Reši naslednje psevdokemijske enačbe (glej članek na strani 25):

(a) $A_2 + B + C_2D_7 = D + B_2D + AD_3$
(b) $A + A_2B_2C_4 + D_2C_7 = D + BC_2 + A_2C$
(c) $ABC_3 + D(BC_3)_2 + D(BC_3)_4 + BC + A_2C$
(d) $ABC_3 + D = D(BC_3)_2 + BA_4BC_3 + A_2C$
(e) $A + BC_4 + D_2C = A_2C_7 + B + D$
(f) $x\,A + y\,B_2CD_4 = z\,B_2C + w\,B_2D + t\,ACD_a$
(g) $x\,A + y\,B_2 = z\,A_2B_3$
(h) $x\,A_2 + y\,BA_2 = z\,BA_3$

4. Reši prvo in drugo nalogo s strani 20.

5. GOLF

Pred kratkim je na blejskem igrišču potekal golf turnir. Prijateljica, ki se ga je udeležila kot gledalka, mi je pripovedovala o poteku tekmovanja. Najbolj so ji v spominu ostale težave, ki jih je vsak igralec imel pri eni izmed lukenj. Čeprav se ni čisto vsega spomnila, sem lahko ugotovila vse pomembne podatke.

Igralci: Dolar, Fajdiga, Grahek, Mohorč, Naglič
Težavne luknje: 4., 7., 11., 13., 17.
Ovire pri luknjah: drevesa, bunker, kamenje, potok, strmina
Št. udarcev pri težavnih luknjah: 5, 6, 7, 8, 9
Skupno število udarcev: 77, 78, 79, 80, 81

1. Igralec, ki mu je žogica ušla med kamenje in se ne piše Mohorč, je stvar uredil s petimi udarci.
2. Tekmovalec, ki je žogico poslal v bunker, je na koncu imel 79 udarcev. Najbolj težavna zanj ni bila 17. luknja.
3. Nagličevo končno število udarcev je bilo za eno manjše od števila udarcev igralca, ki so ga najbolj ovirala drevesa. Naglič se je najdlje mudil pri luknji z večjo zaporedno številko, kot jo ima luknja z drevesi.
4. Igralec, ki je pristal pri 80 udarcih, je pri najtežavnejši luknji porabil 8 udarcev.
5. Mohorč ga je najbolj lomil pri 7. luknji.
6. Eden izmed tekmovalcev je pri 11. luknji porabil 7 udarcev. Njegovo skupno število udarcev je bilo večje kot Dolarjevo; Dolar ga ni najbolj lomil pri 4. luknji.
7. Fajdiga, ki je vsega skupaj udaril 77-krat, je pri najtežavnejši luknji zabeležil 2 udarca več, kot jih je pri svoji najtežavnejši igralec, kateremu je žogica precejkrat ušla po strmini navzdol.

39. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Kranj, 22. in 23. aprila 1995

N a l o g e

Prvi letnik

1. Naj bodo a, b, c in d cela števila. Pokaži, da je produkt
$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$
deljiv z 12.

2. Za pozitivna realna števila a, b in c velja $a \geq b \geq c$. Pokaži, da velja
$$\frac{a^2-b^2}{c} + \frac{c^2-b^2}{a} + \frac{a^2-c^2}{b} \geq 3a - 4b + c.$$

3. Brata sta prodala krdelo ovac. Za vsako ovco sta dobila toliko zlatnikov, kolikor ovc je bilo v krdelu. Zaslužek sta si razdelila na naslednji način: najprej je vzel starejši brat 10 zlatnikov, potem mlajši 10, pa spet starejši 10... Na koncu, ko je bil na vrsti mlajši brat, je ostalo manj kot 10 zlatnikov. Vzel je torej ostanek in še pipec starejšega brata, pa je bil zaslužek pošteno razdeljen. Koliko je vreden pipec?

4. Dan je konveksni štirikotnik $ABCD$. Dokaži, da sta simetrali kotov DAB in BCD vzporedni natanko tedaj, ko je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$.

Drugi letnik

1. Za praštevila a, b, c in d velja $b - a = c - b = \sqrt{d-a-b-c} \leq a$. Izračunaj produkt $abcd$.

2. Naj $\overline{abc}$ pomeni trimestno število, ki ima števko a na mestu stotic, b na mestu desetic in c na mestu enic. Funkcija f vsakemu trimestnemu številu $\overline{xyz}$ priredi vrednost $x+y+z+xy+xz+yz+xyz$, torej $f(\overline{xyz}) = x+y+z+xy+xz+yz+xyz$. Poišči vsa trimestna števila n, za katere je $f(n) = n$.

3. Naj bosta M in N taki točki na stranicah AB in BC kvadrata $ABCD$, da velja $\sphericalangle MDN = \frac{\pi}{4}$. Presečišči diagonale AC z daljicama MD in ND označimo s P in Q, točka R pa naj označuje razpolovišče daljice MN. Dokaži, da je $|PR| = |RQ|$.

4. V vsakem polju tabele $n \times n$, kjer je n liho število, je vpisano eno od števil 1 oziroma -1. Pod vsak stolpec zapišemo produkt elementov tega stolpca, desno od vsake vrstice pa produkt elementov te vrstice. Pokaži, da vsota vseh produktov ne more biti enaka 0.

Tretji letnik

1. Pokaži, da ne more veljati
$$p(a) = b,\ p(b) = c \ \text{ in } \ p(c) = a,$$
če so a, b in c med seboj različna cela števila in $p(x)$ polinom s celimi koeficienti.

2. Dana je funkcija f, ki vsakemu naravnemu številu priredi neko vrednost. Vemo, da je $f(1) = 1995$ in da za vsak $n > 1$ velja
$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n).$$
Koliko je $f(1995)$?

3. Naj bo F razpolovišče stranice CD pravokotnika $ABCD$. Na stranici BC izberemo tako točko E, da je AF simetrala kota EAD. Dokaži, da sta daljici AF in EF pravokotni, če velja $\frac{|AB|}{|BC|} = \sqrt{2}$.

4. Pravokotnika sta si podobna, če imata stranice v istem razmerju. Pokaži, da se da vsak pravokotnik razrezati na n sebi podobnih pravokotnikov za vsa naravna števila n, ki niso manjša od 9.

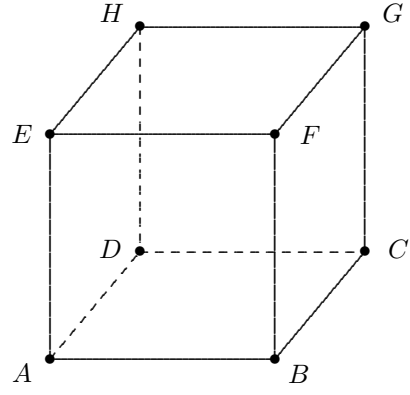
Četrti letnik

1. Pokaži, da nobeno aritmetično zaporedje ne more imeti treh členov, ki bi bili kubični koreni treh različnih praštevil.

2. Dan je polinom $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Poišči ostanek pri deljenju polinoma $p(x^5)$ s polinomom $p(x)$.

3. Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadošča pogoju $4f(f(x)) = 2f(x) + x$ za vsak realen x. Dokaži, da je $f(x) = 0$ natanko tedaj, ko je $x = 0$.

4. Naj bo X točka na ploskvi $ABCD$ kvadra $ABCDEFGH$.
Izračunaj $\sphericalangle AXE$, če je
$$\sphericalangle AXF = \sphericalangle FXH = \sphericalangle HXA = \frac{\pi}{2}.$$



Rešitve nalog

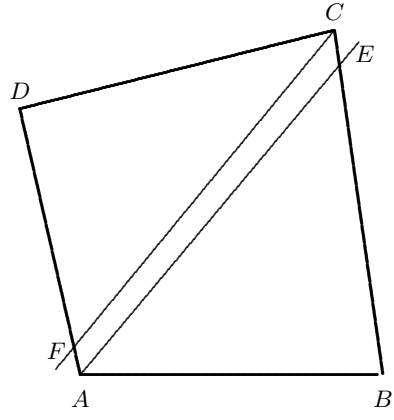
Prvi letnik

1. Preverimo najprej deljivost produkta s štiri. Če sta dve števili sodi (denimo a in b) in dve lihi (denimo c in d), potem 4 deli $(a-b)(c-d)$. Če pa so vsaj tri števila soda oziroma liha (denimo a, b in c), potem je $(a-b)(a-c)(b-c)$ deljiv celo z 8. V obeh primerih 4 deli $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$.
   Preverimo še deljivost produkta s tri. Od štirih števil a, b, c in d imata vedno vsaj dve števili (denimo a in b) isti ostanek pri deljenju s 3, zato 3 deli $(a-b)$.
   Števili 4 in 3 sta tuji, zato 12 deli $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$.

2. Ker je $a \geq b \geq c > 0$, je $\frac{a+b}{c} \geq 2$, $0 < \frac{b+c}{a} \leq 2$ in $\frac{a+c}{b} \geq 1$. Torej je $\frac{a^2-b^2}{c} \geq 2(a-b)$, $\frac{c^2-b^2}{a} \geq 2(c-b)$, saj je $c \leq b$, in $\frac{a^2-c^2}{b} \geq a-c$. Seštejemo leve in desne strani neenakosti in dobimo prvotno neenakost.

3. Naj bo n število ovc v krdelu. Potem je njun zaslužek enak $n^2 = (2k+1)10+s$, kjer za končni ostanek s velja $0 \leq s < 10$. Če pišemo $n = 10a+b$, kjer je $0 \leq b < 10$, dobimo $2(5a^2+ab)10+b^2 = (2k+1)10+s$. Ker ima desna stran lihe desetice, mora to veljati tudi za levo stran. Prvi člen ima sode desetice, zato ima b^2 lihe desetice. Tako je b^2 lahko le 16 ali 36, torej je $s = 6$, saj so enice v prvem členu na levi strani enake 0. Da poravnata račune, mora starejši brat dati mlajšemu 2 zlatnika, zato je pipec vreden 2 zlatnika.

4. Recimo, da sta simetrali vzporedni. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da simetrala kota pri DAB seka BC v točki E in simetrala kota pri BCD seka AD v F. Zaradi vzporednosti je $\sphericalangle DFC = \sphericalangle DAE = \sphericalangle EAB$ in $\sphericalangle BEA = \sphericalangle BCF = \sphericalangle FCD$. Torej sta si trikotnika FCD in AEB podobna in je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$.



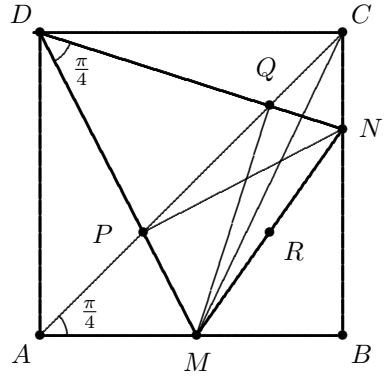
   Še v drugo smer: če bi se simetrali sekali v notranji točki G štirikotnika $ABCD$, bi imela štirikotnika $ABCG$ in $AGCD$ po tri enake kote in bi morala imeti enak tudi četrti kot pri G: $AGC = 180°$. To bi pomenilo, da se simetrali ujemata. Če se simetrali ne sekata v notranji točki štirikotnika, pa poglejmo spet na sliko in označimo $\sphericalangle EAB = x$, $\sphericalangle ABC = z$ in $\sphericalangle BCF = y$. Potem je $\sphericalangle CFD = 180° - y - z$ in je $\sphericalangle AFC = y+z$. Analogno dobimo $\sphericalangle AEC = x+z$. Ker je vsota kotov v štirikotniku $AECF$ enaka $360°$ je $x+(z+x)+y+(z+y) = 360°$ in $x+y+z = 180°$, kar pomeni $\sphericalangle CFD = x$.

Drugi letnik

1. Naj bo $b-a=x$. Potem so $b-x$, b, $b+x$ in $3b+x^2$ praštevila. Iz slednjega razberemo, da število x ni deljivo s 3. Torej je eno izmed praštevil $b-x$, b in $b+x$ enako 3. Očitno to število ni niti $b+x$ niti b (iz $b=3$ sledi $a=2$ in $c=4$), torej je $a=3$. Seveda $x\neq 1$. Ker pa je $x\leq a$, mora biti $x=2$. Tako imamo $a=3$, $b=5$, $c=7$, $d=19$ in $abcd=1995$.

2. Enakost $f(n)=n$ pomeni, da je $a+b+c+ab+ac+bc+abc=100a+10b+c$. Potem je $c=\dfrac{99a-ab+9b}{a+b+ab}$. Ker pa je $c\leq 9$, sledi $99a-ab+9b\leq 9a+9b+9ab$ in od tod $90a\leq 10ab$. Število n je trimestno, zato $a\neq 0$, torej je $9\leq b$ in mora biti $b=9$. Sledi $c=\dfrac{99a-9a+81}{a+9+9a}=9$. Vidimo, da je števka a poljubna, torej so vse rešitve 199, 299, 399, 499, 599, 699, 799, 899 in 999.

3. Ker je $\sphericalangle MDQ=\frac{\pi}{4}=\sphericalangle MAQ$, je štirikotnik $AMQD$ tetivni. Kot MQD je zato pravi. Analogno je tudi štirikotnik $NCDP$ tetivni in je kot DPN pravi. Ker pa je tudi $\sphericalangle MBN=\frac{\pi}{2}$, je $MBNQP$ tetivni petkotnik in središče njemu očrtane krožnice je v točki R. Sledi $|PR|=|RQ|$.



4. Vsak od produktov je lahko enak 1 ali -1. Ker je vrstic (in stolpcev) liho, sta števili števil 1 in -1 med vrstičnimi produkti različne parnosti. Če naj bi bila vsota vseh produktov enaka 0, bi moralo biti število stolpcev, katerih elementi imajo produkt -1, enako številu vrstic, katerih elementi imajo produkt 1. To pa pomeni, da je število števil -1 med vrstičnimi produkti različne parnosti kot število števil -1 med stolpčnimi produkti. Če torej zmnožimo vse produkte po vrsticah, dobimo različno število, kot če zmožimo vse produkte po stolpcih (eno je 1, drugo -1). Toda obe števili sta enaki produktu vseh elementov v tabeli in ne moreta biti različni. Vsota torej res ne more biti enaka 0.

Tretji letnik

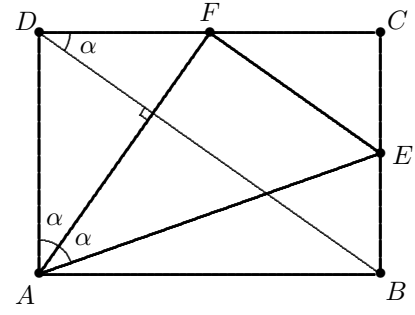
1. Naj bo polinom $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ s celimi koeficienti in naj bosta r in s celi števili. Potem velja $p(r)-p(s)=(r-s)\cdot q$, kjer je tudi q celo število. V našem primeru zapišemo

$$\begin{aligned} b-c &= p(a)-p(b)=(a-b)\cdot q_1\\ c-a &= p(b)-p(c)=(b-c)\cdot q_2\\ a-b &= p(c)-p(a)=(c-a)\cdot q_3 \end{aligned}$$

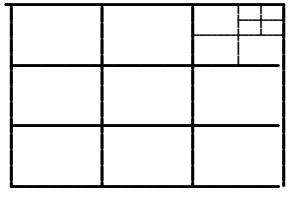
Ker je produkt levih strani teh enakosti enak produktu desnih, velja $1 = q_1q_2q_3$, zato je tudi $|a-b| = |a-c| = |b-c|$. Od tod sklepamo, da je bodisi $a-b = b-c$ ali pa $a-b = -b+c$. Iz zadnje enakosti sledi protislovje $a = c$, saj so a, b in c med seboj različna cela števila. Po drugi poti pa pridemo do $a-b = b-c = c-a$, od koder sledi $2a = c+b$, $4b-2c = c+b$ in končno $b = c$, ki ne more veljati. Podobno bi prišli do protislovja, če bi postavili $a-b = b-c = -c+a$, saj bi dobili $a = b$.

2. Ker je $f(n) = \dfrac{1}{n^2-1}(f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1))$, je $f(1)+f(2)+\cdots+f(n) = f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)+\dfrac{1}{n^2-1}(f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)) = \dfrac{n^2}{(n-1)(n+1)}(f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)) = \dfrac{n^2}{(n-1)(n+1)}\cdot\dfrac{(n-1)^2}{(n-2)n}\cdot\dfrac{(n-2)^2}{(n-3)(n-1)}\cdots\dfrac{2^2}{1\cdot 3}\cdot f(1) = 2\dfrac{n}{n+1}f(1)$. Torej je
$$f(n) = \frac{2n}{(n+1)n^2}f(1) \quad \text{in} \quad f(1995) = \frac{1}{998}.$$

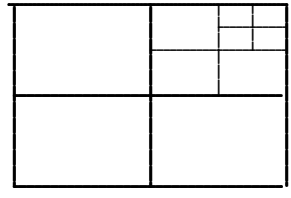
3. Privzamemo lahko, da je $|BC| = 1$. Označimo kot FAD z α. Potem je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ in sta zato kota α in $\sphericalangle CDB$ enaka. Torej je $AF \perp BD$. Računajmo
$$|EB| = |AB|\ \operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{2}-2\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{tg}2\alpha} = \frac{1}{2}.$$
Točka E je tako razpolovišče stranice BC in sta zato daljici EF in BD vzporedni. Sledi $AF \perp EF$.



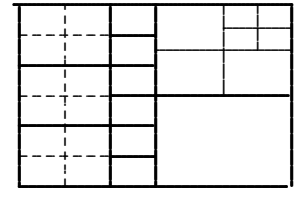
4.



$3k$ pravokotnikov
$(k \geq 3)$



$3k+1$ pravokotnikov
$(k \geq 0)$



$3k+2$ pravokotnikov
$(k \geq 3)$

S slik razberemo, kako pravokotnik razrežemo na 9, 4 ali 11 pravokotnikov. Z rezanjem enega od manjših pravokotnikov na štiri enake dele povečamo število pravokotnikov za 3. Tako opazimo, da naloga ne bi bila rešljiva za $n = 2$, 3, 5, 6 in 8.

Četrti letnik

1. Denimo, da bi tako aritmetično zaporedje obstajalo. Označimo $\sqrt[3]{p} = a$, $\sqrt[3]{q} = a + md$ in $\sqrt[3]{r} = a + nd$, kjer so p, q in r različna praštevila, m in n pa različni naravni števili. Velja seveda $\frac{\sqrt[3]{q} - \sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{r} - \sqrt[3]{p}} = \frac{m}{n}$ in od tod $m\sqrt[3]{r} - n\sqrt[3]{q} = (m-n)\sqrt[3]{p}$. Zadnjo enakost kubirajmo: $m^3r - n^3q - 3mn\sqrt[3]{rq}(m\sqrt[3]{r} - n\sqrt[3]{q}) = (m-n)^3p$, izraz v oklepaju zamenjajmo (uporabimo isto enakost), pa pridemo po preureditvi do $3mn(m-n)\sqrt[3]{pqr} = m^3r - n^3q - (m-n)^3p$. Ker je leva stran zadnje enakosti iracionalno število, desna pa racionalno, smo prišli do protislovja, zato takega zaporedja ni.

2. Ker je $p(x) = \dfrac{x^5 - 1}{x - 1}$, so $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ ničle polinoma p. Delimo: $p(x^5) = k(x)\cdot p(x) + r(x)$. Potem je $5 = p(1) = p(\varepsilon_k^5) = k(\varepsilon_k)\cdot p(\varepsilon_k) + r(\varepsilon_k) = r(\varepsilon_k)$ za $k = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Stopnja polinoma $r(x) - 5$ je kvečjemu 3 in ima 4 različne ničle ε_1, ε_2, ε_3 ter ε_4. Torej je $r(x) \equiv 5$.

3. Najprej opazimo, da je funkcija injektivna (če je $f(x) = f(y)$, je očitno tudi $x = y$), in je zato dovolj pokazati enakost $f(0) = 0$. Vstavimo v pogoj $x = 0$ in nato še $x = f(0)$ ter dobimo $4f(f(0)) = 2f(0) + 0$ oziroma $2f(f(0)) = f(0)$ in $4f(f(f(0))) = 2f(f(0)) + f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$. Pridemo torej do $f(f(f(0))) = f(f(0))$ in zaradi injektivnosti sledi $f(0) = 0$.

4. Ker je rob BF pravokoten na ravnino osnovne ploskve in je kot AXF pravi, je $\sphericalangle AXB = \frac{\pi}{2}$. Analogno je tudi $\sphericalangle AXD = \frac{\pi}{2}$ in zato leži točka X na diagonali BD. Opazimo tudi, da je AX višina na hipotenuzo BD pravokotnega trikotnika ABD. Ker je $\sphericalangle BAD = \frac{\pi}{2}$, leži točka A na krožnici s premerom BD. Ker je $\sphericalangle FXH = \frac{\pi}{2}$, leži točka X na krožnici s premerom FH. Ker je $|FH| = |BD|$, sta višini na hipotenuzo pravokotnih trikotnikov BDA in FHX enako dolgi. Ker je rob AE pravokoten na ravnino ploskve $EFGH$, je dolžina višine na hipotenuzo FH pravokotnega trikotnika FHX enaka $|AE|$. Torej je $|AX| = |AE|$ in zato je $\sphericalangle AXE = \frac{\pi}{4}$.

