TRETJI LETNIK — 1993–1994 – 6

DEL REVIJE

LOGIKA

&

RAZVEDRILNA MATEMATIKA

Revijo sta za splet pripravila Nada in Marko Razpet
na podlagi datotek, ki jih je izdelal Darjo Felda.

Obvestilo naročnikom

Dobili ste 6. številko revije *Logika & Razvedrilna matematika*, to je zadnjo številko v tem šolskem letu. Individualni naročniki, to je tisti, ki revijo prejemate na dom, ostajate še naprej naročniki, dokler naročila pismeno ne prekličete. Prav tako ne naročite še enkrat revije preko poverjenika na šoli.

Na šole bomo poslali v začetku šolskega leta toliko izvodov, kolikor je bilo naročnikov v tem letu. Morebitne spremembe pa bomo upoštevali, takoj ko bo javljeno novo število naročnikov.

Občasno se dogaja, da preko sistema plačilnega prometa ne dobimo niti vaše položnice niti pravilnega podatka o vplačilu. V tem primeru vašega vplačila ne moremo registrirati in vam pošljemo opomin. Zato vas prosimo, da shranjujete podatke o vplačilih in da nam pošljete fotokopijo položnice, če ne dobite revije, medtem ko so jo drugi že dobili.

V S E B I N A

Matematične naloge za osnovnošolce 3
Angleške naloge za osnovnošolce 11
Tekmujmo v razvedrilni matematiki 13
Angleške naloge za srednješolce 16
Fishergeometric 19
Naloge s sprejemnega izpita 21
International Mathematical Talent Search 26
38. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije 33

Izdaja: Založniško podjetje LOGIKA d.o.o., Svetčeva 11, 61240 Kamnik,
št. žiro računa: $50140 - 603 - 57434$

Za izdajatelja: Izidor Hafner

Revija *Logika & Razvedrilna matematika* je vpisana v register časopisov pri *Ministrstvu za informiranje* pod registrsko številko *949*. Po mnenju *Ministrstva za informiranje* št. *23/89–92* šteje revija *Logika & Razvedrilna matematika* med proizvode informativnega značaja, za katere se plačuje davek od prometa po stopnji 5%.

Revijo *Logika & Razvedrilna matematika* subvencionira *Ministrstvo za šolstvo in šport*

Člani časopisnega sveta: prof. dr. Frane Jerman, prof. dr. Tomaž Pisanski in Darjo Felda, prof.

Strokovni pokrovitelj: Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko – Oddelek za teoretično računalništvo

Glavni in odgovorni urednik: dr. Izidor Hafner

Sodelavci: Marija Božnar, Jasna Bratanič, Breda Cestnik, Urša Demšar, Gregor Dolinar, Urška Drčar, Petra Ipavec, Alenka Kavčič, Dušanka Kocić, Jana Kristanc, Katka Kurent, Meta Lah, Nina Milač, Nika Novak, Hiacinta Pintar, Maja Pohar, Darja Polak, Tanja Soklič, Mirjana Todorovič, Aleš Vavpetič in Metka Žnidar

Jezikovni pregled: računalniški program *Besana*

Generalni sponzor: Marand d.o.o., zastopstvo Borland

Sponzorji: DZS d.d., Mlacom d.o.o., Mlakar & Co, Časopisno podjetje *Dnevnik*, NIL d.o.o., IR Electronic

Obdelava podatkov na računalniku firme *Mlacom* s programskim paketom PARADOX 3.5

Tisk: Tiskarna "Planprint", Rožna dolina c. IV/32–36, Ljubljana

Ilustrirala: Ana Hafner

Naklada: 2800 izvodov

© 1994 LOGIKA d.o.o.

ISSN $0354 - 0359$

LOGIKA & RAZVEDRILNA MATEMATIKA
letnik *III*, št. 6, 1993/94

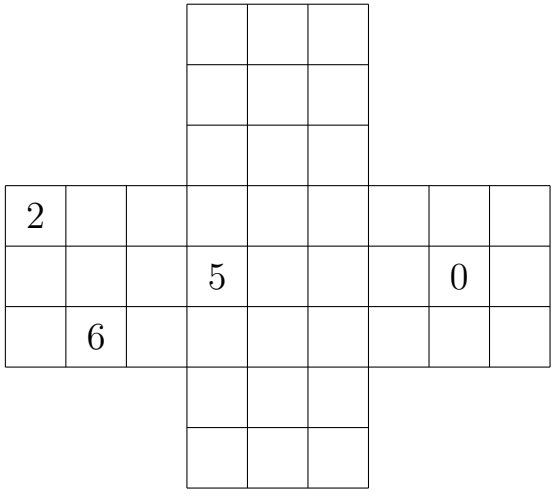
Cena revije: v prosti prodaji 300 SIT, za naročnike 250 SIT in vključuje 5% prometni davek

Matematične naloge za osnovnošolce

1. V prazna polja tabele vpiši številke tako, da bo vsota vsakih treh sosednjih števil (vodoravno ali navpično) enaka 13.

	5						
				4			
2							
		3					

2. V prazna polja tabele vpiši številke tako, da bo vsota vsakih treh sosednjih števil (vodoravno ali navpično) enaka 9.



3. Srečajo se štirje stari mački: ris, lev, tiger in panter. Nenadoma švigne mimo njih postavna gazela in mački se poženejo v dir za njo. Tiger teče hitreje od risa. Panter je počasnejši od leva, a je hitrejši od tigra. Kateremu bo pripadel plen?

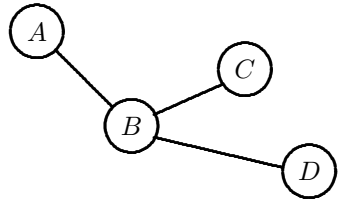
4. Lev teče 6-krat hitreje od pume. Leopard je 2-krat počasnejši od geparda. Puma teče enako hitro kot leopard. Kako hitro teče lev v primerjavi z gepardom? Kako hitro pa teče puma v primerjavi z gepardom?

5. Pikica in Pikec sta hotela zaslužiti nekaj denarja. Zato sta se odločila, da bosta teden dni zbirala star papir. Ko sta papir prodala, sta dobila neko vsoto denarja. To vsoto sta skupaj položila na hranilno knjižico. Denar sta vezala za cel mesec in to za 15 % obresti. Ko je minil ta dolgi mesec, sta denar dvignila in vsak je dobil točno 345 SIT. Kolikšno vsoto denarja sta dobila za star papir?

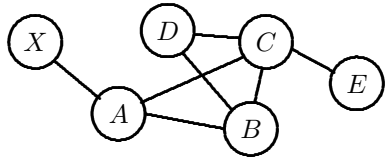
6. Pikica in Pikec sta skupaj privarčevala nekaj denarja. Odločila sta se, da bosta vrnila stare dolgove. Očetu in mami sta dolžna polovico od vsega denarja. Sošolki Alenki

morata zaradi neke stare stave kupiti 2 kepici sladoleda, kar znaša 16 cekinčkov. Pikica bi si rada kupila sončna očala za 250 cekinčkov, Pikec pa avtomobilček, ki znaša kar 315 cekinčkov. Ko bi vse to poravnala, bi jima ostalo ravno toliko, da bi si vsak lahko privoščila eno kepico sladoleda. Torej, koliko cekinčkov sta privarčevala?

7. Prebivalci planeta Urana so se znašli pred zapletenim problemom. Odkrili so neko ozvezdje in planete v njem, ki so jih začasno poimenovali kar A, B, C in D. S svojimi kompliciranimi napravami so odkrili, da meri razdalja od A do D 10 km, razdalja od A do C 14 km in razdalja od C do D 16 km. Sedaj pa vprašanje: kako so Urančani lahko zračunali razdalje od A do B, od B do C in od B do D? Upoštevaj priloženi zemljevid!!



8. Vesoljci poskušajo ugotoviti razdaljo od planeta X do planeta E, če greš mimo planetov B, D in C. Vedo pa naslednje: Razdalja iz X v C, če se gre preko B, je 30 km. Razdalja iz B preko C in D nazaj v B je 20 km. Razdalja iz B v C je 5 km. Razdalja iz C v E je 8 km. Poskusi ti najti to čudežno razdaljo!



9. Aleš, Damjan in Matic so imeli vsak nekaj denarja: 50 mark, 100 mark in 200 mark, a ne nujno v takem vrstnem redu. Obiskali so največjo trgovino igrač na svetu. Tisti, ki je imel 200 mark, si ni kupil nič. Ostala dva pa sta si vsak kupila po eno igračo: eden opico, drugi nosoroga. Ugotovi, kaj si je vsak kupil za koliko denarja, če veš:

a) Damjan si ni kupil nič.
b) Tisti, ki je imel 100 mark, si je kupil nosoroga.
c) Matic je imel 50 mark.

To pa še ni konec. Razvrsti najprej ta imena po vrsti (najprej tistega, ki je imel najmanj denarja, nato tistega, ki ga je imel največ). Tako dobiš 3 začetne črke. Sedaj razvrsti še stvari, ki sta bili kupljeni, najprej cenejšo, nato dražjo. Tako imate že 5 začetnih črk, dodajte jim še NA in dobite ime zelo popularne pevke.

10. Imamo tri avtomobile: *Formula 1*, *Mercedes* in *Fičko*. Prvi v vrsti je *Fičko*, ki prevozi 50 km v eni uri. 50 metrov za njim je *Mercedes*, ki prevozi 100 km v eni uri. 50 metrov za *Mercedesom* pa stoji še *Formula 1*, ki pa naredi 150 km v eni uri. Vsi štartajo istočasno.

a) Kakšen je vrstni red po dveh urah?
b) Koliko km prevozi posamezen avtomobil?

11. Neko nedeljo sta šla gospod in gospa v cerkev. Med duhovnikovim govorjenjem je gospod postal zaspan in utonil je v globok spanec. Sanjal je, da je izumitelj. Bil je že čisto na koncu s svojim izumom super-robota. Vstavil mu je še baterijo in robot se je začel premikati in uničevati vse okoli sebe. Tedaj se je izumitelj spomnil, da mu je pozabil vprogramirati, kdo je njegov gospodar, in robot ga je začel loviti in hotel zgrabiti za vrat.
Medtem je v cerkvi žena opazila, da njen mož drema in ga je požgečkala po vratu. Gospod je umrl tisti trenutek, ne da bi dal kaj glasu od sebe.
Sedaj pa logično vprašanje: KAJ JE NAROBE S TO ZGODBO?

12. Rok, Miha, Jure in Aleš se ukvarjajo z atletiko. Za to pa morajo tehtati več kot 60 kg. Vsak ima različno težo, ti pa iz spodnjih podatkov ugotovi, koliko vsak tehta.
a) Vsi skupaj tehtajo 253 kg.
b) Jure, Aleš in Miha tehtajo skupaj 188 kg.
c) Miha ima 1 kg manj od Jureta in 2 kg več kot Aleš.
P.S. Koliko pa so visoki, če veš, da je pri vsakem razlika med njegovo višino in težo 110.

13. Zemlja je ogromna krogla. Če bi iz katerekoli točke po njej hodili vedno naravnost, bi se vrnili v začetno točko. Najdaljšo pot bi recimo naredili, če bi hodili po meji med Severno in Južno poluto. Ali bi znali povedati, kako dolga bi bila ta pot (to je krožnica), če veste, da je polmer naše Zemlje 6400 km. Kolikšna pa bi bila pot, če bi začel pot nekje na Severni poluti in bi šli vzporedno z Ekvatorjem, polmer pa bi bil za polovico manjši od polmera Zemlje?

14. Učenci 3. razreda osnovne šole so imeli letos obvezen zdravniški pregled. Tam so jim z merilčkom pretoka izmerili kapaciteto pljuč. Štirje prijatelji (Jure, Miha, Aleš in Peter) so ugotovili, da so vsi zdravi (to pomeni, da je vsak izdihnil zraka med 45 in 60 decilitri). Zanimivo pa je to, da so vsi skupaj izdihnili 20 litrov. Miha in Aleš sta izdihnila enako, Jure je 3 decilitre manj od Aleša in Peter 3 decilitre več kot Miha. Koliko je kdo izdihnil zraka?

15. Miha, Peter in Aleš so si merili kapaciteto pljuč (seveda z merilčkom pretoka). Vsi skupaj so izdihnili 144 decilitrov, s tem da je Aleš izdihnil za 2 dcl manj kot Miha, Miha pa je izdihnil 2 dcl manj od Petra. Koliko zraka je vsak napihal?

16. Krištof Kolumb se je ravnokar odpravil na pot, poiskat Ameriko. S seboj je vzel še 32 zvestih mornarjev in enega kuharja, kar pa za našo nalogo sploh ni pomembno.
Prve tri ure je bilo zelo mirno morje in zato so prevozili 180 km. Nato je začelo morje valovati. Za dvakrat manjšo pot kot na začetku so sedaj porabili dvakrat več časa. V zadnjem delu poti pa je pričel pihati veter in v eni uri so naredili kar 80 km in s tem dosegli nek otok (katerega, se ne ve točno).
Tvoja naloga je, da poveš, kako dolga je bila pot, koliko časa so vozili in kolikšna je bila povprečna hitrost!

17. Zopet Krištof Kolumb. S svojo ladjo je iz mesta A v mesto B potoval s hitrostjo 15 $\mathrm{km/h}$. Nato pa je za vrnitev iz B nazaj v A rabil pol manj časa. S kolikšno hitrostjo je potoval nazaj?

18. Štirje vulkani Krakatau (Indonezija), Tambor (Indonezija), Parikutin (Mehika) in Helgafel (Islandija) so bruhali v letih 1815, 1883, 1943 in 1973. Ti pa moraš ugotoviti, v katerem letu je bruhal kateri vulkan. Veš pa:

a) V 20. stoletju v Indoneziji ni bilo nobenega izbruha vulkana.

b) Prebivalci Islandije so pred 21 leti utrpeli velike izgube zaradi aktivnega delovanja njihovega vulkana.

c) Tambor je izbruhnil prej kot Krakatau.

19. Vulkani A, B, C in D (v Indoneziji) so na isti dan začeli bruhati. Kako so po vrsti bruhali, če veš:

A je bruhal za B in C.

D je bruhal pred B.

C je bruhal pred D.

20. Mica, Jasna, Riki in Mojca veliko gledajo filme po kabelski televiziji. Ko je nekoč nanesel pogovor na to, si je vsaka izbrala svoj film: *Look who's talking too*, *The Thornbirds* (ta je nadaljevanka), *Mr. Destiny* in *King Ralph*. V svojem filmu pa so si izbrale tudi najboljšega igralca: *Michael Cane*, *John Travolta*, *Richard Chamberlain* in *John Goodman*. Ugotovi, katera si je izbrala kateri film in tudi (če še ne veš), kateri igralec je igral v katerem filmu. Veš pa:

a) Začetnica imena igralca ni enaka začetnici deklice, ki ga je izbrala.

b) *Chamberlain* je igral v nadaljevanki.

c) Mica, ki ni izbrala niti *Travolte* niti *Chamberlaina*, je zbrala film *King Ralph*.

d) Jasna ni zbrala *Michaela*, ki je igral v filmu *Mr. Destiny*.

21. Jasna, Rozi, Silvia in Jelka so si vsaka izbrale svojega najljubšega igralca: *Roger Moore*, *Sean Connery*, *John Travolta* in *James Dean*, a ne nujno v tem vrstnem redu. Zato je tvoja naloga, da ugotoviš, katera je izbrala katerega igralca,če veš:

a) Začetnica imena igralca ni enaka začetnici imena deklice, ki ga je izbrala.

b) Jelka pravi, da *James Bond* ne bi bil *James Bond* brez njenega *Seana Conneryja*.

c) Rozi je svojega *Travolto* prvič videla v *Briljantini*.

22. Otroci so imeli vsega skupaj 14 bankovcev oziroma kovancev, ki so bili po 200, 100, 50, 10, 5, 2 in 1 tolar. Vsota vsega denarja je bila točno 1000 tolarjev. Nas pa zanima, koliko je bilo katerih bankovcev, če veš:

a) Bankovcev po 200 SIT je bilo isto število kot bankovcev za 10 SIT.

b) Za 100 SIT je bil le en bankovec in enako za 50 SIT.

c) Če odštejemo od celotne vsote bankovce pod a) in b), nam ostane še nekaj kovancev, katerih vsota je 10 SIT.

23. Otroci Miha, Alenka, Vesna, Andrej in Tomaž so pri pouku naštevali vire energije: sonce, plin, elektrika, voda in oglje. Vsak si je izbral en vir, ti pa moraš ugotoviti, kdo si je izbral kateri vir!

a) Andrej je izbral svoj vir zato, ker se spozna na delovanje hidroelektrarn.

b) Vesna pravi, da je njen vir energije najcenejši, a kljub temu ni dobro izkoriščen.

c) Tomaž ni izbral ne plina ne oglja.

d) Miha je zbral plin.

24. Na koliko načinov (in kateri so ti načini) lahko razdeliš 10 tolarjev na kovance za 2,3 in 5 tolarjev?

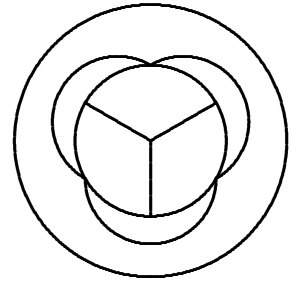
25. Če veš, da so si Jure, Mojca, Liza in Mare izbrali vsak svoj vir energije: voda, uran, sonce, drva; ugotovi, kdo si je kaj izbral, če veš:

a) Jure se spozna na delovanje jedrskih elektrarn, zato si je svoj vir energije tako izbral.

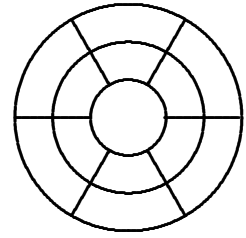
b) Mojca si je izbrala najcenejši vir energije.

c) Liza si ni izbrala vode.

26. Pobarvaj lik s štirimi različnimi barvami: zeleno, modro, rdečo in črno tako, da se iste barve ne bodo dotikale! (Možnih je več rešitev.)



27. Pobarvaj lik s tremi barvami: zeleno, modro in rumeno tako, da se enake barve ne bodo stikale v stranicah (lahko se dotikajo v točki).



28. V neki daljni galaksiji se nahaja prečudovit planet *Bleščica*. Od kje je dobil svoje ime, se ne ve. Znan pa je po svojih prebivalcih, ki so dveh vrst: moški in ženske, a se jih ne da ločiti med seboj. Ženske podnevi lažejo in ponoči govorijo resnico, moški pa ravno obratno. Tujec, ki zaide na ta planet, ne more vedeti, ali je dan ali noč, ker tu ni Sonca, ki bi mu lahko to izdal.

Ko se je po naključju tu znašel nek tujec, je le-ta želel izvedeti, ali je dan ali noč. Naletel je na prvega prebivalca in ga to vprašal. Dobil je odgovor: *"Noč je."* Nato je naletel na drugega prebivalca in ga vprašal: *"Ali si ženska?"* Dobil je odgovor: *"Nisem."* Sedaj povej, kakšnega spola je bil prvi prebivalec in če je tujec izvedel, ali je bil dan ali noč! Ali se da določiti spol drugega prebivalca?

29. Na planetu *Bleščica*, kot že veste, ženske podnevi lažejo in ponoči govorijo resnico, moški pa ravno obratno. Ko je tujec nekega dne vprašal: *"Ali ste moški,"* je dobil odgovor: *"Nisem."* Nato je istega prebivalca vprašal, če je noč in odgovor je bil zopet negativen. Tujec je sedaj vedel, kdo je skrivnostni prebivalec in ali je dan ali noč. Povej to še ti.

30. V neki hiši stanujejo Jure, Peter, Vera, Alenka in Miro. Pri vsakem so doma kupili nekaj krompirja za ozimnico: 8 kg, 10 kg, 16 kg, 20 kg in 24 kg. Ugotovi, pri komu so kupili koliko krompirja, če veš:

a) Pri Alenki so kupili 2-krat več krompirja kot pri Veri.

b) Pri Juretu so kupili 2-krat manj krompirja kot pri Petru.

c) Pri Mirotu so kupili 3-krat več krompirja kot pri Juretu.

31. Miro, Peter, Mojca, Vesna in Aleš so naleteli na vrečo krompirja. Vsak si je vzel ven nekaj krompirjev: 5, 20, 7, 14 in 15. Ugotovi, kdo je vzel koliko krompirjev, če veš:
a) Miro je vzel 3-krat več krompirjev kot Aleš.
b) Aleš je vzel 2-krat manj krompirjev kot Vesna.
c) Mojca je vzela 2-krat več krompirjev kot Petra.

32. Vlaka A in B imata skupaj 40 vagonov. Od vlaka A so odklopili polovico vagonov in jih priklopili vlaku B. Nato so od vlaka B odklopili en vagon in ga priklopili nazaj na vlak A. Končno stanje je tako, da ima vlak B 3-krat več vagonov kot vlak A. Koliko vagonov je imel vsak vlak na začetku?

33. Vlaki A, B, C in D imajo skupaj 100 vagonov. Vlak C ima 2-krat več vagonov kot vlak A, vlak B ima 3-krat več vagonov kot vlak A in vlak D ima 2-krat več vagonov kot vlak C. Ugotovi, koliko vagonov ima posamezen vlak!

34. Osnovna celica nekega minerala je kvader, ki ima vse tri stranice (a, b in c) različno dolge. Vsota stranic a, b in c je 5-krat večja od stranice a. Vsota stranic b in c je 8 cm. Stranica b je za 2 cm daljša od stranice c. Kolikšne so dolžine posameznih stranic?

35. Nek mineral ima za osnovno celico kocko. Površina te kocke je 600 cm^2. Kolikšna je stranica te kocke? (Upoštevati moraš, da je površina kocke enaka ploščini šestih kvadratov.)

36. Učenci 4. razreda so šli na izlet po Sloveniji. Od ponedeljka do petka so si ogledali 5 slovenskih mest (Ljubljana, Maribor, Ptuj, Celje in Murska Sobota). Ugotovi, na kateri dan so videli katero mesto! Veš pa naslednje:
a) V Ptuju so bili prej kot pa v Ljubljani in pozneje kot v Murski Soboti.
b) V ponedeljek so bili v Celju, v četrtek pa v Mariboru.

37. Petra, Mojca, Luka in Rok so si vsak izbrali svoje najljubše mesto v Sloveniji: Ljubljana, Ljubelj, Maribor in Murska Sobota. Ti pa ugotovi, kdo si je izbral katero mesto, če veš:
a) Začetnica imena otroka ni ista kot začetnica mesta, ki ga je le-ta izbral.
b) Petra ni izbrala mesta z isto začetno črko kot Mojca.
c) Luka in Mojca sta izbrali mesti, ki imata največ črk. (Seveda vsaka svoje mesto.)

38. Morda ne veste, a po Beneški Sloveniji se sprehajata dve določeni vrsti ljudi. Ena skupina nosi klobuke in ti vedno govorijo resnico. V drugi skupini pa nosijo očala in ti vedno govorijo neresnico. Nekega dne je slepi popotnik srečal nekega prebivalca. Popotnik je želel nekaj zvedeti, a je moral najprej ugotoviti, če prebivalec govori resnico. Nekaj ga je vprašal in dobil odgovor NE in po tem je sklepal, da njegov sogovornik nosi klobuk (torej govori resnico). Ugotovi, kaj ga je vprašal?

39. V Beneški Sloveniji to leto ljudje s klobuki vedno lažejo, ljudje z očali pa vedno govorijo resnico. Še isto leto je slepi popotnik (ki je vedel za pravila) naletel na prebivalca in ga vprašal, če nosi klobuk. Nato je drugi slepec naletel na istega prebivalca in ga vprašal, če laže in nosi očala in dobil je isti odgovor kot prvi slepec. Na koga sta popotnika naletela – na prebivalca s klobukom ali na prebivalca z očali?

Rešitve matematičnih nalog nalog za osnovnošolce

1. Delna rešitev

5	5	3					
6	4	3		4			
2	4	7					
5	5	3					

2. Delna rešitev

2	3	4	2					
5	0	4	5				0	
2	6	1	2					

3. Vrstni red je lev, panter, tiger, ris. Torej plen dobi lev.

4. Lev je 3-krat hitrejši od geparda. Puma teče 2-krat počasneje od geparda.

5. Za star papir sta dobila vsak po 300 SIT.

6. Privarčevala sta 1194 cekinčkov.

7. Razdalja od A do B je 4 km, razdalja od B do C je 10 km in razdalja od B do D je 6 km.

8. Razdalja od X do E, preko B, D in C, je 48 km.

9. Matic – 50 – opica, Aleš – 100 – nosorog, Damjan – 200 – nič. Pevka: MADONNA.

10. Vrstni red po 2 urah je: Formula 1, Mercedes in Fičko. Formula 1 prevozi 300 km, Mercedes 200 km in Fičko 100 km.

11. Čisto preprosto. Gospod je umrl, ne da bi spregovoril. Zato ne more nihče vedeti, kaj je sanjal.

12. Rok – 65 kg – 175 cm, Miha – 63 kg – 173 cm, Jure – 64 kg – 174 cm in Aleš – 61 kg – 171 cm.

13. Prva pot je dolga $2\pi 6400$ km, druga pa pol manj.

14. Jure – 47 dcl, Miha – 50 dcl, Aleš – 50 dcl in Peter – 53 dcl.

15. Miha – 48 dcl, Peter – 50 dcl in Aleš – 46 dcl.

16. Pot je bila dolga 350 km, vozili so 10 ur in povprečna hitrost je bila 35 $\mathrm{km/h}$.

17. Nazaj je potoval s hitrostjo 30 $\mathrm{km/h}$.

18. Krakatau – 1883, Tambor – 1815, Parikutin – 1943 in Helgafel – 1973.

19. C, D, B in A.

20. Mica – King Ralph – John Goodman, Jasna – The Thornbirds – Richard Chamberlain, Riki – Mr. Destiny – Michael Cane in Mojca – Look who's talking too – John Travolta.

21. Jasna – Roger Moore, Rozi – John Travolta, Silvia – James Dean, Jelka – Sean Connery.

22. 4 bankovci po 200 SIT, bankovec za 100 SIT, bankovec za 50 SIT, 4 bankovci za 10 SIT, kovanec za 5 SIT, 2 kovanca za 2 SIT in kovanec za 1 SIT.

23. Miha – plin, Alenka – oglje, Vesna – sonce, Andrej – voda, Tomaž – elektrika.

24. $10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 2 + 3 + 5 = 5 + 5 = 2 + 2 + 3 + 3 = 5 + 5$, če ne upoštevamo vrstnega reda, so le 4 možnosti.

25. Jure – uran, Mojca – sonce, Liza – drva in Mare – voda.

28. Prvi prebivalec je bil ženska. Od drugega prebivalca je tujec izvedel, da je dan, ni pa mogel izvedeti, kakšnega spola je.

29. Prebivalec je bil moški in bila je noč.

30. Jure – 8 kg, Peter – 16 kg, Vera – 10 kg, Alenka – 20 kg in Miro – 24 kg krompirja.

31. Miro – 15, Peter – 7, Mojca – 14, Vesna – 10 in Aleš – 5 krompirjev.

32. Vlak A je imel 18 vagonov na začetku, vlak B pa 22.

33. Vlak A ima 10 vagonov, vlak B 30, vlak C 20 in vlak D 40.

34. $a = 2\ \mathrm{cm}$, $b = 5\ \mathrm{cm}$ in $c = 3\ \mathrm{cm}$.

35. $a = 10\ \mathrm{cm}$.

36. ponedeljek – Celje, torek – M. Sobota, sreda – Ptuj, četrtek – Maribor in petek – Ljubljana.

37. Petra – Maribor, Mojca – Ljubljana, Luka – M. Sobota in Rok – Ljubelj.

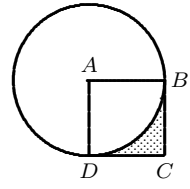
38. Eno možno vprašanje je: *Ali lažeš in nosiš klobuk?*

39. Popotnika sta naletela na človeka z očali, ta pa govori resnico.

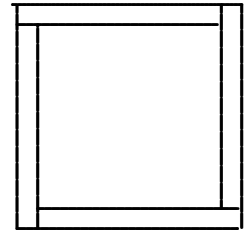
Pripravila *Katka Kurent*

Angleške naloge za osnovnošolce

1. Find the value of $23.1 : 0.11$
2. Find the sum of $2.0063 + 1.532 + 0.28$
3. What is the quotient when 0.1 is divided by 0.02?
4. Find the number obtained when the difference between 14.2 and 1.69 is divided by 0.03.
5. Express $\frac{1}{7}$ as a decimal fraction.
6. If $x = 0.3$, find the value of $\frac{1}{x}$.
7. Find the value of $x + 2y$, if $x = 7$ and $xy = 91$.
8. The yearly interest paid on a loan of 1200 is 180. What is the annual rate of interest, expressed as a percent?
9. If 10% of x is equal to 25% of 16, what is the value of x?
10. When 4131 people attended a concert, the concert hall was 90% full. What is the capacity of the hall?
11. What is the average of 6, 15, and 45?
12. Find the average of the even numbers greater than 1 and less than 15.
13. When 62 is divided by a certain number, the quotient is 7 and the remainder is 6. Find the number.
14. Two positive integers are in the ratio $2 : 5$. If the product of the two integers is 40, find the larger integer.
15. A circle has a radius of 1 unit. Find the area of the circle in square units.
16. The circle in the diagram has centre A and radius 1. If $ABCD$ is a square, find the area of the shaded region.



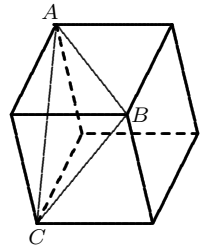
17. Four strips of wood each 30 cm long and 3 cm wide are arranged to form a square as shown. Find the area of the inner square.



18. What is the number of hours and minutes from $6 : 14$ a.m. sunrise until $8 : 02$ p.m. sunset?

19. The surface of a cube is to be painted so that no two faces of the same colour share a common edge. What is the minimum number of different colours required to paint the cube?

20. A cube having an edge of 10 is sliced into two sections by a cut in the plane ABC, as shown in the diagram. Find the volume of the smaller section.



Answers

1. 210 **2.** 3.8183 **3.** 5 **4.** 417 **5.** 0.142857... **6.** 3.3... **7.** 33 **8.** 15%

9. 40 **10.** 4590 **11.** 22 **12.** 8 **13.** 8 **14.** 10 **15.** π

16. $1 - \frac{\pi}{4}$ **17.** 729 cm^2 **18.** 13 hours 48 minutes **19.** 3 **20.** $166\frac{2}{3}$

Tekmujmo v razvedrilni matematiki

1. VREMENSKO POROČILO

"*Mi lahko, prosim, poveste, kakšne temperature so bile opoldne zadnjih pet dni?*" je Janez vprašal vremenoslovca.
"*Ne spomnim se natančno,*" je odgovoril vremenoslovec. "*Spominjam se le, da je bila temperatura vsak dan drugačna in da je njihov produkt enak 12.*"
Lahko ugotoviš vseh pet temperatur, če veš, da so bile izražene v celih številih?

2. LETA

Če Petrova leta pomnožiš z leti njegovega očeta, je produkt sestavljen iz istih števk kot njuna leta. Koliko sta oba stara?

3. OTROCI

Janez in njegova žena imata petnajst otrok, rojenih v intervalih 1,5 let. Marinka, najstarejši otrok, je osemkrat starejša od Matevža, ki je najmlajši. Koliko je stara Marinka?

4. ZNAKI

V naslednjih primerih črke nadomesti s števkami tako, da se bo račun izšel!

a)

	A	B	A
	A	B	A
+			C
	D	C	A

b)

		N	E
	S	I	N
+		N	E
M	I	N	A

c)

	A	M	A	N
	A	M	A	N
+			I	N
	N	I	L	L

d)

	M	I	C	A
		T	I	R
+		C	I	R
C	L	A	A	M

e)

	A	M	A
	A	M	A
+	M	I	A
I	R	M	A

f)

	P	I	K	A
		A	V	E
+	L	E	N	A
P	I	K	A	P

g)

	V	I	K	A
	V	I	K	A
+	V	I	K	A
A	I	K	A	R

h)

	A	B	A	A	C
	A	B	A	A	C
+				A	C
C	D	E	B	F	G

5. DELO

Martin je ponudil svojemu prijatelju Mihu Postopaču delo v svoji trgovini. Miha je bil prepričan, da je delo odveč, pa je kljub temu ponudbo sprejel za 30 dni. Plačo naj bi dobil v bonih: za vsak dan, ko bi delal, bi dobil 8 bonov, za vsak dan, ko bi manjkal, pa bi izgubil 10 bonov. Ob koncu meseca si nista bila Miha in njegov delodajalec ničesar dolžna, Miha pa si je s tem utrdil prepričanje, da ni od dela nobene koristi. Koliko dni je Miha delal in koliko ne?

6. KARTE

Na mizi je bilo položenih pet kart: po en križ, srce, pik, kara in joker. Ana, Beti, Cirila, Dunja in Ema so ugibale njihove barve in tu so njihovi odgovori:

	1. karta	2. karta	3. karta	4. karta	5. karta
Ana	PIK	SRCE	KRIŽ	JOKER	KARA
Beti	SRCE	JOKER	KARA	KRIŽ	PIK
Cirila	KRIŽ	KARA	PIK	JOKER	SRCE
Dunja	KARA	SRCE	JOKER	KRIŽ	PIK
Ema	KRIŽ	JOKER	KARA	PIK	SRCE

Vsako karto je uganila vsaj ena od deklet in na koncu so imele vse enako število pravilnih odgovorov. Katere so barve posameznih kart?

7. O STAROSTIH

Gabi, Helena in Mojca so se pogovarjale o svojih starostih. Vsaka je dala tri izjave:

Gabi: a) Stara sem 22 let.
b) Dve leti sem mlajša od Helene.
c) Eno leto sem starejša od Mojce.

Helena: d) Nisem najmlajša.
e) Med Mojco in mano je tri leta razlike.
f) Mojca je stara 25 let.

Mojca: g) Mlajša sem od Gabi.
h) Gabi je stara 23 let.
i) Helena je tri leta starejša od Gabi.

Preveč bi bilo pričakovati, da bi bile tri mlade ženske povsem odkrite glede svojih starosti. Res pa je, da sta resnični po dve izjavi od vsakega dekleta. Lahko ugotoviš njihove starosti?

8. DANINA SMRT

Andrej, Bojan in Cene so bili zaslišani o vzroku Danine smrti. Dali so naslednje trditve:

Andrej: Če je bil umor, je morilec Bojan.

Bojan: Če je bil umor, nisem jaz morilec.

Cene: Če ni bil umor, je bil samomor.

Detektiv: Če je lagal vsaj eden od njih, je bil samomor.

Kakšen je bil vzrok Danine smrti: umor, nesreča ali samomor?

9. LJUBITELJI ŽIVALI

Ljubitelji živali so se zbrali na obletnici ustanovitve društva. Bolje se je pri tem spoznalo pet oseb: Marinc, Mole, Štebe, Gorenc in Savnik. To so trije moški z imeni Bojan, Miha in Peter ter dve ženski: Maja in Jana. Med pogovorom so izvedeli za poklice drug drugega in pa za žival, ki jo ima vsak doma. Poklici so naslednji: bankir, poštar, učitelj, psiholog in zdravnik; živali pa so: papiga, pes, riba, maček in hrček. Poskušaj iz danih trditev ugotoviti podatke vsakega!

1. En moški ima papigo, drugi psa, tretji pa je poštar.
2. Bojanov priimek se ne začne z M in Janin priimek ni Savnik.
3. Nobeden izmed naslednjih moških ni bankir ali psiholog: Mole, Peter in moški, ki ima mačka.
4. Maja in bankir se ne pišeta Štebe ali Marinc in nobeden od teh štirih nima papige.
5. Oseba, ki ima papigo, oseba, ki ima ribo, in zdravnik se ne pišejo Savnik.

10. IDENTIFIKACIJA KRIMINALCA

Nek očividec nesreče je moral identificirati krivca, ki je pobegnil s kraja nesreče. Na policiji so stali v vrsti štirje možje. Priča je iskal moža, ki ni bil visok, ni bil svetlolas, ni bil suh in ni bil čeden, čeprav bi bili lahko ti opisi pristranski.

1. Vsak izmed štirih mož je stal poleg vsaj enega visokega moža.
2. Točno trije možje so stali poleg vsaj enega svetlolasca.
3. Točno dva moža sta stala poleg vsaj enega suhega moža.
4. Točno eden je stal poleg vsaj enega čednega moža.
5. Prvi moški je bil svetel, drugi je bil suh, tretji je bil visok in četrti je bil čeden.
6. Nobena dvojica nima skupnih več kot eno lastnost (svetel, suh, visok, čeden).
7. Samo eden ima več kot dve ustrezni lastnosti, ki jih je iskal očividec. Ta je bil tudi identificiran za krivca.

Kdo je bil identificiran?

11. UMETNIKI

Bernik, Perne, Romšak in Slanovec so štirje nadarjeni umetniki: plesalec, slikar, pevec in pisatelj; vendar ne nujno v tem vrstnem redu.

1. Bernik in Romšak sta bila med občinstvom, ko je imel pevec svoj koncert.
2. Oba, Perne in pisatelj, sta pozirala slikarju.
3. Pisatelj, čigar biografija o Slanovcu je bila dobro prodajana, namerava napisati tudi biografijo o Berniku.
4. Bernik ni nikoli slišal za Romšaka.

Ugotovi, s čim se ukvarja vsak posameznik!

Angleške naloge za srednješolce

1. The line with equation $2x + y = 0$ is rotated 90° about the origin. Determine the equation of the line in the new position.

2. The line through the points $A(3, 1)$ and $B(9, -4)$ passes through the point $C(-3, t)$. Find the value of t.

3. Determine the coordinates of the point which divides the line segment directed from $A(1, 8)$ to $B(27, 5)$ internally in the ratio $8 : 5$.

4. A vertical line divides the triangle with vertices $(0, 0)$, $(9, 0)$, $(8, 4)$ into two regions of equal area. Find the equation of the line.

5. When $n = 7^{1989}$ is expressed as an integer, what are the last two digits of n?

6. Solve the following system of equations:
$$\begin{aligned} 13x + 11y &= 36 \\ 11x + 13y &= 12 \end{aligned}$$

7. If the lines whose equations are
$$\begin{aligned} x + y - 6 &= 0 \\ 3x - y - 14 &= 0 \\ tx + 3y + 7 &= 0 \end{aligned}$$
all pass through the same point, find the value of t.

8. For what values of the parameter t does the linear system of equations
$$\begin{aligned} tx + y + z &= t \\ x + ty + z &= t \\ x + y + tz &= t \end{aligned}$$
a) have no solution?
b) have an infinite number of solutions?
c) have precisely one solution?

9. Form a quadratic equation with rational coefficients having $2 - 4\sqrt{3}$ as one of its roots.

10. Find the range of values of x such that $2x^2 + 7x < -3$.

11. The sequence 6, -9, x, y is such that the first three terms form an arithmetic sequence and the last three terms form a geometric sequence. Find the values of x and y.

12. Find a and b so that the quartic function $f(x) = a^2x^4 + 3x^3 + b^2x^2 + 4abx + 4ab$ leaves a remainder 10 on division by $x + 1$ and a remainder 20 on division by x.

13. Solve the equation $\log_x(19x - 30) = 3$.

14. Determine all values of k for which the equation $k2^x + 2^{-x} = 3$ has a single root.

15. The points $A(1,1)$, $B(0,0)$, and $C(2,-1)$ define a triangle in the plane. Find the cosine of $\sphericalangle ABC$.

16. An ellipse has its centre at the origin, its foci on y-axis, and its major axis tree times as long as its minor axis. Given that the ellipse passes through the point $(-4,-2)$, find its equation.

17. How many five-person commitees can be selected from six men and eight women if there must be at least two women included?

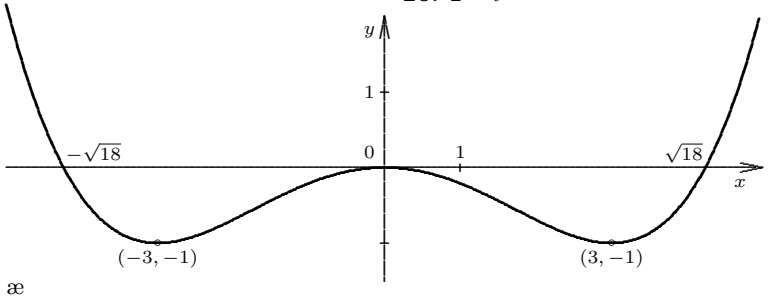
18. Let P be the point on parabola $y = x^2+5$ which is nearest to the line $2x+y-1 = 0$. Find the distance from P to the line.

19. Let $f(x) = \frac{x^4}{81} - \frac{2x^2}{9}$, where x is a real number.
    a) Find the roots of the equation $f(x) = 0$.
    b) Find all stationary (critical) points of $y = f(x)$.
    c) Find all points of inflection of $y = f(x)$.
    d) Find the axis of symetry of the graph of $y = f(x)$.
    e) Sketch the graph of $y = f(x)$.

20. Four complex numbers lie at the vertices of a square in the complex plane. Three of the numbers are $1+2i$, $-2+i$ and $-1-2i$. Find the fourth number.

Answers

1. $x - 2y = 0$
2. $t = 6$
3. $(17, 0)$
4. $x = 6$
5. 07
6. $x = 7$, $y = -5$
7. $t = -2$
8. a) $t = -2$ b) $t = 1$
c) if t takes any value except -2 or 1
9. $x^2 - 4x - 44 = 0$
10. $-3 < x < -\frac{1}{2}$
11. $x = -24$ and $y = -64$
12. There are four solutions:
$a = \frac{1}{2}(\sqrt{23} + \sqrt{3})$ $b = \frac{1}{2}(\sqrt{23} - \sqrt{3})$
$a = \frac{1}{2}(\sqrt{23} - \sqrt{3})$ $b = \frac{1}{2}(\sqrt{23} + \sqrt{3})$
$a = \frac{1}{2}(-\sqrt{23} + \sqrt{3})$ $b = \frac{1}{2}(-\sqrt{23} - \sqrt{3})$
$a = \frac{1}{2}(-\sqrt{23} - \sqrt{3})$ $b = \frac{1}{2}(-\sqrt{23} + \sqrt{3})$
13. $x = 2$ or $x = 3$
14. $k = \frac{9}{4}$ or $k \leq 0$
15. $\cos(\sphericalangle ABC) = \frac{1}{\sqrt{10}}$
16. $9x^2 + y^2 = 148$
17. 1876
18. $d = \frac{3}{\sqrt{5}}$
19. a) 0, $\sqrt{18}$, $-\sqrt{18}$
b) $x = 0$, $x = \pm 3$
c) $x = \pm\sqrt{3}$
d) Since $f(-x) = f(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$, the graph of $y = f(x)$ is symetric about the y-axis.
e) see figure
20. $2 - i$

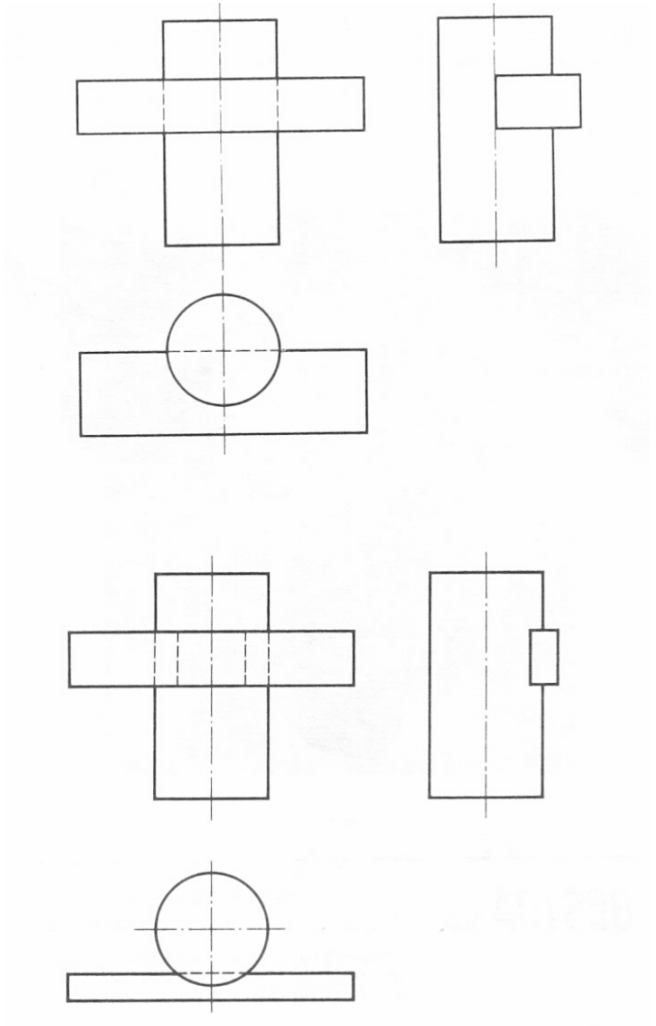


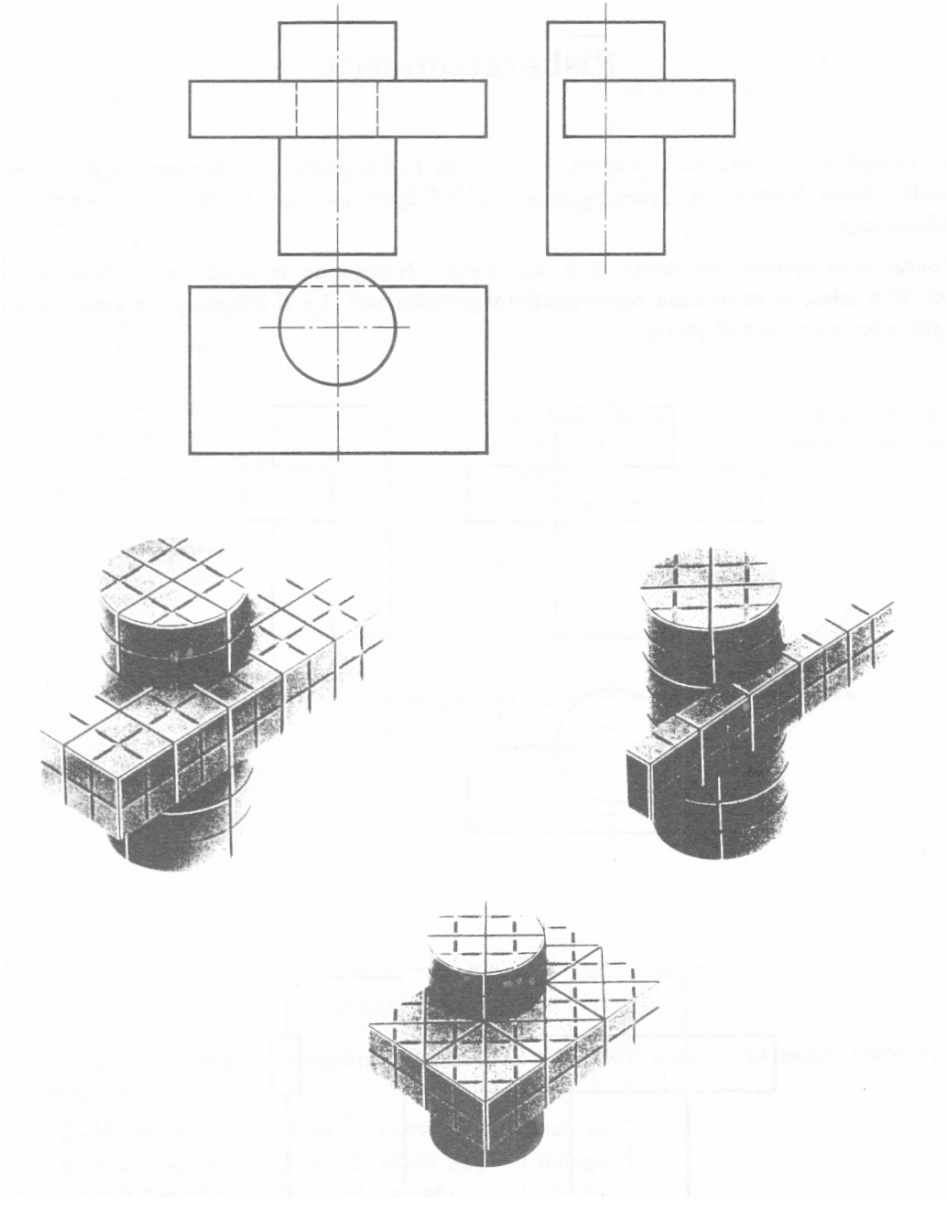
æ

Fishergeometric

Še zadnjič v tem letu vam predstavljamo učilo *Fishergeometric*, ki nam ga je v oceno poslala firma *Bestra d.o.o*, Kolodvorska 7, 61000 Ljubljana, kjer boste dobili vse potrebne informacije.

Tokrat smo sestavili tri telesa iz 4. kompleta. Naloga pa je izračunati prostornine in površine teles, ki so podana s pravokotnimi projekcijami. Če ti projekcije ne zadoščajo, si oglej slike na naslednji strani.





Naloge s sprejemnega izpita na elektrotehniški in strojni fakulteti v Zagrebu

Medtem ko je na tehničnih in naravoslovnih smereh na ljubljanski univerzi sprejemni izpit občasne narave, je na zagrebški pravilo. Tudi našim bodočim študentom in maturantom to znanje ne bo odveč.

M-1. Naj bo $0 < a < 1$. Tedaj je vrednost izraza

$$\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a} \cdot \frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}$$

enaka

(A) 1 **(B)** $a-1$ **(C)** a^2+1 **(D)** $a+1$ **(E)** $\frac{1}{a}$

M-2. Vrednost izraza $\frac{(1+i)^3-(1-i)^3}{(1+i)^2-(1-i)^2}$ je

(A) $1-i$ **(B)** -1 **(C)** $1+i$ **(D)** $2i$ **(E)** 1

M-3. Množica vseh rešitev neenačbe $|x-2|+|x|<4$ je množica:

(A) $[-2,0]$ **(B)** $(-1,3)$ **(C)** $[0,2)$ **(D)** $(-1,0]\cup[3,2)$ **(E)** $[0,4]$

M-4. Naj bo

$$f(x)=\frac{1}{x}+7, \quad g(x)=\frac{x}{1-7x}.$$

Potem je $f(g(x+1))$ enako

(A) $\frac{1}{x-1}$ **(B)** $\frac{-1}{x+1}$ **(C)** $\frac{14x}{x+1}$ **(D)** $\frac{1}{x+1}$ **(E)** $x+1$

M-5. Če gre parabola $y=ax^2+bx+c$ skozi točke $A(-2,0)$, $B(3,0)$, $C(1,12)$, potem je

(A) $c=1$ **(B)** $c=0$ **(C)** $c=12$ **(D)** $c=-6$ **(E)** $c=5$

M-6. Pri deljenju polinoma $x^4+2x^3-3x^2+5x-17$ s polinomom x^2+2x+1 dobimo količnik $Q(x)$ in ostanek $R(x)$. Seštevek kvadratov ničel polinomov $Q(x)$ in $R(x)$ je

(A) 9 **(B)** 13 **(C)** 1 **(D)** 10 **(E)** 5

M-7. Rešitev enačbe $\log_{\frac{1}{2}}(3-2^{-x})=x-1$ leži v intervalu

(A) $(1,2)$ **(B)** $(2,5)$ **(C)** $(-1,1)$ **(D)** $(-3,-1)$ **(E)** $(5,\infty)$

M-8. Če sta števili x in y rešitvi sistema $\log(x^2+y^2) = 1+\log 8$, $\log(x+y) = \log 3 + \log(x-y)$, potem je zmnožek xy enak

(A) 32 **(B)** 24 **(C)** 8 **(D)** -8 **(E)** 12

M-9. Če se diagonali romba povečata za $2\ \mathrm{cm}$, se ploščina poveča za $34\ \mathrm{cm}^2$. Če pa se večja diagonala zmanjša za $6\ \mathrm{cm}$, manjša pa poveča za $4\ \mathrm{cm}$, se ploščina romba zmanjša za $8\ \mathrm{cm}^2$. Dolžina krajše diagonale romba je

(A) $6\ \mathrm{cm}$ **(B)** $10\ \mathrm{cm}$ **(C)** $12\ \mathrm{cm}$ **(D)** $15\ \mathrm{cm}$ **(E)** $20\ \mathrm{cm}$

M-10. Trikotnik ima stranice z dolžinami 10, 12 in 18. Polmer krožnice, ki se dotika manjših dveh stranic in ima središče na največji stranici, je enak

(A) $\frac{40\sqrt{2}}{11}$ **(B)** $\frac{\sqrt{2}}{15}$ **(C)** $25\sqrt{2}$ **(D)** $\frac{18\sqrt{2}}{13}$ **(E)** $20\sqrt{2}$

M-11. Krožnica s polmerom r ima središče na krožnici s polmerom R, $r < R$. Kolikšno je razmerje $R : r$, če skupni tangenti teh krožnic oklepata kot $60°$?

(A) $2:1$ **(B)** $3:2$ **(C)** $4:3$ **(D)** $5:3$ **(E)** $7:3$

M-12. Vsota dolžin diagonal pravilnega petkotnika je 800. Najmanjše celo število, ki je večje od stranice tega petkotnika je

(A) 97 **(B)** 99 **(C)** 101 **(D)** 103 **(E)** 105

M-13. Posoda ima obliko obrnjenega stožca višine v. Pipa napolni posodo do polovice višine v pol minute. Do kakšne višine napolni ta pipa posodo v eni minuti?

(A) $\frac{v}{\sqrt[3]{4}}$ **(B)** $\frac{2v}{3}$ **(C)** $\frac{v}{\sqrt{2}}$ **(D)** v **(E)** $\frac{3v}{4}$

M-14. V posodi oblike valja z višino $18\ \mathrm{cm}$ in polmerom osnovne ploskve $4\ \mathrm{cm}$ je voda do polovice višine. Če v posodo potopimo kroglo s polmerom $3\ \mathrm{cm}$, se bo višina vode povečala za

(A) 15% **(B)** 25% **(C)** 30% **(D)** 35% **(E)** 75%

M-15. Ploščina osnovne ploskve, plašča in površina stožca tvorijo aritmetično zaporedje. Razmerje med tvorilko in polmerom osnovne ploskve, $s : r$, je

(A) $3:1$ **(B)** $2:1$ **(C)** $1:2$ **(D)** $1:3$ **(E)** $3:2$

M-16. Spodnji del observatorija ima obliko stožca s polmerom $18\ \mathrm{m}$, zgornji del pa je kupola oblike polkrogle enakega polmera. Kolikšna je skupna višina observatorija, če imata oba dela enako prostornino?

(A) $12\ \mathrm{m}$ **(B)** $15\ \mathrm{m}$ **(C)** $18\ \mathrm{m}$ **(D)** $21\ \mathrm{m}$ **(E)** $24\ \mathrm{m}$

M-17. Nasproti stranicam a, b, c trikotnika ležijo koti α, β, γ. Kolikšno je razmerje $b : c$, če je $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$?

$$\textbf{(A)}\ \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} \qquad \textbf{(B)}\ \tfrac{1}{2} \qquad \textbf{(C)}\ \tfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} \qquad \textbf{(D)}\ \tfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-1} \qquad \textbf{(E)}\ \tfrac{\sqrt{6}}{2}$$

M-18. Vsota rešitev enačbe $\cos 2x + \sin x = 0$, ki se nahajajo na intervalu $[0, \pi]$, je enaka

$$\textbf{(A)}\ 2.5\pi \qquad \textbf{(B)}\ 3\pi \qquad \textbf{(C)}\ 3.5\pi \qquad \textbf{(D)}\ 4\pi \qquad \textbf{(E)}\ \tfrac{10}{3}\pi$$

M-19. Če je $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x$ in je $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, potem je vrednost izraza $\cos^2 x + \cos x$ enaka

$$\textbf{(A)}\ 1 \qquad \textbf{(B)}\ \tfrac{3}{2} \qquad \textbf{(C)}\ \tfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad \textbf{(D)}\ \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1) \qquad \textbf{(E)}\ \tfrac{1}{2}\sqrt{3}+1)$$

M-20. Točka na premici $x - 2y + 11 = 0$, ki je najbližja točki $T(-1, 1)$, ima koordinati

$$\textbf{(A)}\ (-3, 5) \qquad \textbf{(B)}\ (-2, 5) \qquad \textbf{(C)}\ (2, -6) \qquad \textbf{(D)}\ (-\tfrac{13}{5}, \tfrac{21}{5}) \qquad \textbf{(E)}\ -\tfrac{12}{5}, \tfrac{22}{5})$$

M-21. Dve premici sta sočasno tangenti na parabolo $y^2 = 3x$ in normali na krožnico $x^2 - 2x + y^2 - 4x = 4$. Seštevek njunih smernih koeficientov znaša:

$$\textbf{(A)}\ 1 \qquad \textbf{(B)}\ 2 \qquad \textbf{(C)}\ 3 \qquad \textbf{(D)}\ 4 \qquad \textbf{(E)}\ 5$$

M-22. Tetiva parabole $y^2 = 8x$ je pravokotna na os x in seka parabolo v točkah T_1 in T_2. Kolikšna je ploščina trikotnika, ki ga določajo ta tetiva in tangenti na parabolo v T_1 in T_2, če je razdalja tetive T_1T_2 od gorišča parabole enaka 6?

$$\textbf{(A)}\ 124 \qquad \textbf{(B)}\ 125 \qquad \textbf{(C)}\ 127 \qquad \textbf{(D)}\ 128 \qquad \textbf{(E)}\ 130$$

M-23. Premica $y = 2x - 14$ se dotika elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, ki ima linearno ekscentričnost $e = 2$. Manjša polos elipse b je enaka:

$$\textbf{(A)}\ 5 \qquad \textbf{(B)}\ 4 \qquad \textbf{(C)}\ 6 \qquad \textbf{(D)}\ \sqrt{40} \qquad \textbf{(E)}\ 3$$

M-24. Ploščina pravokotnega trikotnika, ki ima dve oglišči v goriščih hiperbole $x^2 - y^2 = 9$, vrh s pravim kotom pa na asimptoti hiperbole, je

$$\textbf{(A)}\ 9\sqrt{2} \qquad \textbf{(B)}\ 3\sqrt{2} \qquad \textbf{(C)}\ 2\sqrt{3} \qquad \textbf{(D)}\ 9\sqrt{3} \qquad \textbf{(E)}\ 3$$

F-25. Kroglico spustimo z višine $10\ \mathrm{m}$ nad vodoravno ravnino, tako da prosto pada. V istem trenutku je iz točke na vodoravni ravnini, ki je pravokotna projekcija točke izpuščanja kroglice, vržena navpično navzgor s hitrostjo $25\ \mathrm{m/s}$ druga kroglica. Na kateri višini bosta trčili?

$$\textbf{(A)}\ 6.33\ \mathrm{m} \qquad \textbf{(B)}\ 7.22\ \mathrm{m} \qquad \textbf{(C)}\ 8.44\ \mathrm{m} \qquad \textbf{(D)}\ 9.22\ \mathrm{m} \qquad \textbf{(E)}\ 5.88\ \mathrm{m}$$

F-26. Kamen, vržen z mesta vodoravno, je zadel zid, ki je oddaljen $5\ \mathrm{m}$. Višina, kjer je kamen zadel zid, je $1\ \mathrm{m}$ manjša od višine, s katere je bil kamen vržen. Kolikšna je začetna hitrost kamna?

(A) $5\ \mathrm{m/s}$ **(B)** $11.1\ \mathrm{m/s}$ **(C)** $18.3\ \mathrm{m/s}$ **(D)** $0.5\ \mathrm{m/s}$ **(E)** $3\ \mathrm{m/s}$

F-27. Izstrelek z maso $20\ \mathrm{g}$ in začetno hitrostjo $600\ \mathrm{m/s}$ se zarije v desko debeline $2\ \mathrm{cm}$, jo prebije in iz nje pride s hitrostjo $200\ \mathrm{m/s}$. Kolikšna je povprečna sila upora, ki je delovala na izstrelek pri prebijanju deske?

(A) $2.81 \cdot 10^4\ \mathrm{N}$ **(B)** $3.7 \cdot 10^4\ \mathrm{N}$ **(C)** $6.8 \cdot 10^4\ \mathrm{N}$ **(D)** $9.8 \cdot 10^4\ \mathrm{N}$
(E) $16 \cdot 10^4\ \mathrm{N}$

F-28. Avtomobil z maso $1200\ \mathrm{kg}$ iz mirovanja pospeši na hitrost $20\ \mathrm{m/s}$ v času $8\ \mathrm{s}$. Kolikšna je povprečna moč motorja pri tem pospeševanju? (Trenje zanemarimo.)

(A) $30\ \mathrm{kW}$ **(B)** $47\ \mathrm{kW}$ **(C)** $55\ \mathrm{kW}$ **(D)** $85\ \mathrm{kW}$ **(E)** $324\ \mathrm{kW}$

F-29. Koliko obratov naredi kotač pri enakomernem pospeševanju v $30\ \mathrm{s}$, če se mu frekvenca vrtenja v tem času iz začetne vrednosti $3\ \mathrm{s}^{-1}$ poveča na $5\ \mathrm{s}^{-1}$?

(A) 90 **(B)** 120 **(C)** 240 **(D)** 300 **(E)** 60

F-30. Če kos aluminija mase $5.4\ \mathrm{g}$ pritrdimo na les mase $25\ \mathrm{g}$, bo tako nastalo telo lebdelo v vodi. Kolikšna je prostornina lesa? (Gostota aluminija je $2700\ \mathrm{kg/m^3}$.)

(A) $10.3\ \mathrm{cm^3}$ **(B)** $2.2\ \mathrm{cm^3}$ **(C)** $203\ \mathrm{cm^3}$ **(D)** $35.1\ \mathrm{cm^3}$ **(E)** $28.4\ \mathrm{cm^3}$

F-31. Po površini vode se širijo valovi s frekvenco $3\ \mathrm{Hz}$ in hitrostjo $2.4\ \mathrm{m/s}$. Kolikšna je fazna razlika med dvema točkama, ki sta oddaljeni $0.2\ \mathrm{m}$?

(A) π **(B)** $\frac{\pi}{3}$ **(C)** $\frac{\pi}{2}$ **(D)** $\frac{\pi}{4}$ **(E)** $\frac{\pi}{6}$

F-32. Ploščati kondenzator sestoji iz dveh krožnih plošč, med katerima je razdalja $1\ \mathrm{cm}$. Če je med njima zrak, je kapacitivnost kondenzatorja $43\ \mathrm{pF}$. Kolikšen je premer plošč? ($\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$)

(A) $0.10\ \mathrm{cm}$ **(B)** $13\ \mathrm{cm}$ **(C)** $2.5\ \mathrm{cm}$ **(D)** $25\ \mathrm{cm}$ **(E)** $12.5\ \mathrm{cm}$

F-33. Na akumulator z elektromotorno silo $6.0\ \mathrm{V}$ je priključen aparat upornosti $2.1\ \Omega$. Pri tem teče tok $2.8\ \mathrm{A}$. Kolikšen bi bil tok, če bi namesto omenjenega aparata priključili aparat upornosti $1.2\ \Omega$?

(A) $3.2\ \mathrm{A}$ **(B)** $4.8\ \mathrm{A}$ **(C)** $4.0\ \mathrm{A}$ **(D)** $3.6\ \mathrm{A}$ **(E)** $4.4\ \mathrm{A}$

F-34. Pri napetosti $220\ \mathrm{V}$ je moč električnega števdilnika $1000\ \mathrm{W}$. Koliko se spremeni moč števdilnika, če se spremeni napetost za $5\ \%$?

(A) $5\ \%$ **(B)** $10\ \%$ **(C)** $15\ \%$ **(D)** $20\ \%$ **(E)** $25\ \%$

F-35. Elektron se giblje s konstantno hitrostjo pravokotno na smer električnega in magnetnega polja, ki sta tudi pravokotna. Kolika je hitrost, če je $E = 1$ kV/m in $B = 1$ mT.

(A) 10^{-6} m/s **(B)** 10^{3} m/s **(C)** 10^{6} m/s **(D)** 1 m/s **(E)** 10−3 m/s

F-36. V kolikem času bo iz kalorimetra izparelo 100 g vode, če je v njem potopljen grelec z močjo 1000 W? Začetna masa vode je bila 2000 g, njena temperatura pa 20°C. (Specifična toplotna kapacitivnost vode je 4190 $\mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$, specifična toplota izparevanja pa je $2.26 \cdot 10^{6}$ J/kg.)

(A) 896 s **(B)** 675 s **(C)** 2438 s **(D)** 3765 s **(E)** 4153 s

F-37. V dveh vzporednih ravnih vodnikih imamo električna toka $I_1 = 4$ A in $I_2 = 6$ A. Magnetno polje se izgubi v točki med vodnikoma, ki je od prvega oddaljena za:

(A) 2 cm **(B)** 4 cm **(C)** 6 cm **(D)** 8 cm **(E)** 10 cm

F-38. Skozi tuljavo teče tok 6.1 A, ko je le-ta priključena na enosmerno napetost 10 V. Če jo priključimo na izmenično napetost 10 V, znaša tok 1.99 A. Frekvenca toka je 50 Hz. Kolikšna je induktivnost tuljave?

(A) 15.1 mH **(B)** 23.8 mH **(C)** 8.3 mH **(D)** 11.5 mH **(E)** 29.9 mH

F-39. Mejna valovna dolžina svetlobe, pri kateri se še zaznava fotoelektrično delovanje na površini litija, je 517 nm. Kolikšno je izhodno delo litija? ($h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ Js, $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ eV)

(A) 2.4 eV **(B)** 3.5 eV **(C)** 8.2 eV **(D)** 0.25 eV **(E)** 1.2 eV

F-40. Svetlobni žarek pada na površino tekočine pod kotom 50° in se lomi pod kotom 32°. Kolikšen je kot totalne refleksije na to površino?

(A) 40° **(B)** 42° **(C)** 44° **(D)** 38° **(E)** 46°

Odgovori

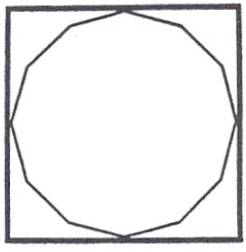
1. E	2. E	3. B	4. D	5. C	6. A	7. C	8. A	9. C	10. A
11. A	12. B	13. A	14. B	15. B	16. B	17. C	18. C	19. D	20. D
21. B	22. D	23. C	24. A	25. D	26. B	27. E	28. A	29. B	30. E
31. C	32. D	33. B	34. B	35. C	36. A	37. D	38. A	39. A	40. C

International Mathematical Talent Search

Problems Round 12

Problem 1/12. A teacher writes a positive integer less than fifty thousand on the board. One student claims it is an exact multiple of 2; a second student says it is an exact multiple of 3; and so on, until the twelfth student says that it is an exact multiple of 13. The teacher observes that all but two of the students were right, and that the two students making incorrect statements spoke one after the other. What was the number written on the board?

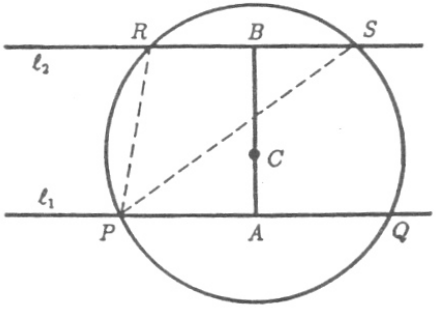
Problem 2/12. A regular dodecagon is inscribed in a square of area 24 as shown on the right, where four vertices of the dodecagon are at the midpoints of the sides of the square. Find the area of the dodecagon.



Problem 3/12. Let S be a set of 30 points in the plane, with the property that the distance between any pair of distinct points in S is at least 1. Define T to be a largest possible subset of S such that the distance between any pair of distinct points in T is at least $\sqrt{3}$. How many points must be in T?

Problem 4/12. Prove that if $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ is a zero of a cubic polynomial with integer coefficients, then it is the only real zero of that polynomial.

Problem 5/12. In the figure on the right, ℓ_1 and ℓ_2 are parallel lines, AB is perpendicular to them, and P, Q, R, S are the intersection points of ℓ_1 and ℓ_2 with a circle of diameter greater than $\overline{AB}$ and center, C, on the segment AB. Prove that the product $\overline{PR} \cdot \overline{PS}$ is independent of the choice of C on the segment AB.



Solutions Round 9

Problem 1/9. An $m \times n$ grid is placed so that it has it's corners at $(0,0)$ and (m,n). A legal move is defined as a move either one unit in a positive y direction or one unit in the positive x direction. The point (i,j), where $0 \leq i \leq m$ and $0 \leq j \leq n$, is removed from the grid so that it is no longer possible to pass through this point on the way to (m,n). How many possible paths are there from $(0,0)$ to (m,n)?

Solution: To get from $(0,0)$ to (m,n) requires $m+n$ moves: m unit length moves in the x direction, and n unit length moves in the y direction. Hence the number of different paths from $(0,0)$ to (m,n) is the number of arrangements of m x's and n y's in a row. To construct such an arrangement, note that the first x can be placed in $m+n$ different ways, the second x in $m+n-1$ different ways, the third in $m+n-2$ ways, and so on, until the last x can be placed in $n+1$ different ways. Thus there are $(m+n)(m+n-1)(m+n-2)\cdots(n+1)$ ways to place the x's. But the x's are indistinguishable, hence we must divide this product by $n!$ to get $\binom{m+n}{m}$, as the total number of paths from $(0,0)$ to (m,n).

Similarly there are $\binom{i+j}{i}$ paths from $(0,0)$ to (i,j), and for each of these paths there are $\binom{m+n-i-j}{m-i}$ paths from (i,j) to (m,n). Hence there are $\binom{i+j}{i} \cdot \binom{m+n-i-j}{m-i}$ paths from $(0,0)$ to (m,n) that pass through (i,j). Since these paths are not permissible, we must subtract this product from the total number of paths from $(0,0)$ to (m,n). Hence the answer to the problem is:

$$\binom{m+n}{m} - \binom{i+j}{j} \cdot \binom{m+n-i-j}{m-i}.$$

Comments: The problem can be extended to higher dimensions as well as to several inadmissible points; in the latter case, one must use the "Inclusion - Exclusion Principle" to find the appropriate formula.

Problem 2/9. Given a point P and two straight line segments on a rectangular piece of paper in such a way that the intersection point Q of the straight lines does not lie on the paper. How can we construct the straight line PQ with the help of a ruler if we are allowed to draw only within the limits of the paper?

To construct PQ, we need a third point, R, which is on the paper, so that P, Q, and R are collinear. Since the collinearity of points (as well as the concurrence of lines) is usually the subject of projective geometry, one is naturally led to the theorems of Pappus

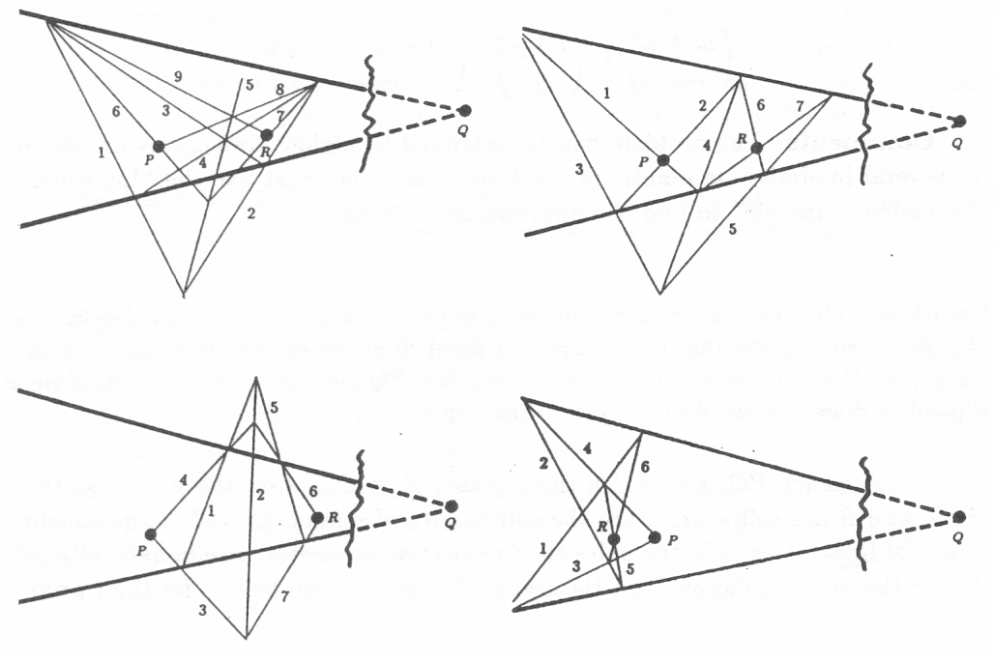
and Desargues. We state them below; for their proofs (via repeated applications of the theorems of Ceva and Menelaus) the reader is referred to Geometry Revisited by Coxeter and Greitzer (volume 19 in the **New Mathematical Library** series of the Mathematical Association of America).

Pappus' Theorem: If A_1, A_2, A_3 are collinear, and if B_1, B_2, B_3 are collinear, then the points of intersection of A_1B_2 and A_2B_1, A_1B_3 and A_3B_1, and A_2B_3 and A_3B_2 are also collinear.

Desargues' Theorem: If $A_1B_1C_1$ and $A_2B_2C_2$ are two triangles such that A_1A_2, B_1B_2, and C_1C_2 intersect in one point, then the points of intersection of A_1B_1 and A_2B_2, B_1C_1 and B_2C_2, and A_1C_1 and A_2C_2 are collinear.

It should be noted that both of these are theorems of pure incidence, with no reference to measurement of angles or lengths, and none to order. Hence both theorems are valid for a variety of configurations of the lines and triangles involved.

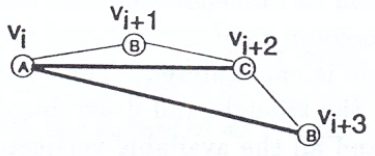
We offer here four constructions of R; in each of them the numbers refer to the order in which the lines are drawn. In all of these configurations the location of P with respect to the given lines is immaterial, but one must exercise some caution to remain within the bounds of the paper. For a thorough analysis of these constructions the reader is referred to *Geometric Transformations III* by I. M. Yaglom (volume 24 in the **New Mathematical Library** series of the Mathematical Association of America).

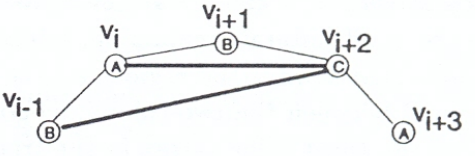


Problem 3/9. A convex polygon has 1993 vertices which are colored so that neighboring vertices are of different colors. Prove that one can divide the polygon into triangles with non-intersecting diagonals whose endpoints are of different colors.

Solution 1: First observe that at least three colors are required to properly color the 1993-gon, since otherwise the colors would have to alternate. If we number the vertices sequentially, this results in the odd-numbered vertices being colored with one color and the evens with the second, but vertices 1 and 1993 are adjacent.

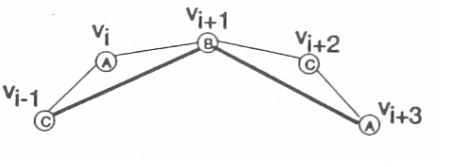
We will now prove by induction that any properly colored $(2n+1)$-gon, $n \geq 1$ can be divided into triangles with distinctly colored vertices. The base case is for $n = 1$, the triangle, which is clearly true. Assuming that the task is possible for a $(2n+1)$-gon, we must show that it must be possible for a $(2n+3)$-gon. Any polygon with an odd number of vertices, properly colored, must have a sequence of three vertices all having distinct colors (otherwise the colors alternate around the polygon, and this is impossible). Consider such a sequence of vertices, denoted v_i, v_{i+1} and v_{i+2}, and colored A, B and C, respectively. The next vertex, v_{i+3} must be colored either A or B. If it is B, draw a diagonal between v_i and v_{i+3}, and another between v_i and v_{i+2}, as shown in the figure below:





Then we have created two triangles and a $(2n+1)$-gon, and, by the induction hypothesis the $(2n+1)$-gon can be divided into triangles. Suppose v_{i+3} is color A. Now consider the color of vertex v_{i-1}, which must be either B or C. If it is color B, we may draw the diagonals between v_{i-1} and v_{i+2} and between v_i and v_{i+2}. This is illustrated in the second figure above.

Once again we have created two triangles and a $(2n+1)$-gon. So suppose v_{i-1} is color C. Then we may draw diagonals between v_{i-1} and v_{i+1} and between v_{i+1} and v_{i+3}, as shown:



Hence, once again we have created two triangles and a $(2n+1)$-gon. Since we have covered all possibilities, this completes the proof that the task is possible for a $(2n+3)$-gon as well.

Solution 2: Observe once again that three colors are necessary. If there is a uniquely colored vertex, draw diagonals between it and all other nonadjacent vertices. Otherwise, choose any vertex, call it v_1 and its color A, and consider its clockwise neighbor, call it v_2 and its color B, Continue clockwise around the polygon until a vertex v_i of a third color, C, is encountered. If drawing the diagonal between v_1 and v_i would result in no vertex of color B in one of the polygons, then draw the diagonal between v_2 and v_i, otherwise draw the diagonal between v_1 and v_i. Note that in this latter case $i \neq 3$, since that would imply that v_2 is the only vertex of color B, and thus there is a vertex of color A between v_2 and v_i. In either case, we have insured that both of the resulting polygons have at least three colors represented, and so the procedure can be repeated on each of the resulting polygons.

Solution 3: Since there must be at least three colors represented, choose three vertices of different colors, and draw diagonals between them. This creates a triangle and either one, two or three additional polygons. For each resulting polygon (that is not already a triangle), choose a vertex and draw diagonals between the chosen vertex and all other vertices in the polygon whose color is different from that of the chosen vertex. Then each polygon is divided into triangles and two-color quadrilaterals (since, if a diagonal cannot be drawn to a particular vertex, it can always be drawn to both of its neighbors). As long as there are quadrilaterals remaining, select a two-color quadrilateral and remove diagonals that border the region until a triangle is encountered. Then remove a diagonal between the two-color $(2n)$-gon and the triangle and draw diagonals between the third-color vertex in the triangle and all the available vertices.

Comments: The solutions above represent two fundamentally different solution strategies: mathematical induction (Solution 1) and constructive proof. The second constructive proof (Solution 3) is perhaps the simplest proof, but it is less efficient from an algorithmic point of view. The induction step is somewhat easier if the statement to be proved is that any n-gon, $n \geq 3$, colored with three or more colors can be divided into triangles with distinctly colored vertices. Any n-gon colored with at least three colors must have three successive vertices of distinct colors, since one can begin with an arbitrary vertex, call its color A, and the color of the successive (clockwise) vertex color B. Now continue clockwise around the polygon until the first time a third color, C, is encountered. The last three vertices encountered must be colored either ABC or BAC. Without loss of generality, assume they were vertices a, b and c colored A, B and C. Draw the diagonal between a and c. By the induction hypothesis, the resulting n-gon can be divided into triangles as long as it has three colors. If it does not have three colors, then vertex b must have been the only vertex colored B. Remove the diagonal, and draw a diagonal between b and every other nonadjacent vertex.

Problem 4/9. A triangle is called *Heronian* if its sides and area are integers. Determine all five Heronian triangles whose perimeter is numerically the same as its area.

Solution: Let a, b, and c be the lengths of the sides of a triangle and let $s = (a+b+c)/2$. Then, in view of Heron's formula, the problem is equivalent to solving the equation

$$2s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

in positive integers. Upon squaring and simplifying, this is equivalent to

$$4s = (s-a)(s-b)(s-c),$$

which can be further simplified by letting $x = s-a, y = s-b$ and $z = s-c$. Since $x+y+z = 3s-(a+b+c) = 3s-2s = s$, the last equation is equivalent to

$$4(x+y+z) = xyz.$$

Note that (in view of the Triangle Inequality applied to a, b, and c) x, y and z are positive; in fact, they can be realized geometrically by considering the inscribed circle of the triangle and its points of tangency to the sides of the triangle.

If two of x, y, z were equal, say if $x = y$, then $x^2z = 8x + 4z$ would yield $(xz-4)^2 = 4(z^2+4)$, which is impossible since the right side of this equation is not the square of an integer. Hence we may assume without loss of generality that $x < y < z$.

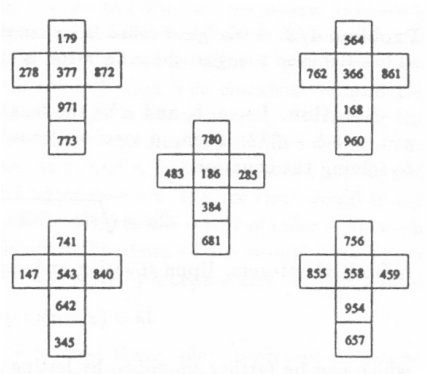
Next we prove that $x \leq 2$. For if $3 \leq x$, then $3yz \leq 4(x+y+z) < 4y + 8z < 12z$, implying that $y < 4$. This contradicts that $x < y$. Hence the only possible values of x are 1 and 2.

If $x = 1$, write $4(1+y+z) = yz$ as $(y-4)(z-4) = 20$. Considering the possible factors of 20, it is easy to find solutions $\{y = 6, z = 14\}, \{y = 5, z = 24\}$, and $\{y = 8, z = 9\}$. Combining these with $x = 1$, we obtain the Heronian triangles $\{20, 7, 15\}, \{29, 6, 25\}$ and $\{17, 9, 10\}$.

If $x = 2$, write $4(2+y+z) = 2yz$ as $(y-2)(z-2) = 8$. By considering the factors of 8, we find the solutions $\{y = 4, z = 6\}$, and $\{y = 3, z = 10\}$. Combining these with $x = 2$ yields the other two Heronian triangles, $\{10, 6, 8\}$ and $\{13, 5, 12\}$.

Comments: This problem was first proposed and solved by Hungarian mathematician Gyula Vályi (1855-1913); the solution presented above is similar to the one he gave.

Problem 5/9. A set of five "Trick Math Cubes" is shown schematically on the right. A "magician" asks you to roll them and to add the five numbers on top of them. He starts adding them at the same time, and writes down the correct answer on a piece of paper long before you are finished with the task. How does he do it? Expose and explain this trick.



Solution: The trick consists of two simple steps to build a 4-digit sum: (1) add the units digits of the 5 numbers showing, write that sum as a 2-digit number, and use the result as the last two digits of the desired sum; (2) subtract the result of the first step from 50 and use the resulting 2-digit number as the first two digits of the desired sum. It becomes clear that the trick works after two observations are made. First, each number on a fixed cube has the same middle digit and these digits (4,5,6,7 and 8) sum to 30. Second, on a fixed cube, the sum of the first and last digits of each number is the same and those sums (7,8,9,10, and 13) sum to 47. If we let the first, second, and third digits of the number showing on cube i be a_i, b_i, and c_i, respectively, then the desired sum is

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{5}(100a_i + 10b_i + c_i) &= 100\sum_{i=1}^{5} a_i + 10\sum_{i=1}^{5} b_i + \sum_{i=1}^{5} c_i \\
&= 100(47 - \sum_{i=1}^{5} c_i) + 300 + \sum_{i=1}^{5} c_i \\
&= 100[(47 - \sum_{i=1}^{5} c_i) + 3] + \sum_{i=1}^{5} c_i \\
&= 100(50 - \sum_{i=1}^{5} c_i) + \sum_{i=1}^{5} c_i.
\end{aligned}$$

Comments: This problem was based on some "Trick Math Cubes" manufactured in Japan some years ago.

38. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Kočevje, 23. in 24. aprila 1994

N A L O G E

Prvi letnik

1. Vsako izmed števil e_1, e_2, e_3, ..., e_n je enako 1 ali -1. Dokaži:
   če je $e_1e_2 + e_2e_3 + \cdots + e_{n-1}e_n + e_ne_1 = 0$, je n deljiv s 4.

2. Pokaži, da vsota kvadratov deliteljev naravnega števila n ni enaka $(n+1)^2$ za noben n.

3. Dan je trikotnik in točka na eni od njegovih stranic. Načrtaj premico, ki gre skozi dano točko in ploščinsko razpolavlja trikotnik.

4. Vsak izmed 20 učencev nekega razreda je s počitnic poslal po eno razglednico desetim sošolcem. Pokaži, da sta vsaj dva sošolca pisala drug drugemu.

Drugi letnik

1. Za naravni števili m in n vemo, da je $mn + 1$ deljivo s 24. Pokaži, da je tudi $m + n$ deljivo s 24.

2. Na naravoslovnem dnevu je matematična skupina postavila nekaj stolov okrog ribnika in na vsakega napisala po eno število. Ko sta se Mitja in Dušanka sprehodila okrog ribnika, je Mitja opazil, da je na vsakem stolu napisana absolutna vrednost razlike števil s stolov, ki sta neposredno pred tem stolom. Dušanka, ki je imela pri sebi žepni kalkulator, je izračunala, da je vsota vseh števil enaka 1994.
   Dokaži: trije učenci lahko pospravijo vse stole, če odnesejo po enako število stolov.

3. Naj bodo n, x, y in z naravna števila in $z \leq n$. Pokaži, da enačba $x^n + y^n = z^n$ ni rešljiva.

4. Dani krožnici s središčem S narišimo tetivo AB (ki ne vsebuje središča) in na njej točko C. Trikotniku SAC očrtamo krožnico in drugo presečišče te krožnice z dano krožnico označimo z D. Dokaži, da je $\overline{CD} = \overline{CB}$.

Tretji letnik

1. Dokaži: če sta $2n + 1$ in $3n + 1$ popolna kvadrata, kjer je n naravno število, je n deljivo s 40.

2. Pokaži, da za vsako realno število x velja $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

3. Polinom $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ima realne korene. Pokaži, da ima polinom $q(x) = x^3 - bx^2 + acx - c^2$ vsaj en nenegativen koren.

4. Na hipotenuzi AC pravokotnega trikotnika ABC izberemo točko D, da je $\overline{AB} = \overline{CD}$. Dokaži: v trikotniku ABD se simetrala kota pri A, težiščnica iz B in višina iz D sekajo v skupni točki.

Četrti letnik

1. Dokaži, da ne obstaja funkcija $f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, za katero je $f\big(f(x)\big) = x + 1$ za vsak $x \in \mathbb{Z}$.

2. V prazna polja tabele vpiši po eno naravno število tako, da bodo števila v vsaki vrstici in vsakem stolpcu sestavljala aritmetično zaporedje.

	74			
				186
		103		
0				

3. Dokaži, da so vsa števila v zaporedju

$$49,\ 4489,\ 444889,\ 44448889\ \ldots$$

popolni kvadrati (v vsakem številu nastopa po n štiric in $n-1$ osmic ter ena devetka).

4. Naj bo Q razpolovišče stranice AB tetivnega štirikotnika $ABCD$ in S presečišče njegovih diagonal. Pravokotni projekciji točke S na AD in BC označimo zaporedoma s P in R. Dokaži, da je $\overline{PQ} = \overline{QR}$.

R e š i t v e n a l o g

Prvi letnik

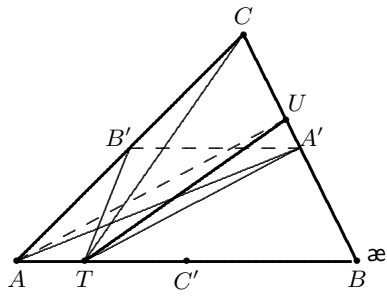
1. Vrednosti posameznih členov vsote so 1 ali -1. Ker je vsota enaka nič, mora biti členov, enakih 1, prav toliko, kot členov, enakih -1.

   Če zmnožimo vse člene vsote, dobimo $e_1^2 e_2^2 \cdots e_n^2 = 1$, zato mora biti členov, enakih -1, sodo. Vseh členov pa je ravno dvakrat več, torej je n deljivo s štiri.

2. Če je v razcepu števila n na prafaktorje več kot eno praštevilo ali pa je potenca katerega praštevila večja od 2, najdemo med sabo različni naravni števili a in b (večji od 1), da je $n = ab$. Potem je $\sum_{d_i|n} d_i^2 \geq 1+a^2+b^2+a^2b^2 > 1+2ab+a^2b^2 = (n+1)^2$.

   Če je n praštevilo, je $\sum_{d_i|n} d_i^2 = 1 + n^2 < (n+1)^2$. Če pa je $n = p^2$, kjer je p praštevilo, je $\sum_{d_i|n} d_i^2 = 1 + p^2 + p^4 < (n+1)^2$. Posebej trditev preverimo še za $n = 1$.

3. Naj $S(XYZ)$ pomeni ploščino trikotnika XYZ. Označimo z A', B' in C' razpolovišča stranic BC, CA in AB ter predpostavimo, da točka T leži na daljici AC'. Velja: $\frac{S(ATB')}{S(ATC)} = \frac{1}{2}$ in $\frac{S(TBA')}{S(TBC)} = \frac{1}{2}$. Ker je AB vzporedna $B'A'$, je $S(ATB') = S(ATA')$. Potegnimo vzporednico k TA' skozi A in njeno presečišče z BC označimo z U. Potem je $S(ATA') = S(UTA')$. Torej je $S(TBU) = S(TBA') + S(UTA') = S(TBA') + S(ATB') = \frac{1}{2}(S(TBC) + S(ATC)) = \frac{1}{2}S(ABC)$. Rešitev naloge je torej premica skozi T in U.



4. Oglejmo si vse neurejene pare (t. j. dvoelementne množice), ki jih lahko sestavimo iz teh 20 učencev. Za poslano pismo bomo rekli, da pripada danemu paru, če je en član tega para poslal pismo drugemu. Vseh parov je $20 \cdot 19/2 = 190$, vseh pisem pa je $20 \cdot 10 = 200$. Ker vsako pismo pripada kakemu paru, obstaja vsaj en par, ki mu pripadata dve pismi, torej par, ki si je pismi izmenjal.

Drugi letnik

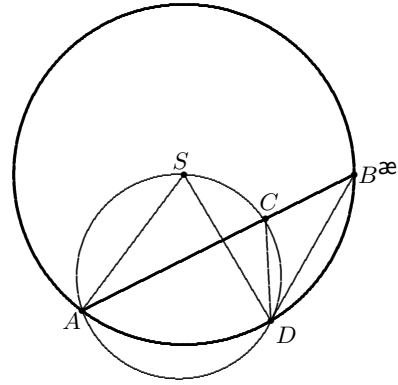
1. Ker je $mn = 24k - 1$ za nek $k \in \mathbb{N}$, m ni deljiv niti z 2 niti s 3, torej je oblike $m = 6x \pm 1$; enako sklepamo za n in dobimo $n = 6y \pm 1$ ($x, y \in \mathbb{N}$). Ker m in n nastopata simetrično, ločimo le tri možnosti:
   (a) Če velja $m = 6x+1$ in $n = 6y+1$, je $mn+1 = 3(12xy+2(x+y))+2$. Torej $mn+1$ ni deljivo s 3, zato ta možnost ni dobra.
   (b) Če velja $m = 6x-1$ in $n = 6y-1$, je $mn+1 = 3(12xy-2(x+y))+2$. Torej $mn+1$ ni deljivo s 3, zato ta možnost ni dobra.
   (c) Če velja $m = 6x+1$ in $n = 6y-1$, je $mn+1 = 6(6xy+y-x)$. Ker je $mn+1$ deljivo s 24, mora biti $6xy+y-x$ deljivo s 4. Naj bo $x+y = 4t+s$, pri čemer je $t \in \mathbb{N}$ in $s \in \{0,1,2,3\}$. Potem velja $6xy+y-x = 4(6tx+t) - 2x(3x+1) + s(6x+1)$. Število $x(3x+1)$ je sodo, zato je $s(6x+1)$ deljivo s 4. Ker je $6x+1$ liho, je s deljivo s 4, zato velja $s = 0$ in $x+y = 4t$. Od tod dobimo $m+n = 6(x+y) = 24t$, torej je $m+n$ res deljivo s 24.

2. Vsako napisano število je nenegativno (je absolutna vrednost nečesa), vsaj eno število pa je različno od 0 (saj je vsota 1994). Naj bo a največje napisano število, b in c pa števili tik pred njim. Potem je $a = |b-c|$ in velja $a = b-c$ ali pa $a = c-b$. V prvem primeru dobimo, da je $c = 0$ (sicer bi bil b večji od a), v drugem pa, da je $b = 0$. Torej se nekje pojavita zaporedoma a in 0. Če ta premislek nadaljujemo, dobimo: $\ldots\ a,\ a,\ 0,\ a,\ a,\ 0\ldots$ V krogu se nekajkrat ponovijo trojice $a,\ a,\ 0$, zato je število stolov deljivo s 3.

3. Ugotovimo, da je $x < z$ in $y < z$ ter $x \neq y$. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da je $x < y$. Dobimo: $x^n = z^n - y^n = (z-y)(z^{n-1} + z^{n-2}y + \ldots + y^{n-1}) >$

$ny^{n-1} > y^n$. Dokaz je tako sklenjen, kajti dobili smo $x^n > y^n$, kar je v nasprotju s predpostavko $x < y$.

4. Kot $\sphericalangle ASD$ je dvakrat večji od kota $\sphericalangle ABD$, saj sta to kota nad istim lokom $\widehat{AD}$ kroga s središčem S. Po drugi strani pa sta $\sphericalangle ASD$ in $\sphericalangle ACD$ obodna nad istim lokom kroga, očrtanega trikotniku SAC, zato sta enaka. Odtod pa sledi, da sta $\sphericalangle CDB$ in $\sphericalangle CBD$ enaka, trikotnik DBC je enakokrak in $\overline{CD} = \overline{CB}$.



Tretji letnik

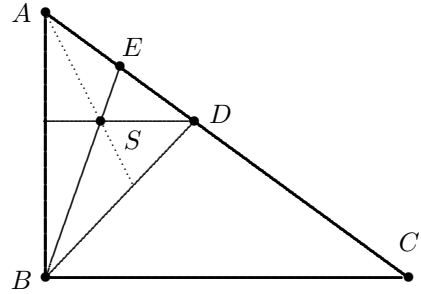
1. Naj bo $2n + 1 = a^2$ in $3n + 1 = b^2$. Potem je $a = 2k + 1$, saj je kvadrat sodega števila sodo število. Od tod dobimo, da je $n = 2k(k + 1)$, torej je n deljiv s 4 in zapišemo $n = 4m$. Ker je $b^2 = 6m + 1$, je tudi b liho število: $b = 2h + 1$. Sledi, da je $3m = h(h + 1)$, torej je m deljiv z 2 in tako je n deljiv z 8.

   Ker je n sod, lahko pišemo $n = 10r + s$, pri čemer je $s \in \{0, \pm 2, \pm 4\}$. Če bi bil $s = \pm 2$, bi bila zadnja števka enega od števil a^2 ali b^2 enaka 7, če bi bil $s = \pm 4$, pa bi bila zadnja števka enega od števil a^2 ali b^2 enaka 3. Noben od teh primerov ni možen, saj je zadnja števka kvadrata lahko le 1, 4, 5, 6 ali 9. Torej je $s = 0$, n je deljiv tudi s 5, zato je n deljiv s 40.

2. Ker sta funkciji $\cos(\sin x)$ in $\sin(\cos x)$ sodi in periodični s periodo 2π, je dovolj, da dokažemo to trditev za interval $[0, \pi]$. Opazimo, da je $\sin(x) + \cos(x) = \sin(x) + \sin(\frac{\pi}{2} - x) = 2\sin(\frac{\pi}{4})\cos(x - \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2} < \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$, torej velja $0 \leq \sin x < \frac{\pi}{2} - \cos x < \frac{\pi}{2} + 1 < \pi$ in ker je funkcija kosinus na intervalu $[0, \pi]$ padajoča, takoj dobimo $\cos(\sin x) > \cos(\frac{\pi}{2} - \sin x) = \sin(\cos x)$.

3. Če so x_1, x_2 in x_3 ničle polinoma $x^3 + ax^2 + bx + c$, se z Vietovimi formulami zlahka prepričamo, da so x_1x_2, x_2x_3 in x_3x_1 ničle polinoma $x^3 - bx^2 + acx - c^2$. Odtod sledi trditev v nalogi.

4. Označimo z E razpolovišče daljice AD in z S presečišče težiščnice iz B in višine iz D. Zaradi $SD \parallel BC$ je $\overline{BS} : \overline{SE} = \overline{CD} : \overline{DE}$. Iz $\overline{AE} = \overline{ED}$ in $\overline{AB} = \overline{CD}$ pa sledi $\overline{AB} : \overline{AE} = \overline{BS} : \overline{SE}$. Torej je AS simetrala kota pri A trikotnika ABE in leži zato S na simetrali kota pri A trikotnika ABD.



Četrti letnik

1. Označimo $a = f(0)$. Očitno je $a \neq 0$. Če je $a > 0$, je:

$$\begin{array}{rcl} f(0) &=& a \\ f(1) &=& a+1 \\ &\vdots& \\ f(a) &=& 2a \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f(a) &=& 1 \\ f(a+1) &=& 2 \\ &\vdots& \end{array}$$

od koder dobimo, da je $2a = 1$, kar očitno ni res. Če je $a < 0$, pa je:

$$\begin{array}{rcl} f(a) &=& 1 \\ f(a+1) &=& 2 \\ &\vdots& \\ f(0) &=& 1-a \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f(1) &=& a+1 \\ f(2) &=& a+2 \\ &\vdots& \end{array}$$

od koder dobimo, da je $a = 1 - a$ oziroma $2a = 1$, kar spet ni res. V obeh primerih smo dobili protislovje, torej taka funkcija ne obstaja.

2. Če postavimo nad ničlo število a, je nad njim $2a$. Postavimo desno od $2a$ še b, pa imamo pod njim $2b-74$. Ker imamo v vseh vrsticah in vseh stolpcih aritmetična zaporedja, mora veljati $(2b-74)-a = 103-(2b-74)$ in $b+3\cdot(b-2a) = 186$, ti dve enačbi pa dasta $a = 13$ in $b = 66$. Preostane nam še, da tabelo dopolnemo.

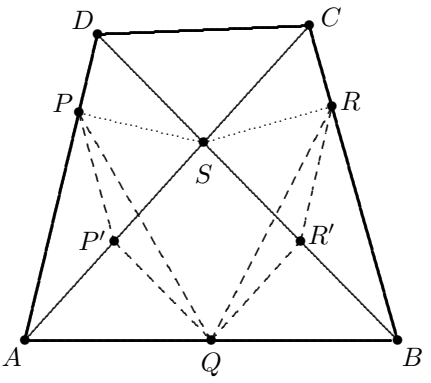
52	82	112	142	172
39	74	109	144	179
26	66	106	146	186
13	58	103	148	193
0	50	100	150	200

3. Naj bo $a_n = \overbrace{4\ldots4}^{n}\overbrace{8\ldots8}^{n-1}9$. Potem je

$$\begin{aligned} a_n &= 4\tfrac{10^{2n}-1}{9} + 4\tfrac{10^n-1}{9} + 1 = \\ &= \tfrac{1}{9}(4\cdot 10^{2n} + 4\cdot 10^n + 1) = \\ &= (\tfrac{2\cdot 10^n+1}{3})^2. \end{aligned}$$

Ker je vsota števk števila $2\cdot 10^n + 1$ enaka 3, je to število deljivo s 3, in je a_n res popoln kvadrat.

4. Označimo s P' in R' razpolovišči daljic AS oziroma BS. Potem je $AS \parallel QR'$ in $BS \parallel QP'$ in je zato štirikotnik $P'QR'S$ paralelogram. Sledi: $\overline{P'S} = \overline{QR'}$, $\overline{QP'} = \overline{R'S}$ in $\sphericalangle QP'S = \sphericalangle QR'S$. Ker je trikotnik ASP pravokoten, je P' središče temu trikotniku očrtane krožnice in je zato $\overline{PP'} = \overline{P'S}$. Analogno je $\overline{RR'} = \overline{R'S}$.



Zaradi tetivnosti štirikotnika $ABCD$ je $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC$ in sta zato trikotnika ASP in BSR podobna. Torej je $\sphericalangle PP'S = \sphericalangle RR'S$ in nadalje $\sphericalangle QP'P = \sphericalangle QR'R$. Naloga je tako rešena, saj sta zaradi $\overline{PP'} = \overline{QR'}$ in $\overline{P'Q} = \overline{R'R}$ trikotnika $PP'Q$ in $QR'R$ skladna.