TRETJI LETNIK — 1993–1994 – 4

LOGIKA

&

RAZVEDRILNA MATEMATIKA

Revijo sta za splet pripravila Nada in Marko Razpet
na podlagi datotek, ki jih je izdelal Darjo Felda.

Drage bralke in bralci!

Skupaj s to številko ste prejeli tudi položnico ali račun za naročnino za drugo polletje šolskega leta 93/94. Prosimo vas, da s plačilom ne zamujate preveč. Cena ene številke bo še naprej 3 DEM + prometni davek.

Izidor Hafner

V S E B I N A

Logične naloge 3
Rešitve logičnih nalog 8
Šola logike – Dve logični uganki 10
Logika po svetu: The Lie Detective 10
Matematične naloge 16
Številske križanke 18
Rešitve številskih križank 21
Šolsko tekmovanje v znanju matematike za srednješolce 21
Matematičko-fizički list – izvanredni broj (E) 35
International Mathematical Talent Search 42
Angleške naloge za srednješolce 43
Angleške naloge za osnovnošolce 45
Občinsko matematično tekmovanje na Hrvaškem 48
Državno tekmovanje iz matematike na Hrvaškem 51
Šolsko tekmovanje za bronasto Vegovo priznanje 54
28. občinsko tekmovanje za srebrno Vegovo priznanje 56
Rešitve nalog 59
Razvedrilna matematika po svetu 62
Fishergeometric 63

Izdaja: Založniško podjetje LOGIKA d.o.o., Svetčeva 11, 61240 Kamnik,
št. žiro računa: $50140 - 603 - 57434$

Za izdajatelja: Izidor Hafner

Revija *Logika & Razvedrilna matematika* je vpisana v register časopisov pri *Ministrstvu za informiranje* pod registrsko številko *949*. Po mnenju *Ministrstva za informiranje* št. *23/89–92* šteje revija *Logika & Razvedrilna matematika* med proizvode informativnega značaja, za katere se plačuje davek od prometa po stopnji 5%.

Revijo *Logika & Razvedrilna matematika* subvencionira *Ministrstvo za šolstvo in šport*

Člani časopisnega sveta: prof. dr. Frane Jerman, prof. dr. Tomaž Pisanski in Darjo Felda, prof.

Strokovni pokrovitelj: Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko – Oddelek za teoretično računalništvo

Glavni in odgovorni urednik: dr. Izidor Hafner

Sodelavci: Marija Božnar, Jasna Bratanič, Breda Cestnik, Urša Demšar, Gregor Dolinar, Urška Drčar, Petra Ipavec, Alenka Kavčič, Dušanka Kocić, Jana Kristanc, Katka Kurent, Meta Lah, Nina Milač, Nika Novak, Hiacinta Pintar, Maja Pohar, Darja Polak, Tanja Soklič, Mirjana Todorovič, Aleš Vavpetič in Metka Žnidar

Jezikovni pregled: računalniški program *Besana*

Generalni sponzor: Marand d.o.o., zastopstvo Borland

Sponzorji: DZS d.d., Mlacom d.o.o., Mlakar & Co, Časopisno podjetje *Dnevnik*, NIL d.o.o., IR Electronic

Obdelava podatkov na računalniku firme *Mlacom* s programskim paketom PARADOX 3.5

Tisk: Tiskarna "Planprint", Rožna dolina c. IV/32–36, Ljubljana

Ilustrirala: Ana Hafner

Naklada: 2500 izvodov

© 1994 LOGIKA d.o.o.

ISSN $0354 - 0359$

LOGIKA & RAZVEDRILNA MATEMATIKA
letnik *III*, št. 4, 1993/94

Cena revije: v prosti prodaji 300 SIT, za naročnike 250 SIT in vključuje 5% prometni davek

LOGIČNE NALOGE

1. BENEŠKE DRUŽINE

V Benetkah stoji hiša, razdeljena na štiri nadstropja. V vsakem nadstropju živi družina z različnim številom otrok. Ugotovi ime vsakega moža, njegov poklic in povej, koliko otrok ima vsak.

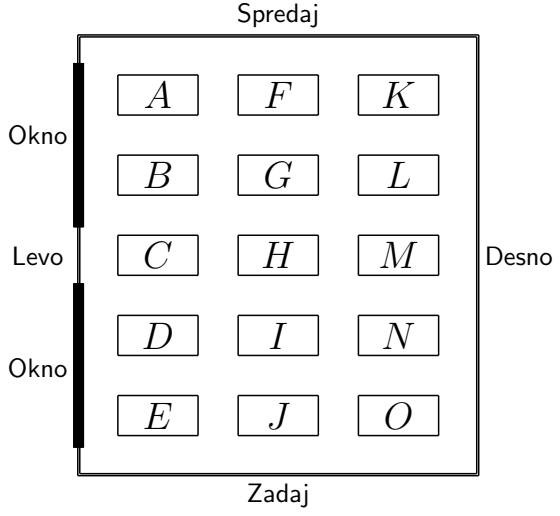
Imena: Lorenzo, Marco, Paolo, Pietro;
Poklic: prodajalec spominkov, gondoljer, pihalec stekla, izdelovalec violin;
Otroci: dva, trije, štirje, pet.

1. Gondoljer živi v pritličju in ima enega otroka manj kot Pietro.
2. Lorenzo, ki ne prodaja spominkov, živi v nadstropju nad družino s petimi otroki.
3. Izdelovalec violin ima sodo število otrok.
4. V najvišjem stanovanju živi Paolo z ženo; tadva nista par s tremi otroki.



2. TEČAJ

Vrtnarija Tulipan je priredila tečaj o vzgoji in negi sobnih rastlin. Ob koncu tečaja je med udeleženci izvedla anketo, kako so bili zadovoljni s tečajem in s katero rastlino bi popestrili svojo delovno mizo.
S pomočjo spodaj navedenih podatkov poskusite ugotoviti, kje je sedel posamezni udeleženec tečaja, katero sobno rastlino je izbral in kako je ocenil tečaj (odličen, povprečen, slab).



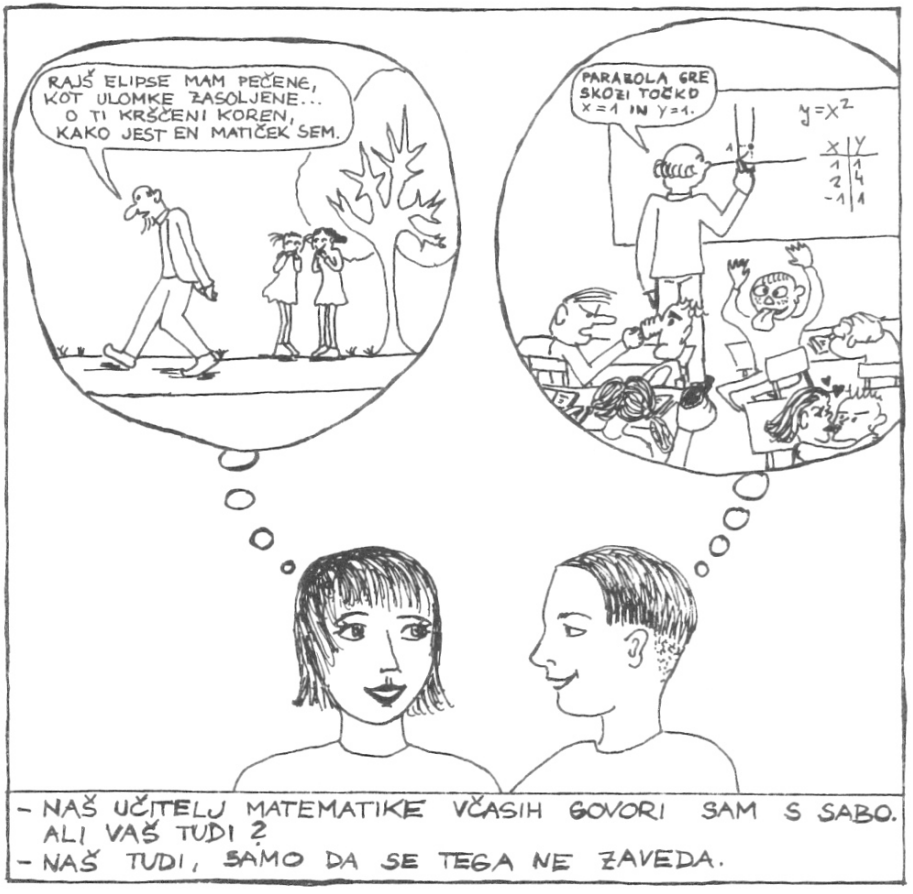
1. Sedeža A in E sta bila prazna.
2. Jasna je sedela na sredini vrste: na njeni levi je sedela oseba, ki je izbrala srebrno zlatenko, na njeni desni pa moški, ki mu je všeč gnezdasti sršaj. Med njo in Cirilo (sedela je poleg osebe, ki obožuje prečudovite rdeče cvetove božične zvezde) je bil en prazen sedež.
3. Hinko se je vsedel pred Emo in za fantom, ki mu je že od mladih nog všeč rajska češnja. David (sedel je na mestu z oznako O) je za svojo delovno mizo izbral kaladij, ki se ponaša s prečudovitimi listi rdeče, zelene in krem barve. Tečaj so slabo ocenile tri osebe, od katerih sta dve omenjeni pod to točko.
4. Takoj za Gregorjem je sedelo dekle, ki so ji všeč elegantni beli cvetovi samolista. Tri najboljše prijateljice pa so sedele v isti vrsti (dekle, ki je izbralo ciklamo, je sedelo na sredini).
5. Oseba, ki ji je všeč flamingovec, (sedela je poleg Fanike) in študent (sedel je pred osebo, ki se je odločila za srebrno zlatenko) sta menila, da je bil tečaj povprečen.
6. Edini udeleženki, ki sta tečaj ocenili kot odličen, sta bili Fanika in Irma. Sedež takoj za Irmo je bil cel tečaj prazen. Levo od nje pa je sedela oseba (všeč so ji napihnjeni cvetovi velecvetnih čeveljčkov), ki je tečaju dala slabo oceno.
7. Tečaj sta obiskovala tudi Anica in Boris. Med izbranimi rastlinami pa so bili tudi klinastolistni laski.

3. MANEKENKE

Na modni reviji so sodelovale štiri manekenke in vsaka je nosila obleko drugačne barve in iz drugačnega materiala. Postavljene so bile na mestih od 1 do 4 (gledano od leve proti desni in z obrazom proti nam). Ugotovi, kje je katera stala, njeno ime in kakšne barve ter iz kakšnega materiala je bila njena obleka!

Imena: Jasna, Lucija, Olga, Renata;
Materiali: bombaž, najlon, svila, volna;
Barve: modra, rdeča, roza, zelena.

1. Renata nosi obleko iz najlona, ki ni roza.
2. Na tretjem mestu stoji Jasna, ki ni oblečena v bombažno obleko.
3. Olga ima na svoji levi manekenko v zelenem, na desni pa manekenko v svili.
4. Jasna ne stoji ob manekenki v modri obleki.



4. ZBIRALEC UMETNIN

Bogat podjetnik Andraž Jugoton si v prostem času prizadeva, da bi dopolnil svojo zbirko umetnin. Ali lahko ugotoviš, katerega meseca lanskega leta in kje je kupil vsako izmed umetnin in koliko je plačal za vsako?

Kraji: London, Madrid, New York, Pariz, Rim;
Umetnine: grški kip, kitajska vaza, Picassojeva slika, Rembrandtova slika, da Vincijeva slika;
Cene: 250.000 $, 300.000 $, 350.000 $, 400.000 $, 500.000 $;
Meseci: marec, maj, julij, september, november.

1. Andraž je za Picassojevo sliko plačal 500.000 $.
2. Umetnina, kupljena v novembru, je stala 50.000 $ več kot umetnina, kupljena v Londonu.
3. Da Vincijeva slika, ki ni stala 400.000 $, je bila kupljena v New Yorku, vendar ne v maju.
4. V juliju je Jugoton kupil kitajsko vazo.
5. Ček za 300.000 $ je bil napisan preprodajalcu v Rimu; Rembrandtovo sliko pa je Andraž kupil kasneje.
6. Jugotonov obisk Pariza v marcu je njegovo zbirko obogatil za novo sliko.
7. Za grško vazo Jugoton ni plačal 350.000 $.

5. DEŽEVNO POPOLDNE

Pet gledalcev sedi na tribuni in gleda tenis. Ker pa pada dež, ima vsak izmed njih dežnik drugačne barve. Prišli so iz različnih krajev. Ugotovi, od kod je kateri izmed gledalcev, kje sedi in kakšen dežnik ima?

Imena: Aljoša, Cene, Herbert, Jelka, Suzana;
Kraji: Trbovlje, Kranj, Naklo, Ptuj, Jesenice;
Barve: črna, modra, rjava, rdeča, rumena;
Sedeži: A, B, C, D, E.

1. Ženska z rumenim dežnikom sedi ob Herbertu, ki prihaja iz Kranja.
2. Aljoša ima moder dežnik.
3. Rdeč dežnik ima moški na sedežu D.
4. Cene sedi bolj desno od gledalca iz Ptuja (če gledamo skico).
5. Na sedežu A sedi Jeseničan.
6. Suzana je dva sedeža bolj desno od osebe s črnim dežnikom (glede na skico).
7. Gledalec iz Nakla, ki ne sedi na sedežu E, ne sedi poleg Jelke.

6. CESTNI ROPARJI

Nekaj let po tem, ko se je skupina cestnih roparjev razšla, jih je vodja Mirči spet hotel sklicati skupaj. Pisal je ostalim petim roparjem, ki pa so tačas že odložili svoje orožje in se lotili poštenega dela. Zato so se vodji Mirčiju opravičili z različnimi opravičili. Poskusi ugotoviti, kakšno delo si je vsak poiskal, kje živi in kakšno opravičilo je poslal Mirčiju!

Imena: Ildefonz, Dragotin, Karel, Lovrenc, Urbalt;
Kraji: Iški vintgar, Kras, Gorjanci, Idrija, Prekmurje;
Izgovori: zlomljena noga, vročina, podirajoča se hiša, brez prevoza, prezaposlenost;
Poklici: gojenje kokoši, pridelovanje sadja, zidarstvo, pilotiranje, inštruiranje.

1. Zidar je živel na Gorjancih.
2. Urbalt je začel gojiti kokoši, vendar se ni opravičil zaradi zlomljene noge.
3. Opravičilo zaradi zlomljene noge ni prišlo iz Krasa.
4. Karel je živel v Iškem vintgarju in ni bil pridelovalec sadja ali pilot.
5. Mož iz Idrije ni mogel priti, ker se mu je podirala hiša. Ildefonz pa se je opravičil zaradi prezaposlenosti.
6. Mož, ki ni mogel priti, ker ni imel prevoza, ni bil Lovrenc in ni gojil piščancev. Lovrenc ni prideloval sadja.
7. Inštruktor se je opravičil, češ da ima vročino.
8. Dragotin ni bil v Prekmurju, kjer ni bil doma pilot.



Rešitve logičnih nalog

1. BENEŠKE DRUŽINE

Nadstropja	Imena	Poklici	število otrok
pritličje	Marco	gondoljer	štirje
prvo nadstr.	Pietro	prodajalec spominkov	pet
drugo nadstr.	Lorenzo	pihalec stekla	trije
tretje nadstr.	Paolo	izdelovalec violin	dva

2. TEČAJ

A: /
B: Boris, rajska češnja, povprečen
C: Hinko, srebrna zlatenka, slab
D: Ema, flamingovec, povprečen
E: /
F: Cirila, velecvetni čeveljčki, slab
G: /
H: Jasna, klinastolistni laski, povprečen
I: Fanika, ciklama, odličen
J: /
K: Irma, božična zvezda, odličen
L: /
M: Gregor, gnezdasti sršaj, povprečen
N: Anica, samolist, povprečen
O: David, kaladij, slab

OBRAZLOŽITEV:

I.) Na sedežu O je sedel David, ki je izbral kaladij (3).

II.a) Iz (1) in (2) lahko zaključimo, da je Jasna sedela na sredini vrste, v kateri so bili vsi trije sedeži zasedeni: na sredini druge, tretje ali četrte vrste. Ker pa je pred osebo, ki je sedela levo od Jasne, sedel študent (5), sedež A v prvi vrsti pa je prazen, je lahko Jasna sedela na sedežu H ali I.

II.b) Predpostavimo, da je Jasna sedela na sedežu I (v četrti vrsti). Potemtakem je bil sedež H prazen, Cirila pa je sedela v drugi vrsti na sedežu G (sledi iz (2)). Tri prijateljice (4) so sedele v drugi vrsti, saj je v prvi, tretji in peti vrsti po en sedež prazen, Jasna pa je sedela poleg vsaj enega moškega. Ker pa ni možno, da bi se Hinko vsedel v skladu s trditvijo (3), je predpostavka, da je Jasna sedela na sedežu I napačna.

II.c) Torej je Jasna sedela na sedežu H, na C je sedela oseba, ki je izbrala srebrno zlatenko, na M pa moški, ki mu je všeč gnezdasti sršaj. Cirila je sedela v prvi vrsti na sedežu F (ker bi v zadnji vrsti sedel poleg nje David, ki je izbral kaladij in ne božično zvezdo), sedež G je bil prazen in na sedežu K je sedela oseba, ki obožuje božično zvezdo.

III.) Tri prijateljice so sedele v četrti vrsti: na sedežu I je sedelo dekle, ki je izbralo ciklame (4). Na sedežu B pa je sedel moški, ki je dal tečaju povprečno oceno (5).

IV.) Če preštejemo vsa imena, lahko ugotovimo, da je tečaj obiskovalo deset ljudi (od tega štirje moški), pet sedežev pa je ostalo praznih: A, E, G, L in J.

V.) Iz (3) lahko zaključimo, da je Hinko sedel na sedežu C, Ema na sedežu D in moški s sedeža B je izbral rajsko češnjo. Na sedežu M je sedel Gregor in za njim (na sedežu N) je sedelo dekle, ki je izbralo samolist (4). Potemtakem je moškemu, ki je sedel na B ime Boris (sledi iz (7) in (IV)).

VI.) Ema, ki je sedela na sedežu D, je izbrala flamingovec in ocenila tečaj kot povprečen (sledi iz

(V) in (5)). Fanika, ki je bila zelo zadovoljna s tečajem, pa je sedela na sedežu I in se odločila za ciklame (iz (III), (5) in (6)).
VII.) Iz (6) sledi, da je Irma, ki je tudi bila zelo zadovoljna s tečajem, sedela na sedežu K. Njena leva soseda (sedež F) Cirila pa se je odločila za velecvetne čeveljčke in dala tečaju slabo oceno. Na sedežu N je sedela Anica, Jasni (sedež H) pa so všeč klinastolistni laski.
VIII.) Dve osebi (izmed štirih omenjenih pod točko (3)), ki sta dali tečaju slabo oceno, sta David in Hinko, saj sta Boris (rajska češnja) in Ema ocenila tečaj kot povprečen (sledi iz (III) in (VI)). Tudi vsi preostali (Jasna, Anica, Gregor) so ocenili tečaj kot povprečen.

3. MANEKENKE

Ime	Barva	Material	Mesto
Lucija	modra	svila	1
Olga	roza	bombaž	2
Jasna	zelena	volna	3
Renata	rdeča	najlon	4

4. ZBIRALEC UMETNIN

Meseci	Kraji	Umetnine	Cene
Marec	Pariz	Picasso	500.000 $
Maj	Rim	grški kip	300.000 $
Julij	London	kitajska vaza	350.000 $
September	New York	da Vinci	250.000 $
November	Madrid	Rembrandt	400.000 $

5. DEŽEVNO POPOLDNE

Sedeži	Imena	Kraji	Barve
A	Aljoša	Jesenice	moder
B	Jelka	Ptuj	rumen
C	Herbert	Kranj	črn
D	Cene	Naklo	rdeč
E	Suzana	Trbovlje	rjav

6. CESTNI ROPARJI

Imena	Poklici	Kraji	Izgovori
Ildefonz	pridelovanje sadja	Prekmurje	prezaposlenost
Dragotin	pilotiranje	Kras	brez prevoza
Karel	inštruiranje	Iški Vintgar	vročina
Lovrenc	zidarstvo	Gorjanci	zlomljena noga
Urbalt	gojenje kokoši	Idrija	podirajoča se hiša

ŠOLA LOGIKE

Dve logični uganki

V tem sestavku bomo rešili dve logični uganki iz knjige R. Smullyana *The lady or the tiger* (A. Knopf, New York, 1982). Slovenski prevod je izšel leta 1989 pri DZS.

Problem 1. Janez in Peter sta brata dvojčka. Janez je zagrešil kaznivo dejanje. Vemo še, da vsaj eden od dvojčkov vedno laže. Sodnik vpraša enega od bratov, ali je Janez. Ta pritrdi in sodnik vpraša enako še drugega. Ta odgovori "DA" ali "NE" in sodnik ve, kateri je Janez. Kateri je torej Janez?

Problem 2. Neki logik je obiskal otok resničnikov in neresničnikov. Srečal je dve osebi: A in B. Vprašal je osebo A, ali sta oba resničnika. A je odgovoril na vprašanje, toda to še ni bilo dovolj, da bi logik ugotovil, kaj sta otočana. Nato je še enkrat vprašal osebo A – tokrat, ali sta oba istega tipa (to je – oba resničnika ali oba neresničnika). Spet je A odgovoril ("DA" ali "NE") in logik je vedel, kaj sta. Kaj sta A in B?

Rešitev prvega problema:

Vpeljimo naslednje oznake:
$P \equiv$ *Prvi vprašani vedno laže.*
$D \equiv$ *Drugi vprašani vedno laže.*
$J \equiv$ *Prvi je Janez.*

Potem $\neg J$ pomeni, da je drugi Janez. Torej se je drugo vprašanje glasilo:"*Ali velja* $\neg J$*?*". Dejstvo, da vsaj eden od bratov vedno laže, zapišemo simbolično $P \vee D$.Če prvi vedno laže, potem je njegov odgovor, da je on Janez, napačen:

$$P \Rightarrow \neg J$$

Za drugega imamo dve možnosti:

$a)$ Da je odgovoril "DA". Potem imamo še $D \Rightarrow J$.

$b)$ Da je odgovoril "NE". Tedaj imamo še $D \Rightarrow \neg J$.

Toda mi ne vemo, ali se je zgodilo $a)$ ali $b)$. Vemo pa, da je sodnik na osnovi podatkov lahko izpeljal, kateri je Janez.

V primeru $a)$ semantično drevo izgleda takole:

$$\begin{array}{c} P \vee D \\ P \Rightarrow \neg J \\ D \Rightarrow J \\ \begin{array}{c|c} P & D \\ \neg J & J \end{array} \end{array}$$

Torej je možno tako J kot $\neg J$. Na osnovi teh podatkov sodnik ne bi mogel izpeljati, kdo je Janez.

V primeru $b)$ drevo izgleda takole:

$$\begin{array}{c} P \vee D \\ P \Rightarrow \neg J \\ D \Rightarrow \neg J \\ \hline P \mid D \\ \neg J \mid \neg J \end{array}$$

Na obeh vejah nastopa $\neg J$. To je, iz $\{P \vee D, P \Rightarrow \neg J, D \Rightarrow \neg J\}$ logično sledi $\neg J$. Simbolično to zapišemo:

$$P \vee D, P \Rightarrow \neg J, D \Rightarrow \neg J \models \neg J$$

Prvi torej ni Janez.

Rešitev drugega problema:

Vpeljimo naslednje oznake:
$A \equiv$ Oseba A je resničnik.
$B \equiv$ Oseba B je resničnik.
$A \wedge B \equiv$ Oba sta resničnika.
$A \Leftrightarrow B \equiv$ Oba sta istega tipa.

Recimo, da je odgovor na prvo vprašanje "NE". Potem imamo

$$\begin{array}{c} A \Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \\ \hline A \mid \neg A \\ \neg(A \wedge B) \mid A \wedge B \\ \hline \neg A \mid \neg B \mid A \\ \times \mid \mid B \\ \mid \mid \times \end{array}$$

V tem primeru bi logik vedel, kaj sta, torej je odgovor "DA". Recimo, da je odgovor na drugo vprašanje tudi "DA":

$$\begin{array}{c} A \Leftrightarrow A \wedge B \\ A \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B) \\ \hline A \mid \neg A \\ A \wedge B \mid \neg(A \wedge B) \\ B \mid \neg A \mid \neg B \\ \mid \neg(A \Leftrightarrow B) \mid \neg(A \Leftrightarrow B) \\ \mid A \mid \neg A \mid \neg A \mid A \\ \mid \neg B \mid B \mid B \mid \neg B \\ \mid \times \mid \mid \times \mid \times \end{array}$$

Še vedno imamo dve možnosti $\{A, B\}$ oziroma $\{\neg A, B\}$. Odgovor na drugo vprašanje je "NE".

$$
\begin{array}{c}
A \Leftrightarrow A \wedge B \\
A \Leftrightarrow \neg(A \Leftrightarrow B)
\end{array}
$$

A			$\neg A$	
$A \wedge B$			$\neg(A \wedge B)$	
B			$\neg A$	$\neg B$
$\neg(A \Leftrightarrow B)$			$A \Leftrightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
A	$\neg A$		$\neg B$	$\neg A$
$\neg B$	B			
$\times$	$\times$			

Imamo eno samo možnost za resničnost podatkov: $\{\neg A, \neg B\}$.

LOGIKA PO SVETU: The Lie Detective

With a twinge od apprehension such as he had never felt before, an anthropologist named Abercrombie stepped onto the Island of Knights and Knaves. He knew that this island was populated by most perplexing people: knights, who make only true statements, and knaves, who make only false ones. "*How*," Abercombie wondered, "*am I ever to learn anything about this island if I can't tell who is lying and who is telling the truth?*"

Abercrombie knew that before he could find out anything he would have to make one friend, someone whom he could always trust to tell him the truth. So when he came upon the first group of natives, three people, presumably named Arthur, Bernard, and Charles, Abercrombie thought to himself, "*This is my chance to find a knight for myself.*" Abercrombie first asked Arthur, "*Are Bernard and Charles both knights?*" Arthur replied, "*Yes.*" Abercrombie then asked: "*Is Bernard a knight?*" To his great surprise, Arthur answered: "*No.*" Is Charles a knight or a knave?

Abercrombie knew that he must first determine what type (knight or knave) Arthur and Bernard are. Arthur is obviously a knave, since no knight would claim that Bernard and Charles are both knights yet deny that Bernard is a knight. Therefore both of Arthur's answers were lies. Since he denied that Bernard is a knight, Bernard really is a knight. Since he affirmed that both Bernard and Charles are knights, it is false that they are both knights; at least one of them must be a knave. But Bernard is not a knave (as we have proved), therefore, Charles must be a knave.

Abercrombie was then informed by one of the three he knew to be a knight that the island had a sorcerer.

"*Oh, good!*" Abercrombie exclaimed. "*We anthropologists are particularly interested in sorcerers, witch doctors, medicine men, shamans and the like. Where do I find him?*"

"*You must ask the King,*" came the reply.

Well, the anthropologist was able to obtain an audience with the King and told him that he wished to meet the Sorcerer.

"*Oh, you can't do that,*" said the King, "*unless you first meet his apprentice. If the Sorcerer's Apprentice approves of you, then he will allow you to meet his master; if he doesn't, then he won't.*"

"*The Sorcerer has an apprentice?*" asked the anthropologist.

"*He certainly does!*" replied the King. "*There is a famous musical composition about him – I believe the composer was Dukas. Anyway, if you wish to meet the Sorcerer's Apprentice, he is now at his home, which is the third house on Palm Grove. At the moment he is entertaining two guests. If, when you arrive, you can deduce which of the three present is the Sorcerer's Apprentice, I believe that will impress him sufficiently that he will allow you to meet the Sorcerer. Good luck!*"

A short walk brought the anthropologist to the house. When he entered, there were indeed three people present.

"*Which of you is the Sorcerer's Apprentice?*" asked Abercrombie.

"*I am*," replied one.

"*I am the Sorcerer's Apprentice!*" cried a second.

But the third remained silent.

"*Can you tell me anything?*" Abercrombie asked.

"*It's funny*," answered the third with a sly smile. "*At most, only one of the three of us ever tells the truth!*"

Can it be deduced which of the three is the Sorcerer's Apprentice?

Here is how the anthropologist reasoned: If the third one is a knave, then his statement is false, which means, that at least two of them are knights. But the first and the second guests cannot both be knights, since their statements conflict. Therefore the third guest cannot be a knave; he must be a knight. This means his statement is true: he is the only knight present. Since the other two are knaves, their claims are both false; hence neither of them is really the Sorcerer's Apprentice. Ergo, it must be the third one.

The Apprentice was delighted with Abercrombie's reasoning and informed him that he could meet the Sorcerer. "*He is now upstairs in the tower conferring with the island Astrologer*," said the Apprentice. "*You may go up and interview them if you like, but please knock before entering.*"

The anthropologist went upstairs, knocked on the door, and was bidden to enter. When he did, he saw two very curious individuals, one wearing a green conical hat and the other a blue one. He could not tell from their appearance which was the Sorcerer. After introducing himself he asked, "*Is the Sorcerer a knight?*" The one in the blue hat answered the question (he answered either *yes* or *no*), and the anthropologist was able to deduce which was the Sorcerer. Which one was the Sorcerer?

This type of puzzle is very different from the preceding two; it is a metapuzzle, for the reader is not given all the pieces of the puzzle but information about the process of solving the puzzle. The reader, in other words, is not told what answer was given by the man in the blue hat; nevertheless he is told that the anthropologist could solve the puzzle after getting an answer; it is this information that is vital.

Let us see how this sort of puzzle works: Suppose the man in the blue hat answered *yes*; could the anthropologist then have known which one was the Sorcerer? Certainly not; the man who answered could be a knight, in which case all that would follow is that the Sorcerer is a knight; but the two might both be knights and either one could be the Sorcerer. Or again, the man who answered could be a knave, in which case the Sorcerer is a knave and could be either of the two (as far as the anthropologist could know). So if *yes* was the answer, the anthropologist could not have deduced which man was the Sorcerer. But we are given that the anthropologist did deduce which was the Sorcerer; therefore, he must have gotten the answer *no*.

Now we know that the speaker (the one with the blue hat) answered *no*. If the speaker is the knight, his answer was truthful; hence the Sorcerer is really not a knight. And since the speaker is a knight, then he is not the Sorcerer. On the other hand, if the speaker is a knave, his answer was a lie, which means that the Sorcerer must be a knight; hence, again, the speaker cannot be the Sorcerer. This proves that a *no* answer indicates that

the speaker is not the Sorcerer, regardless of whether the answer was the truth or a lie. And so the man in the blue hat must be the Astrologer and the one in the green hat must be the Sorcerer.

In summary, a *no* answer proves that the man in the green hat is the Sorcerer, whereas a *yes* answer proves nothing at all. Since the anthropologist was able to deduce the Sorcerer's identity, he must have gotten a *no* answer and deduced that the man in the green hat was the Sorcerer.

While the anthropologist had deduced which one was the Sorcerer, he did not yet know whether the Sorcerer was a knight or a knave. With one more question he discovered that the Sorcerer was a knight and the Astrologer a knave. And the Astrologer, a bit embarassed, arose and left, saying:"*According to the planetary configurations, I should be home now.*"

"*Those astrologers,*" said the Sorcerer with a laugh, "*humbugs every one of them. Now, with me it is different; my sorcery is real.*"

"*To tell you the truth,*" said Abercrombie, "*I am rather skeptical about the existence of magic.*"

"*Oh, you don't understand,*" said the Sorcerer. "*My sorcery doesn't use magic – though it seems to those around here that it does. My sorcery involves the clever use of logic. With my logic I am constantly fooling these fellows.*"

"*Can you give me an example?*" asked Abercrombie.

"*Why certainly. Are you a betting man?*"

"*Occasionally,*" replied Abercrombie with some caution.

"*Oh, it doesn't have to be a large bet; we'll wager just one copper coin. I will ask you a question to which you must answer yes or no. Even though the question has a definite correct answer, I'll wager that you will be powerless to give it. Anybody but you might be able to give the correct answer, but you cannot. In fact it will be logically impossible for you to give the correct answer, even though the question has one. Doesn't this sound like sorcery?*"

"*It certainly does,*" replied Abercrombie, who was enormously intrigued. "*I'll take the bet – mainly because I'm so curious. What question do you have in mind?*"

The Sorcerer then asked Abercrombie a *yes* or *no* question that definitely had one and only one correct answer. And Abercrombie soon realized, to his surprise and amusement, that the Sorcerer was right. It was logically impossible for him to give the correct answer, even though he knew what it was. Can you guess what question the Sorcerer asked?

The Sorcerer asked Abercrombie, "*Will you answer no to this question?*" If Abercrombie were to answer *no*, he would be denying that *no* is his answer; hence he would be wrong. If he were to answer *yes*, then he would be affirming that *no* is his answer; hence he would again be wrong. Thus it is logically impossible for Abercrombie to give the correct answer.

Clever, these sorcerers!

Predstavljeno je uvodno poglavje iz knjige R. Smullyana *Satan, Cantor, and Infinity*, katere slovenski prevod je izšel leta 1995.

MATEMATIČNE NALOGE

1. Kmet Kranjc ima tri rožnate, štiri bele in eno črno svinjo. Koliko svinj lahko reče, da je iste barve, kot katera druga svinja na Kranjčevam posestvu?

2. Tomažev stari oče je le šest let starejši od njegovega očeta. Kako je to mogoče?

3. Janez in Tomaž sta našla zapuščen dolg jašek, ki je ravno dovolj širok, da se ena oseba lahko splazi skozi. Fanta gresta v jašek iz nasprotnih koncev. Ali je mogoče, da fanta preplazita celotno dolžino jaška in prideta ven na nasprotnih straneh?

4. Koliko je 1 krat 2 krat 3 krat 4 krat 5 krat 6 krat 7 krat 8 krat 9 krat 0?

5. Kmet ima 17 ovac. Vse razen 9 poginejo. Koliko ovac še ima kmet?

6. Koliko je dvakrat polovica od 987654?

7. Peter je 20 minut hodil ob hudem nalivu, ne da bi zmočil en sam las. Kako je to mogoče, če ni imel dežnika in ni nosil pokrivala?

8. Dvanajst znamk za 1 tolar tvori *ducat*. Koliko znamk za 4 tolarje tvori ducat.

9. Harmonika stane tisočak več kot svinčnik. Skupaj staneta 1100 tolarjev. Koliko stane harmonika?

10. Imaš košaro s 13 jabolki. Iz nje vzameš 3 jabolka. Koliko jabolk še imaš?

11. Kuharici se je odlomil okrasek na prstanu in padel v kavo. Kako je mogoče, da se pri tem ni zmočil?

12. Zgodilo se je nekega dne stoletja nazaj. Alkemist je prinesel kralju majhno stekleničko in dejal:"*Tekočina v tej steklenički je tako močna, da v momentu razkroji vse, česar se dotakne.*" Kako je kralj vedel, da alkemist laže?

13. "*Rojena sva istega dne in istega leta,*" je dejal Peter. "*In imava iste starše,*" je dodal Pavel. "*Vendar nisva dvojčka,*" je končal Peter.
Kako je to mogoče?

14. "*Garantiram,*" je dejal prodajalec, "*da bo tale papiga ponovila vsako besedo, ki jo bo slišala.*" Kupec je plačal za papigo, doma pa ugotovil, da papiga ne zna niti besede. Kljub temu je bilo res, kar je dejal prodajalec. Kako to?

15. Tone je ugasnil luč v spalnici in uspel priti v posteljo, še preden je bila tema, čeprav je postelja oddaljena od stikala tri metre. Kako je to mogoče?

16. Zakaj frizerji v New Yorku raje ostrižejo deset debelih moških kot enega suhega?

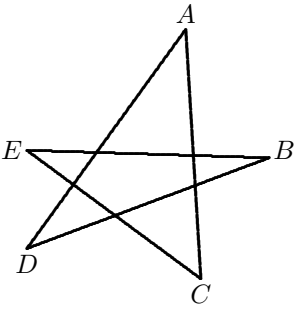
17. Kako naj Klemen in Tina podelita velik kos torte tako, da bosta oba prepričana, da sta dobila vsaj polovico?

18. Tolarski in pettolarski kovanci so položeni kot prikazuje slika. Naloga je, da zamenjaš položaje kovancev v natančno osmih potezah. Dovoljeni sta dve vrsti potez:

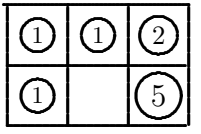
1. Premik kovanca na sosednje prazno mesto.
2. Skok preko sosednjega kovanca na prazno mesto.



19. Imamo petokrako zvezdo in štiri žetone. Postavi prvi žeton na katerokoli označeno točko zvezde in ga premakni po ravni črti v drugo označeno točko. Nato vzemi drugi žeton in ga postavi na prazno mesto, potem pa ga po ravni črti premakni na prazno mesto. Enako naredi s preostalima žetonoma. Ali je to mogoče?



20. Tokrat moraš zamenjati kovanca za dva in pet tolarjev. Dovoljena poteza pa je pomik kovanca na prazno sosednje polje, to je levo ali desno, gor ali dol, ne pa diagonalno.



Rešitve matematičnih nalog

1. Nobena, saj svinje ne govorijo. Kaj pa če bi se vprašanje glasilo: *koliko svinj je iste barve, kot katera druga na posestvu?*

2. Tomažev stari oče je oče njegove mame.

3. Da, če ne gresta hkrati v jašek.

4. 0 **5.** 9 **6.** 987654 **7.** Peter je popolnoma plešast. **8.** 12 **9.** 1050 SIT **10.** 13

11. 1. odgovor: šlo je za kavo v prahu.
2. odgovor: vprašanje se nanaša na obroček, ki je seveda ostal na prstancu.

12. Tekočina ni razkrojila stekleničke.

13. Če ne lažeta, sta lahko dva med trojčki...

14. Šlo je za gluho papigo.

15. Luč je ugasnil, ko se še ni znočilo.

16. Ker zaslužijo 10 krat več denarja.

17. Eden od njiju naj vzame nož in prereže kos, tako da bo prepričan, da sta oba dela enaka. Nato naj drugi izbere kos, za katerega meni, da je večji, oziroma kateregakoli, če meni, da sta enaka.

18. Poteze so: premik kovanca za 1 SIT, skok kovanca za 5 SIT preko kovanca za 1 SIT, premik kovanca za 5 SIT, skok kovanca za 1 SIT preko kovanca za 5 SIT, skok drugega kovanca za 1 SIT preko drugega kovanca za 5 SIT, premik kovanca za 5 SIT, skok kovanca za 5 SIT preko kovanca za 1 SIT, premik kovanca za 1 SIT.

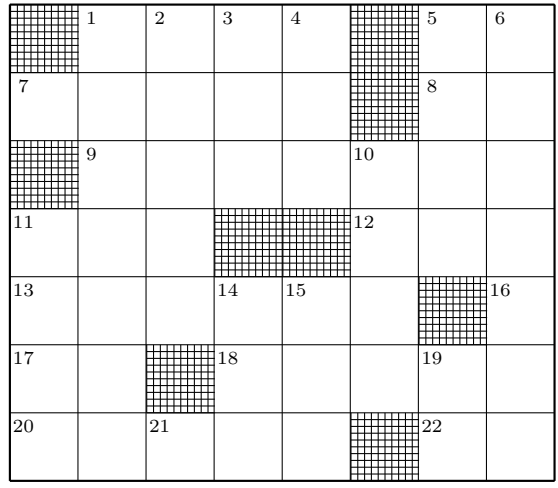
19. Skrivnost: Prvi žeton postavimo na katerokoli točko in ga premaknemo v drugo točko. Nato vsak naslednji žeton postavimo na zvezdo tako, da ga nato premaknemo na mesto, kjer je bil predhodni žeton pred svojim premikom.

20. Obstaja rešitev v 17 potezah.

ŠTEVILSKE KRIŽANKE

V križankah nastopajo naravna števila, nobeno se ne začne z 0.
Palindrom: število, ki se bere z obeh strani enako.
Anagram: število, ki vsebuje iste števke kot neko drugo, vendar ne nujno v istem vrstnem redu.

1



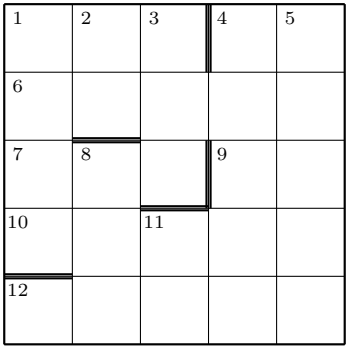
Vodoravno

1. kub števila
5. večkratnik števila 9
7. kub, katerega vsota posameznih števk je 26
8. vsota števk števila je 12
9. obrnjena četrta potenca
11. večkratnik praštevila
12. obrnjen kvadrat
13. število, sestavljeno iz kvadrata in njegove zrcalne slike
16. sodo število
17. Dvakratnik razlike med $8V$ in $5V$
18. četrta potenca števila
20. obrnjen kub
22. druga števka je trikratnik prve

Navpično

1. četrta potenca števila
2. kub števila
3. kvadrat števila
4. kvadrat števila
5. kub števila
6. četrta potenca števila
7. praštevilo
10. kvadrat števila, manjšega od 55
11. kvadrat števila, manjšega od 55
14. tretja števka je vsota prvih dveh
15. večkratnik števila 5
19. število z enakima števkama
21. praštevilo

2



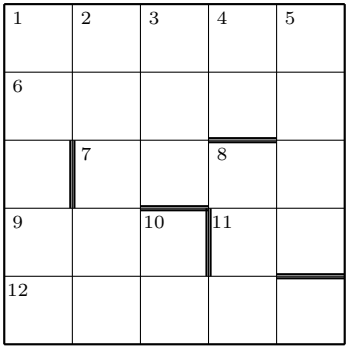
Vodoravno

1. Kub
4. Vsota števk $10V$ minus 3
6. Vsota števk je enaka $4V$
7. Produkt dveh kvadratov
9. Večkratnik števila 15
10. Različne števke
12. Razlike med sosednjima številkama so enake

Navpično

1. Razlike med sosednjima številkama so enake
2. Praštevilo
3. Produkt števk $5N$
4. Produkt števk je enak produktu števk $6V$
5. Vsota števk je $11N$ plus 4
8. Palindrom
11. Praštevilo

3



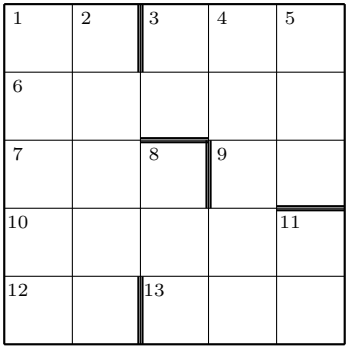
Vodoravno

1. Število, nato njegov kvadrat
6. Razlike med sosednjima številkama so enake
7. Enakomerno padajoče številke
9. Kvadrat polovice prvih dveh števk $8N$
11. Kvadrat
12. Prve štiri številke so anagram četrte potence zadnje številke

Navpično

1. $1V$ plus $10N$ plus 10
2. Vsota števk ni enaka vsoti števk $1N$
3. Kub
4. Delitelj števila $1N$
5. Število, nato njegov kub
8. Večkratnik druge številke $1V$
10. Število ni kvadrat

4



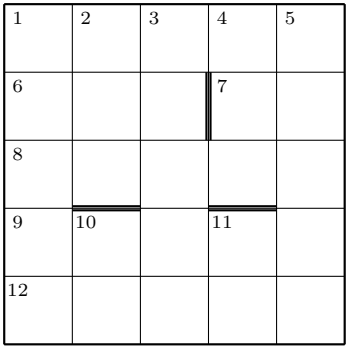
Vodoravno

1. Vsota števk $6V$
3. Produkt števk $4N$
6. Različne števke
7. Produkt števk je enak produktu števk $4N$
9. Vsota števk $2N$ plus kvadrat ene izmed števk $2N$
10. Razlike med sosednjima številkama so enake
12. Produkt števk $1V$
13. Produkt dveh kvadratov (nobeden ni 1)

Navpično

1. Različne števke
2. Razlike med sosednjima številkama so liha števila
3. Večkratnik vsote števk $10V$
4. Različne števke
5. Kub
8. Anagram kuba
11. Praštevilo

5



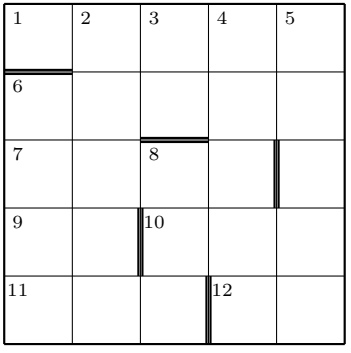
Vodoravno

1. Dva kvadrata, njuna vsota je manjša od 1000
6. Kub korena $11N$ plus 300
7. Kvadrat
8. Različne števke
9. Vsota števk je za 3 manjša od vsote števk $8V$
12. Število je za 40 večje kot produkt $2N$ in $11N$

Navpično

1. Produkt prvih dveh števk je enak vsoti zadnjih treh
2. Naraščajoče števke
3. Palindrom
4. Kvadrat
5. Enakomerno padajoče števke
10. Tretjina kvadrata
11. Različni števki

6



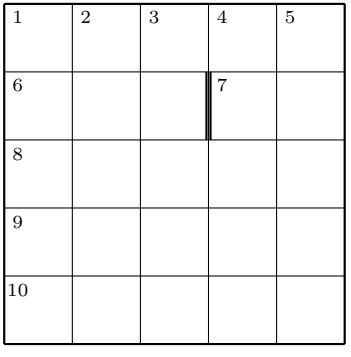
Vodoravno

1. Dva kvadrata, nobeden ni večji od 1000
6. Razlike med sosednjima števkama so enake
7. Kub
9. Dve števki
10. Obrat kvadrata
11. Kub
12. $5N$ deljeno z $8N$

Navpično

2. Palindrom
3. $12V$ plus razlika med sosednjima števkama $6V$
4. Vsota števk se niti za 7 niti za 9 ne razlikuje od vsote števk $1V$
5. Produkt števk $8N$ in $12V$
6. Vsota števk je 27
8. Kvadrat

7



Vodoravno

1. Razlika med sosednjima števkama narašča, najmanjša ni 0
6. Kvadrat
7. Tretjina $6V$
8. $5N$ minus $3N$
9. Produkt števk je enak $6V$
10. Produkt števk je enak $6V$

Navpično

1. Zaporedna praštevila
2. Produkt prvih treh števk je dvakrat večji od vsote zadnjih dveh
3. Tretja in četrta števka ne tvorita kvadrata
4. Prvi dve števki sestavljata produkt zadnjih dveh
5. $8V$ plus $3N$

Rešitev številskih križank

1

	6	8	5	9		5	4
1	7	5	7	6		8	4
	6	1	6	1	1	3	7
1	5	8			9	2	5
3	2	4	4	2	3		4
6	0		5	0	6	2	5
9	1	3	9	5		2	6

Obrazložitev:

1. Pod $7V$ leži petmestni kub, katerega vsota števk je 26 in je prva števka praštevilo (sledi iz $7N$). Možnosti so naslednje: 17576, 32768 in 54872.

a) vzemimo 54872
– $2N$ leži kub, ki ima drugo števko 8: 68921
– $1N$ pa je sedemmestna četrta potenca števila z drugo števko 4: 3418801 ali 4477456
Ker pa ne obstaja štirimestni kub ($1V$), ki bi se začel s števkama 36 ali 46, število 54872 ni pravo.

b) vzemimo 32768
– $1N$ leži 6250000
– $1V$ 6859
Tudi rešitev 32768 ni prava, saj ne obstaja petmestni kub ($2N$), ki bi se začel s števkama 87. Potemtakem leži pod $7V$ število 17576.

2. $2N$ je lahko 15625 ali pa 85184. Recimo, da je 15625. Potem je $1V$ 2197, pod $1N$ pa leži sedemmestna četrta potenca s prvima števkama 27. Ker takšnega števila ni, 15625 ni prava rešitev. Torej leži 85184 pod $2N$.

3. $1V$ je 6859, $1N$ 6765201, $3N$ je 576, $4N$ 961 in $9V$ leži obrnjeno število 7311616 (četrta potenca števila 52), t.j. 6161137. $22V$ je 26 in $19N$ 22.

4. Ker je druga števka $17V$ enaka 0 ($17V$ leži dvakratnik razlike med $8V$ in $5V$), morata biti prvi dve števki pod $6N$ enaki, tretja števka pa je 7 (točka 3). Rešitev je število 4477456.

5. $5V$ je 54, $5N$ 5832, $12V$ 927 (obrnjen kvadrat 729) in $10N$ 1936. $13V$ je 324423, $17V$ pa 60. $11N$ je 1369, $18V$ 50625 in $14N$ 459.

6. $15N$ je večkratnik števila pet: 205, saj $20V$ (obrnjen kub) ne dopušča števila 200 (prva števka ne more biti 0). $20V$ pa je število 91395.

2

2	1	6	1	5
2	1	7	4	1
2	2	5	1	5
2	5	1	7	3
9	2	9	2	9

3

1	5	2	2	5
5	3	1	3	1
2	8	6	4	2
4	4	1	2	5
9	6	4	0	8

4

2	6	4	3	2
5	3	8	9	1
6	8	9	8	6
4	3	2	1	2
1	2	7	2	9

5

1	2	1	1	6
6	4	3	2	5
3	8	0	1	4
2	1	3	4	3
1	2	1	9	2

6

7	2	9	8	1
8	7	6	5	6
4	9	1	3	0
8	7	6	7	5
7	2	9	9	5

7

7	2	8	1	9
1	4	4	4	8
1	3	8	7	6
1	9	1	2	8
3	3	2	1	8

Šolsko tekmovanje v znanju matematike za srednješolce

Naloge, ki jih objavljamo, so bile v tem šolskem letu na šolskem tekmovanju. Sklop nalog za posamezen letnik naj bi reševali 90 minut. Prav vam bodo prišle kot trening za naslednja tekmovanja in tudi za zaključni izpit, rešujte pa brez uporabe tablic ali kalkulatorja.

Prvi letnik

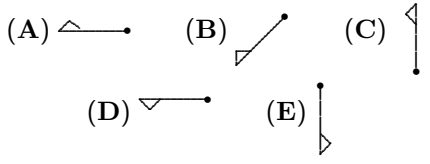
1. Polovica od $99\frac{1}{2}$ je

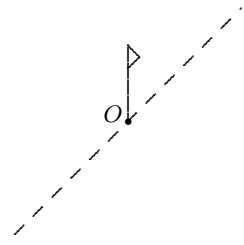
   (A) $45\frac{1}{4}$ **(B)** $45\frac{3}{4}$ **(C)** $49\frac{1}{4}$ **(D)** $49\frac{1}{2}$ **(E)** $49\frac{3}{4}$

2. Janez je 8 cm višji od Petra. Miha je 12 cm nižji od Janeza. Peter je visok 125 cm. Kako visok je Miha (v cm)?

   (A) 129 **(B)** 121 **(C)** 105 **(D)** 113 **(E)** 145

3. Zastavico najprej zavrtimo za 180° okrog točke O, nato pa zrcalimo preko črtkane črte. Katera od možnosti prikazuje pravo končno lego zastavice?





4. Kalkulator pokaže, da je $\frac{1}{3}$ enako 0.3333333. Koliko bo pokazal za $\frac{1}{30}$?

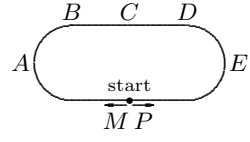
   (A) 00.333333 **(B)** 0.3030303 **(C)** 0.3333333
   (D) 0.0303030 **(E)** 0.0333333

5. Koliko števil med 1 in 100 vsebuje števko 5?

   (A) 10 **(B)** 15 **(C)** 19 **(D)** 20 **(E)** 25

6. Mitja preteče vsako razdaljo v tretjini časa, ki ga za isto razdaljo potrebuje Peter. Istočasno sta začela teči v nasprotni smeri tekaške steze, kot prikazuje slika. Prvič sta se srečala v

   (A) A **(B)** B **(C)** C **(D)** D **(E)** E



7. Dve mucki sta skupaj ulovili 60 miši. Vemo, da Mica ulovi tri miši v času, ko Maca ulovi dve. Koliko miši je ulovila Maca?

(A) 2 **(B)** 30 **(C)** 24 **(D)** 40 **(E)** 36

8. Kateri od naslednjih približkov je najbližji tvoji starosti, izraženi v sekundah?

(A) $5\,000\,000$ **(B)** $50\,000\,000$ **(C)** $500\,000\,000$
(D) $5\,000\,000\,000$ **(E)** $50\,000\,000\,000$

9. Bena, bina in bona so tri vrste sadja s planeta Ajlmez. Sedem ben tehta enako kot štiri bine in pet bin tehta enako kot šest bon. Če vzamemo po en sadež, potem so od najlažjega do najtežjega po vrsti

(A) bena, bina, bona **(B)** bona, bena, bina **(C)** bina, bona, bena
(D) bina, bena, bona **(E)** bena, bona, bina

10. Za pripravo osmih koščkov peciva potrebujemo 20 dag masla, 30 dag sladkorja in 40 dag moke. Koliko koščkov peciva lahko pripravimo, če imamo 1 kg in 40 dag masla, 1 kg in 50 dag sladkorja ter 1 kg in 60 dag moke?

(A) 40 **(B)** 32 **(C)** 44 **(D)** 56 **(E)** 64

11. Štirikotnik ima lahko štiri prave kote. Največ koliko pravih kotov ima lahko konveksni osemkotnik? (Vsak notranji kot *konveksnega osemkotnika* je manjši od iztegnjenega.)

(A) 6 **(B)** 4 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 8

12. Koliko je parov praštevil oblike x, $2x+1$, če nobeno ni večje od 100?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 7 **(E)** več kot 7

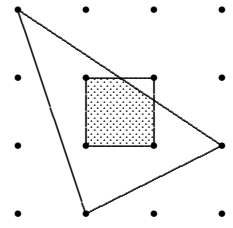
13. Koliko je trikotnikov, ki niso med seboj podobni in v katerih vsak kot meri popoln kvadrat stopinj?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

14. Število 384 lahko zapišemo tudi v obliki $4\overline{2}4$, če si mislimo, da črtica zgoraj pomeni *negativno* števko (tako $4\overline{2}4$ pomeni $4 \cdot 100 - 2 \cdot 10 + 4$). Kako bi zapisali 1993?

(A) $200\overline{7}$ **(B)** $2\overline{1}9\overline{7}$ **(C)** $2\overline{0}07$ **(D)** $209\overline{7}$ **(E)** $2\overline{11}3$

15. Narisane točke so po enoto narazen v vsaki vrstici oziroma stolpcu. Ploščina osenčenega lika (presek trikotnika in kvadrata) meri (v kvadratnih enotah)

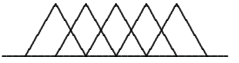


(A) $\frac{9}{10}$ **(B)** $\frac{15}{16}$ **(C)** $\frac{8}{9}$
(D) $\frac{11}{12}$ **(E)** $2\frac{14}{15}$

16. Marko, Iztok, Mitja, Petra in Andrej so bili izvoljeni v odbor za pripravo šolskega tekmovanja. Marko si je prvi izmislil 25 vprašanj. Iztok je hotel biti boljši, zato je pripravil 26 vprašanj. Mitja je nato predstavil 30 vprašanj, za njim pa Petra kar 39. Da bi prekosil vse, si je Andrej izmislil 55 vprašanj. Vsak član odbora je za pripravo posameznega vprašanja porabil pol toliko časa kot tisti, ki je pripravil vprašanja pred njim. Koliko časa so se odborniki trudili, če je Mitja porabil eno uro?

(A) 7 ur 10.5 min. **(B)** 11 ur 34.5 min. **(C)** 7 ur 45 min. **(D)** 2 uri 55 min. **(E)** 5 ur 50 min.

17. Pet enakostraničnih trikotnikov s stranicami, dolgimi po $2\sqrt{3}$, postavimo tako, da ležijo na istem bregu premice. Po ena stranica vsakega trikotnika leži na tej premici, središče stranice enega trikotnika je oglišče naslednjega. Ploščina tistega dela ravnine, ki je pokrit s temi trikotniki, je



(A) 10 **(B)** 12 **(C)** 15 **(D)** $10\sqrt{3}$ **(E)** $12\sqrt{3}$

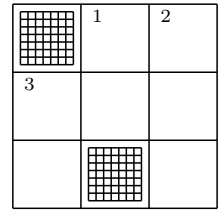
18. Dan je paralelogram $ABCD$ s ploščino 10 in stranicama $\overline{AB} = 3$ in $\overline{BC} = 5$. Na stranicah AB, BC in AD izberemo po vrsti točke E, F in G tako, da je $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{AG} = 2$. Premica skozi G, vzporedna z EF, seka CD v H. Ploščina štirikotnika $EFHG$ je

(A) 4 **(B)** 4.5 **(C)** 5 **(D)** 5.5 **(E)** 6

19. Dan je trikotnik ABC s kotom $\sphericalangle ABC = 120^\circ$ in stranicama $AB = 3$ in $BC = 4$. Pravokotnica skozi A na AB seka pravokotnico skozi C na BC v točki D. Daljica CD je dolga

(A) 3 **(B)** $\frac{8}{\sqrt{3}}$ **(C)** 5 **(D)** $\frac{11}{2}$ **(E)** $\frac{10}{\sqrt{3}}$

20. V številsko križanko postavi: *1 vod.:* praštevilo; *3 vod.:* kvadrat števila pod 3 navp.; *1 navp.:* praštevilo; *2 navp.:* kvadrat števila pod 1 navp.; *3 navp.:* koren števila pod 3 vod. Kolikšna je vsota števk, ki sta v zadnji vrstici?



(A) 9 **(B)** 8 **(C)** 7 **(D)** 6 **(E)** 5

Drugi letnik

1. Koliko minut preteče med 11.41^{h} in 14.02^{h}?

(A) 141 **(B)** 261 **(C)** 241 **(D)** 221 **(E)** 361

2. Janez je imel veliko modelov kock, stožcev in krogel. Ugotovil je, da sta dva stožca skupaj s kroglo enako težka kot kocka, trije stožci pa tehtajo enako kot kocka in krogla skupaj. Koliko krogel tehta skupaj toliko kot en sam stožec?

$$(\mathbf{A})\ 1 \qquad (\mathbf{B})\ 2 \qquad (\mathbf{C})\ 3 \qquad (\mathbf{D})\ 4 \qquad (\mathbf{E})\ 5$$

3. Dojenčka nikakor niso uspeli stehtati, saj je bil tako nemiren, da se tehtnica ni umirila. Zato ga je najprej prijel zdravnik in z njim stopil na tehtnico; sestra je prebrala 78 kg. Nato je sestra stopila na tehtnico z dojenčkom v naročju in je zdravnik prebral 69 kg. Končno je zdravnik s sestro v naročju tehtal 137 kg. Koliko tehtajo vsi skupaj (v kg)?

$$(\mathbf{A})\ 142 \qquad (\mathbf{B})\ 147 \qquad (\mathbf{C})\ 206 \qquad (\mathbf{D})\ 215 \qquad (\mathbf{E})\ 284$$

4. Andraž teče hitreje kot Barbara, Drago je hitrejši kot Cilka. Edvina ni nikoli premagala Barbare. Ko se je nekega dne vseh pet pomerilo v teku, je bil rezultat ($ABCDE$ pomeni: Andraž prvi, Barbara druga...)

$$(\mathbf{A})\ ABCDE \qquad (\mathbf{B})\ BEDAC \qquad (\mathbf{C})\ ABCED$$
$$(\mathbf{D})\ ADBCE \qquad (\mathbf{E})\ ADCEB$$

5. Kolikšen kot oklepata urina kazalca, ko je ura dvajset minut do petih?

$$(\mathbf{A})\ 100^\circ \qquad (\mathbf{B})\ 25^\circ \qquad (\mathbf{C})\ 90^\circ \qquad (\mathbf{D})\ 105^\circ \qquad (\mathbf{E})\ 80^\circ$$

6. Katero od števil je največje?

$$(\mathbf{A})\ 2^{32} \qquad (\mathbf{B})\ 4^{15} \qquad (\mathbf{C})\ 8^{11} \qquad (\mathbf{D})\ 16^8 \qquad (\mathbf{E})\ 32^6$$

7. V posodi so kovanci in prstani in sicer zlati ali srebrni. Dvajset odstotkov vseh predmetov v posodi je prstanov, štirideset odstotkov kovancev je srebrnih. Koliko odstotkov vseh predmetov predstavljajo zlati kovanci?

$$(\mathbf{A})\ 40 \qquad (\mathbf{B})\ 48 \qquad (\mathbf{C})\ 52 \qquad (\mathbf{D})\ 60 \qquad (\mathbf{E})\ 80$$

8. Če je $m > 0$ in če točki $(m, 3)$ in $(1, m)$ ležita na premici s smernim koeficientom m, je m enak

$$(\mathbf{A})\ 1 \qquad (\mathbf{B})\ \sqrt{2} \qquad (\mathbf{C})\ \sqrt{3} \qquad (\mathbf{D})\ 2 \qquad (\mathbf{E})\ \sqrt{5}$$

9. Če so a, b in c pozitivna cela števila ter sta a in b lihi, potem je izraz $3^a + (b-1)^2 \cdot c$

   (**A**) lih za vsak c
   (**B**) sod za vsak c
   (**C**) sod, če je c lih, in lih, če je c sod
   (**D**) sod, če je c sod, in lih, če je c lih
   (**E**) lih, če c ni večkratnik števila 3, in sod, če je c večkratnik števila 3

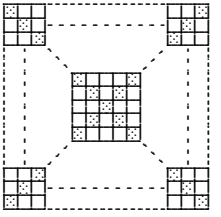
10. Če je $x > y > 0$, je $\dfrac{x^y \cdot y^x}{y^y \cdot x^x}$ enako

(A) $(x-y)^{y/x}$ **(B)** $(\dfrac{x}{y})^{x-y}$ **(C)** 1 **(D)** $(\dfrac{x}{y})^{y-x}$ **(E)** $(x-y)^{x/y}$

11. Vemo, da je $w : x = 4 : 3$, $y : z = 3 : 2$ in $z : x = 1 : 6$. Koliko je $w : y$?

(A) $1 : 3$ **(B)** $16 : 3$ **(C)** $20 : 3$ **(D)** $27 : 4$ **(E)** $12 : 1$

12. Tla sobe, ki imajo obliko kvadrata, smo tlakovali z enako velikimi kvadratnimi ploščicami. Po diagonalah smo postavili pisane ploščice, drugod pa bele. Porabili smo 101 pisano ploščico, belih pa

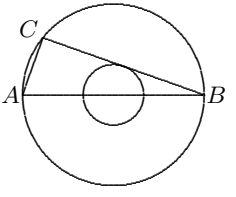


(A) 121 **(B)** 625 **(C)** 676
(D) 2500 **(E)** 2601

13. Število pozitivnih celih števil k, za katere ima enačba $kx - 12 = 3k$ celo rešitev po x, je

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 7

14. Polmera koncentričnih krogov sta v razmerju $1 : 3$. Z AB je označen premer večjega kroga, z BC pa njegova tetiva, ki je tangenta na manjši krog. Če je $\overline{AC} = 12$, je polmer večjega kroga enak



(A) 13 **(B)** 18 **(C)** 21 **(D)** 24 **(E)** 26

15. Če premico $x - 3y + 11 = 0$ preslikamo preko abscisne osi, dobimo premico $y = kx + n$. Vsota $k + n$ je

(A) -6 **(B)** -5 **(C)** -4 **(D)** -3 **(E)** -2

16. Koliko parov pozitivnih celih števil (a, b), za katere velja $a + b \leq 100$, zadošča enačbi $\dfrac{a + b^{-1}}{a^{-1} + b} = 13$?

(A) 1 **(B)** 5 **(C)** 7 **(D)** 9 **(E)** 13

17. Če za med sabo različna pozitivna števila x, y in z velja $\dfrac{y}{x-z} = \dfrac{x+y}{z} = \dfrac{x}{y}$, je $\dfrac{x}{y}$ enako

(A) $\dfrac{1}{2}$ **(B)** $\dfrac{3}{5}$ **(C)** $\dfrac{2}{3}$ **(D)** $\dfrac{5}{3}$ **(E)** 2

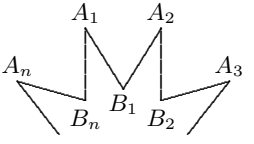
18. Dvomestna naravna števila od 19 do 93 zapišemo po vrsti eno poleg drugega in dobimo naravno število $N = 19202122\ldots919293$. Če je 3^k največja potenca števila 3, ki deli število N, potem je k

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** več kot 3

19. Od kocke odrežemo pri vsakem njenem oglišču tetraeder, ki ima vrh v tem oglišču, osnovna ploskev tetraedra pa ima oglišča v središčih tistih treh robov kocke, ki se stikajo v tem oglišču. Na ta način dobimo *kuboktaeder*. Procent prostornine kocke, ki jo zavzame kuboktaeder, je najbližji številu

(A) 75 **(B)** 78 **(C)** 81 **(D)** 84 **(E)** 87

20. Na sliki je del pravilne n-krake zvezde, večkotnika, ki ima $2n$ enako dolgih stranic, med sabo skladne kote pri A_1, A_2, ..., A_n in med sabo skladne kote pri B_1, B_2, ..., B_n. Če je ostri kot pri A_1 za 10° manjši od zunanjega ostrega kota pri B_1, je n enak



(A) 12 **(B)** 18 **(C)** 24 **(D)** 36 **(E)** 60

Tretji letnik

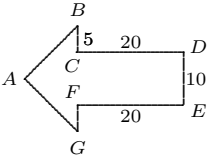
1. $6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 =$

(A) 6^6 **(B)** 6^7 **(C)** 36^6 **(D)** 6^{36} **(E)** 36^{36}

2. Če je $3(4x + 5\pi) = p$, je $6(8x + 10\pi) =$

(A) $2p$ **(B)** $4p$ **(C)** $6p$ **(D)** $8p$ **(E)** $18p$

3. Večkotnik ima obliko puščice (slika). Koti ob oglišči A, C, D, E in F so pravi, velja pa še $\overline{BC} = \overline{FG} = 5$, $\overline{CD} = \overline{FE} = 20$, $\overline{DE} = 10$ in $\overline{AB} = \overline{AG}$. Ploščina večkotnika je



(A) 288 **(B)** 291 **(C)** 294
(D) 297 **(E)** 300

4. Če sta a in b neničelni med seboj različni števili in je $\frac{a}{b} = x$, je $\frac{a+b}{a-b}$ enako

(A) $\frac{x}{x+1}$ **(B)** $\frac{x+1}{x-1}$ **(C)** 1 **(D)** $x - \frac{1}{x}$ **(E)** $x + \frac{1}{x}$

5. Od časa $t = 0$ do časa $t = 1$ se je število prebivalcev povečalo za $i\%$, od časa $t = 1$ do časa $t = 2$ pa za $j\%$. Od časa $t = 0$ do časa $t = 2$ se je število torej povečalo za

$$\textbf{(A)}\ (i+j)\% \qquad \textbf{(B)}\ ij\% \qquad \textbf{(C)}\ (i+ij)\%$$
$$\textbf{(D)}\ (i+j+\tfrac{ij}{100})\% \qquad \textbf{(E)}\ (i+j+\tfrac{i+j}{100})\%$$

6. Število vseh deliteljev kuba naravnega števila je lahko enako

$$\textbf{(A)}\ 200 \qquad \textbf{(B)}\ 201 \qquad \textbf{(C)}\ 202 \qquad \textbf{(D)}\ 203 \qquad \textbf{(E)}\ 204$$

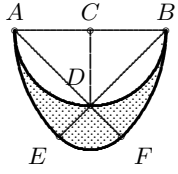
7. Za okroglo mizo je 60 stolov, postavljenih tako, da se vsaka sosednja dotikata. Zasedeno je n stolov tako, da se mora naslednji, ki prisede, vsesti nasproti nekoga, ki že sedi. Najmanjša možna vrednost števila n je

$$\textbf{(A)}\ 15 \qquad \textbf{(B)}\ 20 \qquad \textbf{(C)}\ 30 \qquad \textbf{(D)}\ 40 \qquad \textbf{(E)}\ 58$$

8. Naj bo $\mathcal{S}$ množica tistih kompleksnih števil z, za katere je $(3+4i)\cdot z$ realno število. Množica $\mathcal{S}$ tvori na kompleksni ravnini

$$\textbf{(A)}\ \text{pravokotni trikotnik} \qquad \textbf{(B)}\ \text{krog} \qquad \textbf{(C)}\ \text{hiperbolo}$$
$$\textbf{(D)}\ \text{premico} \qquad \textbf{(E)}\ \text{parabolo}$$

9. Polkrožnico $\widehat{AB}$ s središčem C in polmerom 1 seka pravokotnica na AB skozi C v točki D. Podaljšajmo AD in BD do F oziroma E tako, da imata krožna loka $\widehat{AE}$ in $\widehat{BF}$ središči B oziroma A. Krožni lok $\widehat{EF}$ ima središče D. Ploščina osenčenega lika je



$$\textbf{(A)}\ (2-\sqrt{2})\pi \qquad \textbf{(B)}\ 2\pi-\pi\sqrt{2}-1 \qquad \textbf{(C)}\ \Big(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)\pi$$
$$\textbf{(D)}\ \frac{5\pi}{2}-\pi\sqrt{2}-1 \qquad \textbf{(E)}\ (3-2\sqrt{2})\pi$$

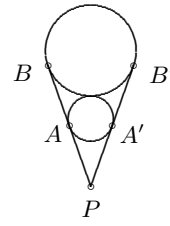
10. Vsota vseh realnih števil x, za katere je $(2^x-4)^3+(4^x-2)^3=(4^x+2^x-6)^3$, je

$$\textbf{(A)}\ \tfrac{3}{2} \qquad \textbf{(B)}\ 2 \qquad \textbf{(C)}\ \tfrac{5}{2} \qquad \textbf{(D)}\ 3 \qquad \textbf{(E)}\ \tfrac{7}{2}$$

11. Koliko elementov ima lahko največja podmnožica množice $\{1,2,3,\ldots,50\}$, v kateri noben par elementov nima vsote deljive s 7?

$$\textbf{(A)}\ 6 \qquad \textbf{(B)}\ 7 \qquad \textbf{(C)}\ 14 \qquad \textbf{(D)}\ 22 \qquad \textbf{(E)}\ 23$$

12. Krožnici se od zunaj dotikata (slika). Premici PB in PB' sta skupni tangenti z dotikališči A in A' na manjši oziroma B in B' na večji krožnici. Če je $\overline{PA} = \overline{AB} = 4$, je ploščina manjšega kroga



$$\textbf{(A)}\ 1.44\pi \qquad \textbf{(B)}\ 2\pi \qquad \textbf{(C)}\ 2.56\pi$$
$$\textbf{(D)}\ \pi\sqrt{8} \qquad \textbf{(E)}\ 4\pi$$

13. Če je $f\Big(\dfrac{x}{x-1}\Big) = \dfrac{1}{x}$ za vse x, različne od 0 in od 1, in je $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, potem je $f\Big(\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Big)$ enako

$$\textbf{(A)}\ \sin^2\alpha \qquad \textbf{(B)}\ \cos^2\alpha \qquad \textbf{(C)}\ \operatorname{tg}^2\alpha \qquad \textbf{(D)}\ \operatorname{ctg}^2\alpha \qquad \textbf{(E)}\ \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

14. Na pozitivnem delu abscisne osi izberemo deset točk, na pozitivnem delu ordinatne osi pa še pet točk. Nato narišemo vseh 50 daljic, ki povezujejo po dve izbrani točki. Koliko je lahko največ tistih presečišč teh daljic, ki ležijo v notranjosti prvega kvadranta?

$$\textbf{(A)}\ 250 \qquad \textbf{(B)}\ 450 \qquad \textbf{(C)}\ 500 \qquad \textbf{(D)}\ 1250 \qquad \textbf{(E)}\ 2500$$

15. V krogu s polmerom r sta narisani tetivi AB dolžine 10 in CD dolžine 7. Ko prvo podaljšamo preko B in drugo preko C, se sekata v P, ki leži izven kroga. Če je $\sphericalangle APD = 60^\circ$ in $\overline{BP} = 8$, je r^2 enak

$$\textbf{(A)}\ 70 \qquad \textbf{(B)}\ 71 \qquad \textbf{(C)}\ 72 \qquad \textbf{(D)}\ 73 \qquad \textbf{(E)}\ 74$$

16. Graf G funkcije $y = \log x$ zavrtimo za 90° v nasprotni smeri urinega kazalca in dobimo graf G', ki je graf funkcije

$$\textbf{(A)}\ y = \log\Big(\frac{x+90}{9}\Big) \qquad \textbf{(B)}\ y = \log_x 10 \qquad \textbf{(C)}\ y = \frac{1}{x+1} \qquad \textbf{(D)}\ y = 10^{-x}$$
$$\textbf{(E)}\ y = 10^x$$

17. Če je $x + \sqrt{x^2-1} + \dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = 20$, je $x^2 + \sqrt{x^4-1} + \dfrac{1}{x^2+\sqrt{x^4-1}}$ enako

$$\textbf{(A)}\ 5.05 \qquad \textbf{(B)}\ 20 \qquad \textbf{(C)}\ 51.005 \qquad \textbf{(D)}\ 61.25 \qquad \textbf{(E)}\ 400$$

18. Na začetku imamo v vreči 100 belih in 100 rdečih krogel. Nato lahko večkrat zamenjamo po tri krogle z eno ali dvema, tako da se držimo pravila:

take krogle	zamenjamo z
3 rdeče	1 rdečo
2 rdeči in 1 belo	1 rdečo in 1 belo
1 rdečo in 2 beli	2 belima
3 bele	1 rdečo in 1 belo

Po določenem številu zamenjav lahko imamo v vreči

(A) 2 rdeči krogli **(B)** 2 beli krogli **(C)** 1 rdečo kroglo
(D) 1 rdečo in 1 belo kroglo **(E)** 1 belo kroglo

19. Pravimo, da je naravno število n *palindrom*, če dobimo isto število, ko zapišemo njegove števke (cifre) v obratnem vrstnem redu. Leto 1991 je edino v tem stoletju, za katerega velja:
   – je palindrom in
   – je produkt dvomestnega *prapalindroma* in trimestnega *prapalindroma* (*prapalindrom* je palindrom, ki je hkrati praštevilo).

   Koliko let v tem tisočletju (med letoma 1000 in 2000, seveda upoštevaj tudi leto 1991) ima našteti lastnosti?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

20. Naj bo $ABCD$ enakokraki trapez z osnovnicama $\overline{AB} = 92$ in $\overline{CD} = 19$ ter krakoma $\overline{AD} = \overline{BC} = x$. Nosilki krakov sta tangenti na krožnico s središčem na AB. Če je m najmanjša možna vrednost za x, je m^2 enak

(A) 1369 **(B)** 1679 **(C)** 1748 **(D)** 2109 **(E)** 8825

Četrti letnik

1. Za poljubna tri različna števila a, b in c definiramo $[\![a,b,c]\!] = \dfrac{c+a}{c-b}$. Koliko je $[\![1,-2,-3]\!]$?

(A) -2 **(B)** $-\dfrac{2}{5}$ **(C)** $-\dfrac{1}{4}$ **(D)** $\dfrac{2}{5}$ **(E)** 2

2. $|3-\pi| =$

(A) $\dfrac{1}{7}$ **(B)** 0.14 **(C)** $3-\pi$ **(D)** $3+\pi$ **(E)** $\pi-3$

3. Če je $x \geq 0$, potem je $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$ enako

(A) $x\sqrt{x}$ **(B)** $x\sqrt[4]{x}$ **(C)** $\sqrt[8]{x}$ **(D)** $\sqrt[8]{x^3}$ **(E)** $\sqrt[8]{x^7}$

4. Če neko tekočino, ki se ne meša z vodo, zlijemo v vodo, oblikuje plast debeline 0.1 cm okrogle oblike (predpostavimo, da je površina vode dovolj velika). Posodo kvadratne oblike dimenzije 6 cm $\times$ 3 cm $\times$ 12 cm, ki je polna te tekočine, spraznimo v širok bazen. Polmer nastalega madeža na vodi (v cm) je

$$\textbf{(A)}\ \frac{\sqrt{216}}{\pi} \qquad \textbf{(B)}\ \sqrt{\frac{216}{\pi}} \qquad \textbf{(C)}\ \sqrt{\frac{2160}{\pi}} \qquad \textbf{(D)}\ \frac{216}{\pi} \qquad \textbf{(E)}\ \frac{2160}{\pi}$$

5. Jaka in Janez sta se odločila, da bosta pretekla isto 10 km dolgo razdaljo. Začela bosta v dolini, tekla prvih 5 km do vrha, nato pa po isti poti nazaj. Jaka, ki bo začel teči 10 minut prej, teče navkreber s hitrostjo 15 km/h in navzdol s hitrostjo 20 km/h, Janez pa navkreber s hitrostjo 16 km/h in navzdol s hitrostjo 22 km/h. Kako daleč od vrha se bosta srečala?

$$\textbf{(A)}\ \frac{5}{4}\ \text{km} \qquad \textbf{(B)}\ \frac{35}{27}\ \text{km} \qquad \textbf{(C)}\ \frac{27}{20}\ \text{km} \qquad \textbf{(D)}\ \frac{7}{3}\ \text{km} \qquad \textbf{(E)}\ \frac{28}{9}\ \text{km}$$

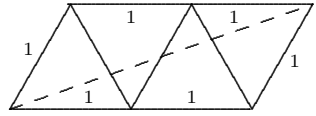
6. Sto dijakov tretjega in četrtega letnika je pisalo enak test. Povprečno je vsak zbral 100 točk. Dijakov tretjega letnika je bilo 50% več kot dijakov četrtega letnika, dijak četrtega letnika je v povprečju zbral 50% več točk kot dijak tretjega letnika. Koliko točk je v povprečju zbral dijak četrtega letnika?

$$\textbf{(A)}\ 100 \qquad \textbf{(B)}\ 112.5 \qquad \textbf{(C)}\ 120 \qquad \textbf{(D)}\ 125 \qquad \textbf{(E)}\ 150$$

7. Zaporedje kompleksnih števil ima prvi člen $z_1 = 0$, naslednje člene pa dobimo z $z_{n+1} = z_n^2 + i$ $(n \geq 1)$. Kako daleč od izhodišča je člen z_{111}?

$$\textbf{(A)}\ 1 \qquad \textbf{(B)}\ \sqrt{2} \qquad \textbf{(C)}\ \sqrt{3} \qquad \textbf{(D)}\ \sqrt{110} \qquad \textbf{(E)}\ \sqrt{2^{55}}$$

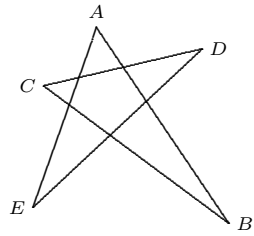
8. Paralelogram je sestavljen iz štirih skladnih enakostraničnih trikotnikov s stranico dolžine 1. Kako dolga je njegova daljša diagonala?



$$\textbf{(A)}\ \sqrt{5} \qquad \textbf{(B)}\ \sqrt{6} \qquad \textbf{(C)}\ \sqrt{7} \qquad \textbf{(D)}\ \frac{\sqrt{29}}{2} \qquad \textbf{(E)}\ 3$$

9. Če z S označimo vsoto ostrih kotov pri A, B, C, D in E (v radianih), potem velja

$$\textbf{(A)}\ S < \pi \qquad \textbf{(B)}\ S = \pi \qquad \textbf{(C)}\ \pi < S < \tfrac{3\pi}{2}$$
$$\textbf{(D)}\ S = \tfrac{3\pi}{2} \qquad \textbf{(E)}\ S > \tfrac{3\pi}{2}$$



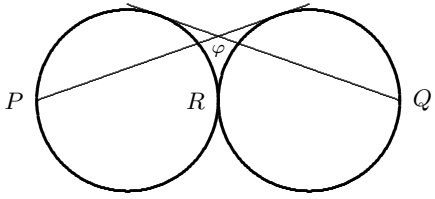
10. Naj bo n število nenegativnih celih števil, ki niso večja od 10000 in so deljiva z vsakim pozitivnim celim številom, manjšim ali enakim 10. Potem velja

(A) $n = 0$ **(B)** $1 \leq n < 5$ **(C)** $5 \leq n < 10$ **(D)** $10 \leq n < 15$ **(E)** $15 < n$

11. Vseh pozitivnih dvomestnih celih števil, ki so enaka vsoti kvadrata svoje desetice in kuba svoje enice, je

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** več kot 3

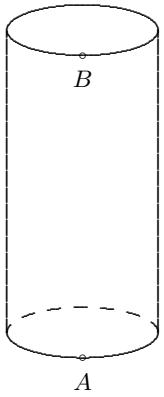
12. Kroga z enakima polmeroma se dotikata v točki R. Točki P oziroma Q sta krajišči premerov, katerih drugo krajišče je R. Iz P in Q potegnemo tangento na drugi krog (slika). Sinus kota φ med tangentama je



(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **(C)** $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ **(D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(E)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

13. Dan je valj z višino 10 cm in premerom osnovne ploskve 1 cm. Vrvico enakomerno ovijemo po valju tako, da ima začetek v A in konec v B ter natanko 10 navojev. Najboljši približek za dolžino vrvice (v cm) je

(A) 31.4 **(B)** 33 **(C)** 41.4 **(D)** 62.8 **(E)** 64



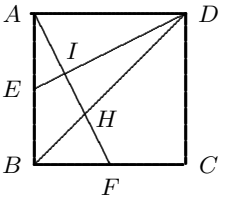
14. Dan je enakokraki trikotnik ABC s krakoma AC in BC ter kotom γ pri C. Iz A potegnemo pravokotnico na BC. Kot med to pravokotnico in osnovnico je

(A) $\frac{\gamma}{2}$ **(B)** $90^\circ - \gamma$ **(C)** $90^\circ + \gamma$ **(D)** γ **(E)** 2γ

15. Pozitivno n-mestno celo število je *ljubko*, če je zapisano s števkami $\{1, 2, ..., n\}$ in njegovih prvih k mest tvori k-mestno število, deljivo s k (za $k = 1, 2, ..., n$). Primer: 321 je *ljubko* trimestno število, saj 1 deli 3, 2 deli 32 in 3 deli 321. Koliko šestmestnih števil je *ljubkih*?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

16. Dan je kvadrat $ABCD$ s stranico 2. Naj bo E središče stranice AB in F središče BC, AF in DE se sekata v I, BD in AF pa v H. Ploščina štirikotnika $BHIE$ je



(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{2}{5}$ **(C)** $\frac{7}{15}$ **(D)** $\frac{8}{15}$ **(E)** $\frac{3}{5}$

17. Produkt realnih delov korenov enačbe $z^2 - z = 5 - 5i$ je

(A) -25 **(B)** -6 **(C)** -5 **(D)** $\frac{1}{4}$ **(E)** 25

18. Notranji koti konveksnega šestkotnika, ki merijo po celo število stopinj, tvorijo aritmetično zaporedje. Naj bo m° največji kot takega šestkotnika. Največja možna vrednost za m je

(A) 165 **(B)** 167 **(C)** 170 **(D)** 175 **(E)** 179

19. Za končno zaporedje števil a_1, a_2, ..., a_n je *Cesarova vsota* izraz $\frac{S_1 + S_2 + \cdots S_n}{n}$, kjer je $S_k = a_1 + a_2 + \cdots a_k$ za $1 \leq k \leq n$.
Če je *Cesarova vsota* 99-členskega zaporedja a_1, a_2, ..., a_{99} enaka 1000, je *Cesarova vsota* 100-členskega zaporedja 1, a_1, a_2, ..., a_{99} enaka

(A) 991 **(B)** 999 **(C)** 1000 **(D)** 1001 **(E)** 1009

20. Za člene naraščajočega zaporedja pozitivnih celih števil a_1, a_2, a_3, ... velja $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ pri vsakem $n \geq 1$. Če je $a_7 = 120$, je a_8 enako

(A) 128 **(B)** 168 **(C)** 193 **(D)** 194 **(E)** 210

Rešitve za 1. letnik:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
E	B	D	E	C	E	C	C	E	B	D	D	B	A	D	A	E	C	E	E

Rešitve za 2. letnik:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	B	A	D	A	C	B	C	A	D	B	D	D	B	C	C	E	B	D	D

Rešitve za 3. letnik:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	B	E	B	D	C	C	D	B	E	E	B	A	B	D	D	C	B	D	B

Rešitve za 4. letnik:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
E	E	C	C	B	D	B	C	B	B	C	C	B	A	C	C	B	D	A	D

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST
IZVANREDNI BROJ (E), 1993

Dosedanje posebne številke (B) in (D) so vsebovale izbrane dijaške rešitve iz prvih 30 letnikov MFL-ja, ta številka pa vsebuje 150 izmed 560 nalog, ki so bile objavljene v letnikih 31-40(80/81-90/91) v redni rubriki "naloge iz matematike". Naloge so zbrane v 11 poglavij, ki pokrivajo srednješolsko matematiko. Pobrskajmo po nekaj prispevkih slovenskih dijakov.

Cena te številke je 8 DEM za tujino (4 DEM za Hrvaško).
Naslov: Matematičko-fizički list, Ilica 16/III, 41001 Zagreb, p.p. 258.

1.3. Dokaži, da ima kvadrat kateregakoli praštevila $p > 3$ pri deljenju z 12 ostanek 1.

Rešitev: Če nalogo malce predrugačimo, vidimo, da zahteva, da dokažemo, da 12 deli $p^2-1 = (p-1)(p+1)$. Če je $p > 3$, je praštevilo liho – torej se da zapisati kot $p = 2k+1$:

$$(p-1)(p+1) = (2k+1-1)(2k+1+1) = 2k(2k+2) = 4k(k+1) = 4n$$

Tako smo pokazali deljivost s 4.

Oglejmo si še tri zaporedna naravna števila: $p-1$, p in $p+1$. Eno od njih mora biti deljivo s 3. Ker je p praštevilo, nam preostane le še možnost, da $3|(p-1)$ ali $3|(p+1)$.

Če je število hkrati deljivo s 3 in 4, je potem deljivo tudi z 12.

Marjan Jerman (2), Trbovlje

1.9. Vsota vseh štirimestnih števil, ki jih lahko izpeljemo iz štirih različnih števk, je 122436. Katero je najmanjše možno od teh števil?

Rešitev: S pomočjo štirih različnih števk lahko napišemo $4! = 24$ različnih štirimestnih števil (pod pogojem, da med njimi ni ničle).

Naj bo $abcd$ zapis enega od teh števil. Vsaka od števk a, b, c, d se mora med vsemi 24 števili nahajati 6 krat na prvem mestu, 6 krat na drugem, itd. Torej bi moralo veljati

$$6666(a+b+c+d) = 122436.$$

Ker pa število 122436 ni deljivo s 6666, trditev ne drži.

Sklepamo, da je med števkami a, b, c, d ena ničla. Naj bo $d = 0$. Tedaj na identičen način kot zgoraj ugotovimo

$$6444(a+b+c) = 122436$$

oziroma

$$a+b+c = 19.$$

Najmanjše možno število ne more imeti 1 na prvem mestu, temveč kvečjemu 2. Na drugem mestu ima lahko 0. Ker mora tedaj biti vsota tretje in četrte števke enaka 17, sta ti dve števki lahko le 8 in 9. Iz našega sklepanja sledi, da je $x = 2089$.

Boris Ulaga (3), Ljubljana

2.2. Določi ostanek pri deljenju polinoma $x^{99}+x^3+10x+5$ s polinomom x^2+1.

Rešitev:

$$\begin{aligned} x^{99}+x^3+10x+5 &= x^{35}(x^{64}-1)+x^{35}+x^3+10x+5 = \\ &= (x^2+1)q(x)+(x^{32}-1)x^3+2x^3+10x+5 = \\ &= (x^2+1)q(x)+(x^2+1)r(x)+2x(x^2+1)+8x+5 = \\ &= (x^2+1)(q(x)+r(x)+2x)+8x+5 \end{aligned}$$

Ostanek je $8x+5$.

Marjan Jerman (2), Trbovlje

2.3. Okrajšaj ulomek $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^5+x^3-x^2-1}$.

Rešitev:

$$\begin{aligned} x^4+x^2+1 &= \frac{x^6-1}{x^2-1}, \\ x^5+x^3-x^2-1 &= (x^2+1)(x^3-1), \\ \frac{x^4+x^2+1}{x^5+x^3-x^2-1} &= \frac{x^6-1}{(x^2-1)(x^2+1)(x^3-1)} = \\ &= \frac{x^3+1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \\ &= \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \\ &= \frac{x^2-x+1}{x^3-x^2+x-1}. \end{aligned}$$

Vlado Robar (3), Maribor

2.13. Določi števili (parametra) a in b tako, da ima sistem

$$\begin{aligned} a^2x-ay &= 1-a, \\ bx+(3-2b)y &= 3+a \end{aligned}$$

edino rešitev $x=1$, $y=1$.

Rešitev: Neznanki x in y v sistemu nadomestimo z 1 in dobimo tale sistem:

$$\begin{aligned} a^2-1 &= 1-a, \\ b+(3-2b) &= 3+a. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe dobimo: $a^2=1$ in $a=\pm 1$. Iz druge enačbe dobimo: $3-b=3+a$. Torej $-b=a$ in $b=\mp 1$. Če sedaj vstavimo vrednosti za a in b v prvotni sistem, dobimo dva sistema:

a) V primeru $a=1$ in $b=-1$ dobimo $x-y=0$ in $-x+5y=4$. Edina rešitev je $x=1$, $y=1$. To ustreza nalogi.

b) V primeru $a = -1$, $b = 1$ je sistem $x + y = 2$, $x + y = 2$ nedoločen – ima neštetо rešitev. To pa ne ustreza besedilu naloge, ki pravi, da mora biti rešitev samo ena.

Zaključimo, da je edina rešitev naloge: $a = 1$, $b = -1$.

Vlado Robar (1), Maribor

3.4. Za poljubna različna pozitivna števila a, b, c velja: $(a + b)(b + c)(c + a) > 8abc$. Dokaži!

Rešitev: Veljajo neenakosti (med aritmetično in geometrično sredino): $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ za $a \neq b$, $\frac{b+c}{2} > \sqrt{bc}$ za $b \neq c$ in $\frac{c+a}{2} > \sqrt{ca}$ za $c \neq a$.

Če zmnožimo te neenakosti, dobimo (po množenju z 8):

$$(a + b)(b + c)(c + a) > 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8abc.$$

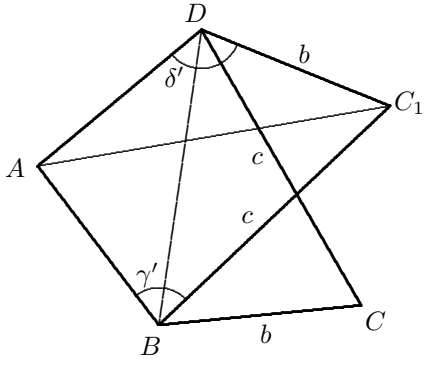
Torej je $(a + b)(b + c)(c + a) > 8abc$, kar je bilo treba dokazati.

Roman Drnovšek (3), Ljubljana

3.10. Dokaži, da za štirikotnik z dolžinami stranic a, b, c, d in ploščino P velja:

$$P \leq \frac{ac + bd}{2}.$$

Rešitev: Štirikotnik $ABCD$ razdelimo z diagonalo na dva trikotnika: ABD in BCD. Trikotnik BCD obrnimo, kakor je prikazano na sliki. Tako dobimo trikotnik BC_1D ($\triangle BC_1D \simeq \triangle BCD$, $P_{ABCD} = P_{ABC_1D}$). Velja $\sin \beta' \leq 1$, $\sin \delta' \leq 1$. Torej je ploščina štirikotnika enaka vsoti ploščin trikotnikov ABC_1 in AC_1D:



$$\begin{aligned} P &= \frac{ac \sin \beta'}{2} + \frac{bd \sin \delta'}{2} \leq \\ &\leq \frac{ac}{2} + \frac{bd}{2} = \frac{ac + bd}{2}. \end{aligned}$$

Robert Rodošek (4), Maribor

4.2. Katero število je večje: $\log_{100} 99$ ali $\log_{101} 100$?

Rešitev:

$$\begin{aligned} \frac{\log_{100} 99}{\log_{101} 100} &= \log_{100} 99 \cdot \log_{100} 101 < \left(\frac{\log_{100} 99 + \log_{100} 101}{2} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{\log_{100}(100^2 - 1)}{2} \right)^2 < \left(\frac{2}{2} \right)^2 = 1. \end{aligned}$$

(Geometrična sredina je manjša od aritmetične.) Od tod sledi:

$$\log_{100} 99 < \log_{101} 100.$$

Roman Drnovšek (3), Ljubljana

4.5. Rešite enačbo
$$\log_3 x \cdot \log_4 x \cdot \log_5 x = \log_3 x \cdot \log_4 x + \log_4 x \cdot \log_5 x + \log_5 x \cdot \log_3 x.$$

Rešitev:

$$\begin{aligned}
\frac{\log x}{\log 3} \cdot \frac{\log x}{\log 4} \cdot \frac{\log x}{\log 5} &= \frac{\log x}{\log 3} \cdot \frac{\log x}{\log 4} \cdot \frac{\log 5}{\log 5} + \frac{\log x}{\log 3} \cdot \frac{\log 4}{\log 4} \cdot \frac{\log x}{\log 5} + \\
&\quad + \frac{\log 3}{\log 3} \cdot \frac{\log x}{\log 4} \cdot \frac{\log x}{\log 5}, \\
\log^3 x &= \log^2 x \cdot (\log 5 + \log 4 + \log 3), \\
\log^2 x \cdot (\log x - \log 60) &= 0, \\
\log^2 x \cdot \log \frac{x}{60} &= 0.
\end{aligned}$$

Enačba ima torej rešitve $x_1 = x_2 = 1$ in $x_3 = 60$.

Peter Anastasov (2), Ljubljana

5.4. Kolikšen je koeficient pri x^8 v razvoju $(1 + x^2 - x^3)^9$?

Rešitev: $(a+b+c)^n = \sum \frac{n!}{k!l!m!} a^k b^l c^m$, kjer je $k + l + m = n$.

$$x^8 = 1^6 \cdot (x^2)^1 \cdot (-x^3)^2 = 1^5 \cdot (x^2)^4 \cdot (-x^3)^0.$$

Zato je koeficient pri x^8 enak

$$\frac{9!}{6!1!2!} + \frac{9!}{5!4!0!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{2} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 252 + 126 = 378.$$

Marjan Jerman (3), Trbovlje

5.8. Razpolagamo z 10 kroglicami, od tega je 6 rdečih in 4 bele. Vseh 10 kroglic razporedimo v niz. Kolikšna je verjetnost, da bosta srednji kroglici enake barve?

Rešitev: Kroglice lahko razporedimo v niz na $10!/(6!4!) = 210$ možnih načinov (toliko je permutacij 10 elementov, od katerih se en element ponovi 6 krat, drugi pa 4 krat).

Razlikovati moramo med dvema primeroma:

a) Na sredi sta 2 rdeči kroglici, ki ju pustimo pri miru, ostale 4 bele in 4 rdeče kroglice lahko permutiramo na $8!/(4!4!) = 70$ različnih načinov.

b) Na sredi sta 2 beli kroglici, ki ju pustimo pri miru, ostalih 6 rdečih in 2 beli kroglici lahko permutiramo na $8!/(6!2!) = 28$ različnih načinov.

Vseh mogočih dogodkov je 210, od tega je $70 + 28 = 98$ ugodnih za našo nalogo. Iskana verjetnost je torej $98/210 = 7/15 \approx 0.4667 = 46.67\%$.

Vlado Robar (1), Maribor

5.11. V omari se nahaja 10 različnih parov čevljev. Slučajno izvlečemo 4 čevlje. Kolikšna je verjetnost, da bo med temi 4 čevlji vsaj en par iste vrste?

Rešitev: Nasprotni dogodek: med 4 čevlji ne bo niti enega para iste vrste (4 različni čevlji). Računamo verjetnost nasprotnega dogodka.

Najprej izvlečemo prvi čevelj. Ko izvlečemo drugi čevelj izmed 19 čevljev, je verjetnost $18/19$, da ne bo par prvega čevlja. Tretji čevelj izvlečemo iz preostalih osemnajstih, torej je verjetnost $16/18$, da ne bo par niti prvemu niti drugemu čevlju. Enako sklepamo za četrti čevelj: verjetnost $14/17$, da ne bo par nobenega že izvlečenih čevljev. Verjetnost nasprotnega dogodka:

$$\frac{18 \cdot 16 \cdot 14}{19 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{224}{323},$$

verjetnost našega dogodka:

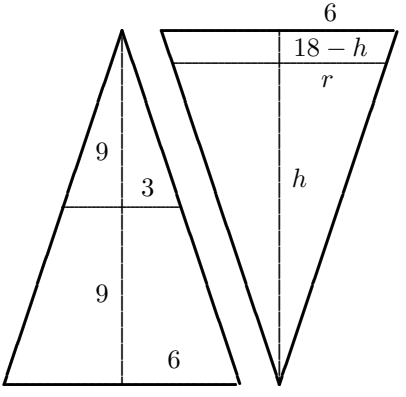
$$1 - \frac{224}{323} = \frac{99}{323} \approx 31\%.$$

Alenka Kavkler (2), Maribor

7.9. Polmer osnovne ploskve pokončnega stožca je $6\mathrm{dm}$, višina pa $18\mathrm{dm}$. V stožec je natočena voda, ki sega do polovice višine stožca. Do kam bi segala voda, če bi stožec obrnili na glavo?

Rešitev: Izračunajmo volumen vode (prisekani stožec):

$$V = \frac{9\pi}{3} \cdot (6^2 + 6 \cdot 3 + 3^2) = 189\pi.$$



To vodo pretočimo v našemu stožcu podoben stožec ($h = 3r$). Do kam bo segala?

$$V = 189\pi = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 3r,$$

$189 = r^3$, $r = \sqrt[3]{189}$ in

$$h = 3r = 3\sqrt[3]{189} = 3 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{7} = 9\sqrt[3]{7}.$$

Segala bo do višine $h \approx 17.22\mathrm{dm}$.

Marjan Jerman (2), Trbovlje

9.7. Katera točka parabole $y = 0.1x^2$ je najbližja točki

a) $A(0, 4)$,

b) $B(0, 6)$?

Rešitev:

a) Razdalja d_1 od poljubne točke na paraboli $y = 0.1x^2$ do točke A je enaka
$$d_1 = \sqrt{x^2 + (0.1x^2 - 4)^2} = \sqrt{0.01x^4 + 0.2x^2 + 16}$$
in bo najmanjša, ko bo najmanjši izraz
$$0.01x^4 + 0.2x^2 = (0.1x^2 + 1)^2 - 1.$$
Takoj vidimo, da mora biti $x = 0$, da bo ta izraz minimalen, tej abscisi pa ustreza $y = 0$ na paraboli. Torej je točki $A(0, 4)$ najbližja točka $(0, 0)$ – koordinatno izhodišče.

b) Analogno je razdalja d_2 od točke na paraboli do točke B enaka
$$d_2 = \sqrt{x^2 + (0.1x^2 - 6)^2} = \sqrt{0.01x^4 - 0.2x^2 + 36}$$
in bo najmanjša, ko bo najmanjši izraz
$$0.01x^4 - 0.2x^2 = (0.1x^2 - 1)^2 - 1.$$
Ta pa bo najmanjši, ko bo izraz v oklepaju $(0.1x^2 - 1)$ enak 0, torej $x = \pm\sqrt{10}$ in $y = 1$. Torej: točki $B(0, 6)$ sta najbližji točki $(\sqrt{10}, 1)$, $(-\sqrt{10}, 1)$; $d_2 = \sqrt{35} < 6$.

Vlado Robar (3), Maribor

11.7. Črkostavcu se je razsul tiskarski blok, v katerem je bilo iz števk 0, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 9 sestavljeno 9-mestno število, ki je šesta potenca naravnega števila. Katero je to število?

Rešitev: Očitno velja: $10^8 < n^6 < 10^9$ in $21 < n < 32$. Ker je iskano število deljivo vsaj z 9 (ker je vsota števk 45), je n deljiv s 3. Ostanejo samo možnosti

a) $n = 30 \ldots 30^6$ ima 6 ničel in ni iskano število.
b) $n = 27 \ldots 27^6 = 387\,420\,489$.
c) $n = 24 \ldots 24^6$ se konča s 6 in ni iskano število.

Razsuto število je torej $387\,420\,489$.

Roman Drnovšek (3), Ljubljana

11.9. Katera tri realna števila z vsoto 3 imajo vsoto kvadratov enako 3?

Rešitev: Naj bodo x, y, z iskana števila. Neenakost med kvadratno in aritmetično sredino:
$$\sqrt{\frac{3}{3}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} \geq \frac{x + y + z}{3} = \frac{3}{3}.$$
Enakost velja le tedaj, ko je $x = y = z$. Ker je $x + y + z = 3$, je torej $x = y = z = 1$.

Roman Drnovšek (3), Ljubljana

11.16. Določite vrednost vsote

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)},$$

če n neskončno raste, oziroma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Rešitev: Izračunajmo najprej vsoto končnega števila členov. V ta namen razčlenimo splošni člen zaporedja v tri sumande:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}+\frac{C}{k+2}.$$

Ta enakost nas pripelje do sistema

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0,\\ 3A+2B+C &= 0,\\ 2A &= 1, \end{aligned}$$

katerega rešitev je $A=\frac{1}{2}$, $B=-1$, $C=\frac{1}{2}$. Zato lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+2)}\right)=\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\\ &\quad -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)+\\ &\quad +\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=\\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{2(n+2)}-\frac{1}{2(n+1)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

(Pravilnost dobljene formule bi lahko dokazali z matematično indukcijo.)

Sedaj se lotimo neskončne vrste:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}=\frac{1+\frac{3}{n}}{4(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})},\\ S_\infty &= \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{4(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})}=\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Boris Ulaga (3), Ljubljana

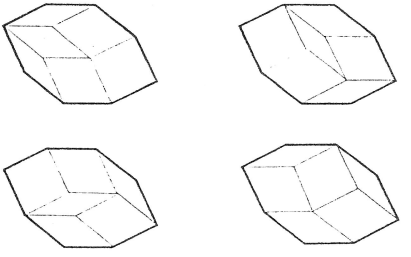
International Mathematical Talent Search

PROBLEMS ROUND 11

Problem 1/11. Express $\frac{19}{94}$ in the form $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$, where m and n are positive integers.

Problem 2/11. Let n be a positive integer greater than 5. Show that at most eight members of the set $\{n+1, n+2, \ldots, n+30\}$ can be primes.

Problem 3/11. A convex $2n$-gon is said to be "rhombic" if all of its sides are of unit length and if its opposite sides are parallel. As exemplified on the right (for the case of $n=4$), a rhombic $2n$-gon can be dissected into rhombi of sides 1 in several different ways.



For what value of n can a rhombic $2n$-gon be dissected into 666 rhombi?

Problem 4/11. Prove that if three of the interior angle bisectors of a quadrilateral intersect at one point, then all four of them must intersect at that point.

Problem 5/11. Let $f(x)=x^4+17x^3+80x^2+203x+125$. Find the polynomial, $g(x)$, of smallest degree for which $f(3\pm\sqrt{3})=g(3\pm\sqrt{3})$ and $f(5\pm\sqrt{5})=g(5\pm\sqrt{5})$.

Angleške naloge za srednješolce

1. Two high school classes took the same test. One class of 20 students made an average grade of 80 %; the other class of 30 students made an average grade of 70 %. The average grade for all students in both classes is:

   (A) 75 % **(B)** 74 % **(C)** 72 % **(D)** 77 % **(E)** none of these

2. The number of pairs (p, q) of distinct prime numbers such that p divides $q^2 - q$ and q divides $p^2 + p$ is

   (A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** infinite

3. The value of $\frac{2}{a+b}$ when $a = 3$ and $b = -3$ is

   (A) 2 **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** 0 **(D)** any finite number **(E)** meaningless

4. The simplest form of $1 - \frac{1}{1+\frac{a}{1-a}}$ is:

   (A) a if $a \neq 0$ **(B)** 1 **(C)** a if $a \neq -1$ **(D)** $1 - a$ with no restriction on a
   (E) a if $a \neq 1$

5. The solution of $\sqrt{5x-1} + \sqrt{x-1} = 2$ is:

   (A) $x = 1,\ x = 2$ **(B)** $x = \frac{2}{3}$ **(C)** $x = 2$ **(D)** $x = 1$ **(E)** $x = 0$

6. If $|x| = |y|$ and $x < 0$ and $y > 0$ then which of the following statements is false?

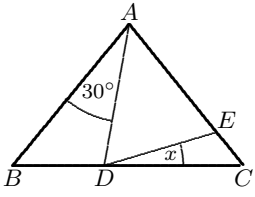
   (A) $x^2y > 0$ **(B)** $x + y = 0$ **(C)** $xy < 0$ **(D)** $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0$ **(E)** $\frac{x}{y} + 1 = 0$

7. The graph of $2x - y + 1 = 0$ intersects the graph of $y = x^2$ in the points A and B. The x co-ordinates of the points A and B are the solutions of the equation

   (A) $x^2 + 2x + 1 = 0$ **(B)** $x^2 - 2x - 1 = 0$ **(C)** $2x + 1 = 0$
   (D) $x^2 = 0$ **(E)** none of these

8. In the figure $\overline{AB} = \overline{AC}$, angle $BAD = 30^\circ$, and $\overline{AE} = \overline{AD}$. Then x equals:

   (A) $7\frac{1}{2}^\circ$ **(B)** 10° **(C)** $12\frac{1}{2}^\circ$ **(D)** 15° **(E)** 20°



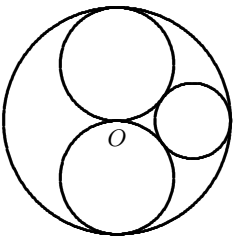
9. If $\log_2((\log_{16} 2)^{(\log_5 125)}) = -a$, the value of a is

$$\textbf{(A)}\ 0 \qquad \textbf{(B)}\ 1 \qquad \textbf{(C)}\ -3 \qquad \textbf{(D)}\ 6 \qquad \textbf{(E)}\ \tfrac{1}{4}$$

10. $\sin y + \sin(x - y) = \sin x$ for all y provided x is

$$\textbf{(A)}\ 60^\circ \qquad \textbf{(B)}\ 90^\circ \qquad \textbf{(C)}\ 180^\circ \qquad \textbf{(D)}\ 270^\circ \qquad \textbf{(E)}\ 360^\circ$$

11. A circle of radius 2 cm with centre O, contains three smaller circles as shown in the diagram; two of them touch each other at O, and the third touches each of the other circles. The radius of this last circle, in centimetres, is



$$\textbf{(A)}\ \tfrac{2}{3} \qquad \textbf{(B)}\ \tfrac{1}{2} \qquad \textbf{(C)}\ \tfrac{1}{3} \qquad \textbf{(D)}\ 1 \qquad \textbf{(E)}\ \tfrac{5}{6}$$

12. A deck of 16 cards contains the four aces, four kings, four queens and four jacks. The 16 cards are throughly shuffled and my opponent (who always tells the truth) draws two cards simultaneously and at random from the deck. He says "*I hold at least one ace.*" The chance that he holds two aces in his hand is

$$\textbf{(A)}\ \tfrac{1}{5} \qquad \textbf{(B)}\ \tfrac{3}{16} \qquad \textbf{(C)}\ \tfrac{1}{6} \qquad \textbf{(D)}\ \tfrac{2}{15} \qquad \textbf{(E)}\ \tfrac{1}{9}$$

13. The function $4x^2 - 12x - 1$:

$\textbf{(A)}$ always increases as x increases
$\textbf{(B)}$ always decreases as x decreases to 1
$\textbf{(C)}$ cannot equal 0
$\textbf{(D)}$ has a maximum value when x is negative
$\textbf{(E)}$ has minimum value of -10

14. If $S = i^n + i^{-n}$, where $i = \sqrt{-1}$ and n is an integer, then the total number of possible distinc values for S is:

$$\textbf{(A)}\ 1 \qquad \textbf{(B)}\ 2 \qquad \textbf{(C)}\ 3 \qquad \textbf{(D)}\ 4 \qquad \textbf{(E)}\ \text{more than } 4$$

15. $(x + 1)(x - 3)(x - 5) > 0$ if

$$\textbf{(A)}\ -1 < x < 2 \qquad \textbf{(B)}\ x < 2 \qquad \textbf{(C)}\ 3 < x < 5 \qquad \textbf{(D)}\ 1 < x < 5$$
$$\textbf{(E)}\ -1 < x < 2$$

Answers

1. b	2. b	3. e	4. e	5. d	6. d	7. b	8. d
9. d	10. e	11. a	12. e	13. e	14. c	15. e	

Angleške naloge za osnovnošolce

1. Of the following, which is the best estimate for the positive square root of $\frac{1983}{10000}$?

   (A) 0.0045 **(B)** 0.0141 **(C)** 0.0445 **(D)** 0.1408 **(E)** 0.4453

2. A car averages $40\ \mathrm{km/h}$ for $20\ \mathrm{km}$ and $60\ \mathrm{km/h}$ for another $20\ \mathrm{km}$. The time taken in minutes for the $40\ \mathrm{km}$ is

   (A) 24 **(B)** 48 **(C)** 50 **(D)** 120 **(E)** 200

3. The sum of three consecutive odd numbers is 27. The smallest of the three is

   (A) 10 **(B)** 9 **(C)** 7 **(D)** 5 **(E)** 3

4. The number halfway between $\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{5}$ is

   (A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{2}{8}$ **(C)** $\frac{3}{10}$ **(D)** $\frac{8}{15}$ **(E)** 1

5. $(0.3)^3 - (0.2)^2$ equals

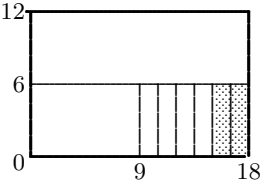
   (A) 0.08 **(B)** 0.013 **(C)** -0.013 **(D)** 0.0013 **(E)** -0.0013

6. Anne made 12 of her first 30 shots in the first three games of this basketball season, so her seasonal shooting average was 40 %. In her next game, she took 10 shots and raised her seasonal shooting average to 50 %. How many of these 10 shots did she make?

   (A) 2 **(B)** 3 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 8

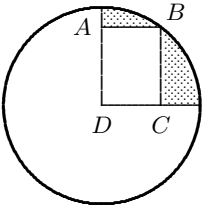
7. What fraction of the 12 by 18 rectangular region is shaded?

   (A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{12}$ **(C)** $\frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{1}{18}$ **(E)** $\frac{4}{17}$



8. $ABCD$ is a rectangle, D is the center of the circle, and B is on the circle. If $AD = 4$ and $CD = 3$, then the area of the shaded region is between

   (A) 4 and 5 **(B)** 5 and 6 **(C)** 6 and 7
   (D) 7 and 8 **(E)** 8 and 9



9. The smallest product one could obtain by multiplying two numbers in the set $\{-7, -5, -1, 1, 3\}$ is

(A) -35 **(B)** -21 **(C)** -15 **(D)** -1 **(E)** 3

10. Anne, Bret, Carl, and Donna are seated in a row on four seats numbered 1 to 4. Jack looks at them and says:
"*Bret is next to Carl.*"
"*Anne is between Bret and Carl.*"
However each one of Jack's statements is false. Bret is actually sitting in seat 3. Who is sitting in seat 2?

(A) Anne **(B)** Bret **(C)** Carl **(D)** Donna
(E) There is not enough information to be sure.

11. Which one of the following must be odd when n is an integer (a whole number)?

(A) $3n$ **(B)** $2n + 1$ **(C)** n^2 **(D)** n^3 **(E)** $n + 2$

12. $2x + 1 - 3(2 - x)$ simplifies to

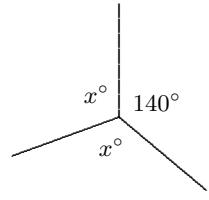
(A) $5x - 5$ **(B)** $-x - 5$ **(C)** $x - 5$ **(D)** $5 - x$ **(E)** $8x - 5$

13. The solution of the equation $3(x - 4) = 7x - 10$ is

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $5\frac{1}{2}$ **(C)** $2\frac{1}{2}$ **(D)** $1\frac{1}{2}$ **(E)** $-\frac{1}{2}$

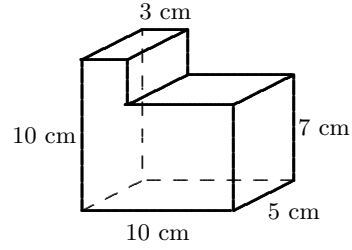
14. The value of x in the figure is

(A) 20 **(B)** 70 **(C)** 110 **(D)** 140 **(E)** 220



15. The rectangular block shown has surface area, in square centimetres, of

(A) 388 **(B)** 373 **(C)** 365
(D) 358 **(E)** 395



Glossary

square root	kvadratni koren	circle	krožnica
odd	lih	area	ploščina
rectangle	pravokotnik	surface area	površina

Answers

1. e	2. c	3. c	4. d	5. c	6. e	7. b	8. d
9. b	10. d	11. b	12. a	13. e	14. c	15. d	

Občinska matematična tekmovanja na Hrvaškem

N a l o g e

4. razred

1. Izračunaj: $603 \cdot 38 + 225 \cdot (514 - 476) + (15 + 23) \cdot 172 =$

2. Prikaži prvih deset naravnih števil s petimi dvojkami tako, da uporabiš seštevanje, odštevanje, množenje ali deljenje. (Na primer $0 = 2 : 2 + 2 : 2 - 2$.)

3. Trije dečki so imeli skupaj 2000 HRD. Odločili so se, da kupijo žogo. Ko je prvi dal za žogo 350 HRD, drugi 40 HRD manj kot prvi, tretji pa 40 HRD manj od polovice vsote, ki sta jo dala prvi in drugi, je vsakemu ostalo enako denarja. Koliko denarja je imel vsak na začetku?

4. Dolžina kraka enakokrakega trikotnika je za 3 cm večja od dolžine osnovnice. Izračunaj dolžine stranic trikotnika, če je obseg trikotnika 24 cm. Nariši trikotnik!

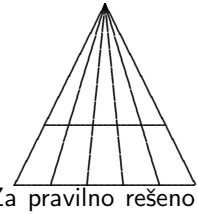
5. Štiri mačke v 4 dneh ulovijo 4 miške. V koliko dnevih bo 100 mačk ulovilo 100 mišk?

5. razred

1. V izrazu $7 \cdot 6 + 12 : 3 - 1$ postavi oklepaje tako, da bo vrednost novega izraza: a) 17, b) 27, c) 48, d) 35.

2. Poišči največje in najmanjše šestmestno število oblike $\overline{993abc}$, ki je deljivo tako s 6 kot 7.

3. Koliko je vseh daljic in koliko je vseh trikotnikov na sliki?



4. Zmnožek dveh števil je 1800. Če prvi faktor povečamo za 6, drugi pa ostane enak, bo novi zmnožek 2250. Kateri števili sta to?

5. Na nekem izpitu iz matematike je bilo zastavljenih 30 nalog. Za pravilno rešeno nalogo je učenec dobil 5 točk, za delno rešeno nalogo 3 točke, za nerešeno ali nepravilno rešeno nalogo pa sta se odšteli 2 točki.

Koliko nalog je pravilno rešil, koliko delno in koliko jih je rešil nepravilno učenec, ki je dobil 95 točk, če je za pravilno in nepravilno rešene naloge dobil 65 točk?

6. razred

1. Poišči vsa cela števila x, za katera je ulomek $\frac{2x+35}{x}$ tudi celo število.

2. Dve premici, ki se sekata v točki T, tvorita 4 kote. Vsota ostrih kotov je enaka polovici enega topega kota. Izračunaj velikosti vseh štirih kotov.

3. Trgovsko blago moramo zapakirati v zaboje. Če damo v vsak zaboj 14 kg blaga, bo ostalo izven zabojev 180 kg. Če damo v vsak zaboj 18 kg, bomo imeli 10 praznih zabojev.

Koliko kg trgovskega blaga imamo?

4. Pravokotnik in kvadrat imata enako ploščino. Stranica kvadrata je 1.6 krat večja od širine pravoktnika, dolžina pravokotnika pa je 12.8 cm. Izračunaj obsega kvadrata in pravokotnika.

5. Ante je nekega dne kupil 3 knjige. Za prvo je dal $\frac{1}{5}$ denarja, ki ga je imel, za drugo $\frac{3}{7}$ preostalega denarja in za tretjo $\frac{3}{5}$ denarja, ki mu je ostal po plačilu prvih dveh. Domov se je vrnil s 1600 HRD. Koliko denarja je imel Ante pred nakupom?

7. razred

1. Pet števil ima to lastnost, da če začnemo z najmanjšim, je vsako naslednje dvakrat večje od predhodnega. Vsota najmanjšega in največjega je za 9 večja od vsote drugih treh.

Katera so to števila?

2. Neko dvomestno število je deljivo s 3. Če med obe števki vpišemo 0 in nato temu tromestnemu številu prištejemo dvakratni zmnožek števke stotice, dobimo število, ki je 9 krat večje od prvotnega števila.

Katero dvomestno število ima to lastnost?

3. V enakostraničnem trikotniku ABC je točka P razpolovišče stranice $\overline{AB}$. Premica p, ki gre skozi točko P, in je vzporedna simetrali kota $\sphericalangle ACB$, seka premico BC v točki D, premico AC pa v točki E. Dokaži, da je trikotnik CDE enakokrak.

4. V treh posodah je voda. Če polovico vode iz prve posode prelijemo v drugo, potem pa tretjino tako dobljene tekočine prelijemo v tretjo posodo in na koncu četrtino tako dobljene vode iz tretje posode prelijemo v prvo posodo, bomo v vsaki posodi imeli 6 litrov vode. Koliko vode je bilo v vsaki posodi na začetku?

5. V enakokrakem trikotniku ABC velja $|AC| = |BC|$. Na podaljšku stranice $\overline{AB}$ preko oglišča A je izbrana točka D, na podaljšku iste stranice preko oglišča B pa točka E, tako da velja $|AD| = |AC|$ in $|BE| = |BC|$. Na podaljšku stranice $\overline{AC}$ preko oglišča A je izbrana točka F, tako da velja $|AF| = |AB|$. Razlika kotov $\sphericalangle DCE - \sphericalangle AFB = 120°$. Izračunaj notranje kote trikotnika ABC.

8. razred

1. Za katero vrednost x je razlika $(x - 0.1)^2 - (0.2x + 1)^2$ enaka 0?

2. Za linearno funkcijo $f(x) = \frac{9-m^2}{3}x + 3$ določi vrednost parametra m, tako da bo graf te funkcije vzporeden grafu funkcije, podane z enačbo $\frac{x-2}{9} - \frac{1-y}{27} = 1$.

3. Znotraj pravokotnika $ABCD$ je izbrana točka T, katere oddaljenosti od oglišč A, B in C so zaporedoma 15, 24 in 20. Kolikšna je oddaljenost točke T od oglišča D?

4. Če vsoti let dveh otrok dodamo zmnožek njunih let, dobimo 34. Koliko sta stara otroka?

5. Podan je kvadrat $ABCD$. Na stranici $\overline{BC}$ je dana točka M, na stranici $\overline{CD}$ pa točka N, tako da velja $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMN$. Kolikšen je kot $\sphericalangle MAN$?

R e š i t v e

4. *razred* : **1.** 38000. **2.** Naloga ima več rešitev. **3.** Dečki so imeli 700 HRD, 660 HRD in 640 HRD. **4.** Osnovnica trikotnika ima dolžino 6 cm, krak pa 9 cm. **5.** Sto mačk bo 100 mišk ulovilo v 4 dnevih.

5. *razred* : **1.** a) $(7{\cdot}6{+}12) : 3{-}1 = 17$, b)$(7{\cdot}6{+}12) : (3{-}1) = 27$, c) $7{\cdot}6{+}12 : (3{-}1) = 48$, d) $7 \cdot ((6+12) : 3-1) = 35$. **2.** Iskano število je 993006. **3.** Daljic je 48, trikotnikov je 30. **4.** Števili sta 24 in 75. **5.** Učenec je delno rešil 10 nalog, pravilno je rešil 15, ni pa rešil 20 nalog.

6. *razred* : **1.** Dani ulomek zapišemo kot $2+\frac{35}{x}$ in sklepamo $x \in \{-1, 1, -5, 5, -7, 7, -35, 35\}$. **2.** $\alpha = 36°$, $\beta = 144°$. **3.** Če je x število zabojev, dane pogoje zapišemo z enačbo $14x + 180 = 18(x - 10)$. Sledi $x = 90$. Blaga je 1440 kg. **4.** Obseg pravokotnika je 35.6 cm, obseg kvadrata pa 32 cm. **5.** Ante je pred nakupom imel 8750 HRD.

7. *razred* : **1.** Če je x najmanjše od teh števil, imamo opravka s števili x, $2x$, $4x$, $8x$, $16x$. Velja $x + 16x = 2x + 4x + 8x + 9$. Od tod dobimo $x = 3$. **2.** Pogoje zapišemo z enačbo $100a + b + 2a = 9(10a + b)$. Dano lastnost ima število 69. **3.** Pokaži, da ima trikotnik CDE dva enaka kota. **4.** Na začetku je bilo v prvi posodi 8 litrov, v drugi in tretji pa 5 litrov vode. **5.** Kota sta $40°$ in $100°$. Namreč $\sphericalangle DCA = \sphericalangle BCE = \frac{\alpha}{2}$, prav tako $\sphericalangle AFB = \frac{\alpha}{2}$ (pojasni!), torej velja $\sphericalangle DCE - \sphericalangle AFB = \frac{\alpha}{2} + \gamma + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 120°$, oziroma $\frac{\alpha}{2} + \gamma = 120°$. Če k tej enačbi dodamo $2\alpha + \gamma = 180°$, dobimo željeni rezultat.

8. *razred* : **1.** Imamo dve rešitvi: $x_1 = -\frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{11}{8}$. **2.** Če izenačimo smerna koeficienta (pogoj za vzporednost), dobimo $\frac{3-m^2}{3} = -3$. Rešitvi sta $m_1 = -3\sqrt{2}$, $m_2 = 3\sqrt{2}$. **3.** Iskana oddaljenost je 7. **4.** Zapišimo enačbo $x + y + xy = 34$ in jo preuredimo v $(x + 1)(y + 1) = 35$. Ker iščemo naravna števila, dobimo $x = 4$, $y = 6$. **5.** Narišimo pravokotnico iz točke A na premico MN, njeno nožišče pa naj bo točka P. Trikotnika $\triangle ABM$ in $\triangle AMP$ sta skladna, torej velja $|AB| = |AP| = |AD|$. Iz tega sledi, da sta tudi trikotnika APN in AND skladna. Če nadaljujemo s sklepanjem, bomo dobili $\sphericalangle MAN = 45°$.

Državno tekmovanje iz matematike za učence 7. in 8. razredov na Hrvaškem

N a l o g e

7. razred

1. Dani sta dve števili. Če enemu od teh števil prištejemo $\frac{3}{5}$, se bo njun zmnožek zmanjšal za 2. Če od drugega števila odštejemo $\frac{1}{2}$, se bo zmnožek povečal za 3. Kateri števili sta to in kolikšen je njun zmnožek?

2. Ko sta oče in mati skupaj imela 80 let, so bili njuni trije otroci stari 13, 10 in 6 let. Čez koliko let bo vsota starosti otrok 59 % starosti staršev? Koliko je bil takrat star oče in koliko mati, če je oče 4 leta starejši od mame?

3. Dani sta enačbi $\frac{z}{x+y} = 2$, $\frac{z}{y-z} = 3$, kjer je $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Kaj je več, x ali z? Pojasni!

4. Oče je nekaj denarja razdelil otrokom na tale način. Najstarejšemu je dal 1000 HRD in $\frac{1}{8}$ ostanka, drugi otrok je dobil 2000 HRD in $\frac{1}{8}$ novega ostanka, tretji je dobil 3000 HRD in $\frac{1}{8}$ novega ostanka, in tako naprej do najmlajšega. Pri tem je bil razdeljen ves denar in vsi otroci so dobili enako. Koliko denarja je razdelil oče? Koliko denarja je dobil vsak otrok in koliko otrok je bilo?

5. Podan je ostrokoten raznostraničen trikotnik ABC, pri čemer je $\sphericalangle ACB = 45°$. Točka N je nožišče višine spuščene iz oglišča B na stranico $\overline{AC}$, točka P pa je nožišče višine iz oglišča A na stranico $\overline{BC}$. Če z M zaznamujemo razpolovišče stranice $\overline{AB}$, dokaži, da je trikotnik MNP enakokrak in pravokoten.

8. razred

1. Reši enačbo $\frac{x^2}{x^2-9} = \frac{12-x}{x^2-9}$.

2. Naj bodo $x_0, x_1, x_2, ..., x_{1992}$ zaporedna cela števila in naj velja

$$-x_0 + x_1 - x_2 + x_3 - ... - x_{1990} + x_{1991} - x_{1992} = 1993$$

Koliko je x_{1992}?

3. V trikotniku ABC sta narisani težiščnici $\overline{AD}$ in $\overline{BE}$. Če je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABE = 30°$, dokaži, da je trikotnik ABC enakostraničen.

4. Razdalja med mestoma A in B je 60 km. Kolesar pelje iz mesta A v mesto B, in čim dospe v mesto B, se takoj odpelje nazaj v mesto A. Po eni uri vožnje iz mesta B se je ustavil, da bi se odpočil. Po 20 minutnem odmoru je kolesar nadaljeval pot s 4 km na uro večjo hitrostjo, tako da je pot iz mesta B v A opravil v enakem času kot pot iz A v B. S kakšno hitrostjo je kolesar peljal iz mesta A v mesto B?

5. Podan je trapez $ABCD$, kjer sta dolžini osnovnic $|AB| = 3$ cm in $|CD| = 2$ cm. Diagonali trapeza se sekata v točki S in delita trapez na 4 trikotnike. Ploščina trikotnika BCS je $P(BCS) = \frac{6}{5}$ cm^2. Kolika je ploščina vsakega od preostalih treh trikotnikov?

R e š i t v e

7. razred

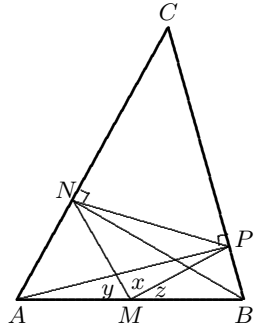
1. Označimo števili z a in b. Prvi pogoj lahko zapišemo z enačbo $(a+\frac{3}{5})\cdot b = ab-2$, to je, $ab+\frac{3}{5}\cdot b = ab-2$. Sledi $b=-\frac{10}{3}$. Iz drugega pogoja sledi $a(b-\frac{1}{2}) = ab+3$, to je $a=-6$. Zmnožek je 20.

2. Očitno je bil oče star 42 let, mati pa 38 let, ko sta bila stara 80 let. Naj bo po x letih vsota let otrok 59 % vsote njihovih staršev, to je $29+3x = 0.59(80+2x)$. Rešitev te enačbe je $x=10$. Tedaj je oče imel 52 let, mati pa 48 let.

3. Če izračunamo y iz obeh enačb, dobimo $y=\frac{z}{2}-x$ in $y=\frac{z}{3}+x$. Sledi $\frac{z}{2}-x=\frac{z}{3}+x$. Po urejevanju dobimo $z=12x$. Ker sta z in x pozitivna, je $z>x$.

4. Naj bo x vsota denarja, ki ga je razdelil oče svojim otrokom. Prvi otrok je dobil $1000+\frac{1}{8}(x-1000)$, to je $\frac{1}{8}x+875$. Drugi otrok je dobil $2000+\frac{1}{8}(x-\frac{1}{8}x-875-2000)$, torej $\frac{7}{64}x=\frac{13125}{8}$. Z izenačenjem vsot dobimo enačbo $\frac{1}{8}x+875=\frac{7}{64}x+\frac{13125}{8}$, oziroma $8x+56000=7x+105000$. Rešitev te enačbe je $x=49000$. Oče je torej razdelil 49000 HRD, otrok pa je bilo 7.

5. Po Talesovem izreku točke A, N, P in B ležijo na krožnici s premerom $\overline{AB}$ in središčem v M. Zato je $|MN|=|MP|$. Naj bo $\sphericalangle AMN=y$, $\sphericalangle NMP=x$ in $\sphericalangle BMP=z$. V trikotniku AMN velja $\sphericalangle MAN=\sphericalangle MNA=\alpha$, saj je trikotnik AMN enakokrak. Analogno velja $\sphericalangle MBP=\sphericalangle MPB=\beta$, ker je trikotnik MBP enakokrak. Ker je $\sphericalangle ACB=45^\circ$, je $\alpha+\beta=135$. Ker je $2\alpha+y=180^\circ$ in $2\beta+z=180^\circ$. Če seštejemo, dobimo $y+z=90^\circ$. Ker pa je $y+x+z=180^\circ$, sledi $x=90^\circ$, to je $\sphericalangle NMP=90^\circ$.

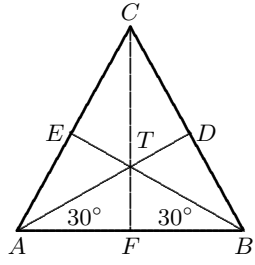


8. razred

1. Če sta ulomka enaka in imata enaka imenovalca, sta enaka tudi števca, to je $x^2=12-x$. To enačbo zapišemo v obliki $(x+4)(x-3)=0$. Ker pa je $x-3\neq 0$, je edina rešitev $x=-4$.

2. Ker velja $x_1=x_0+1$, sklepamo, da je $-x_0+x_1=-x_0+x_0+1=1$, to je $-x_2+x_3=1$, ..., $-x_{1990}+x_{1991}=1$. Na osnovi teh dejstev lahko podano enakost zapišemo kot $(-x_0+x_1)+(-x_2+x_3)+\ldots+(-x_{1990}+x_{1991})-x_{1992}=1993$, to je $996-x_{1992}=1993$. Sledi $x_{1992}=-997$.

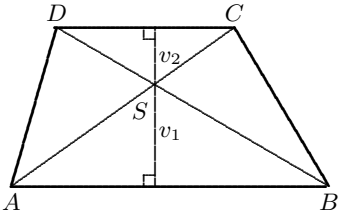
3. Naj bo točka T težišče trikotnika ABC, točka F pa razpolovišče stranice $\overline{AB}$ in $\overline{CF}$ tretja težiščnica. Ker je trikotnik ABT enakokrak, sledi $|AT|=|BT|$ in $TF\perp AB$, torej $\sphericalangle ATF=\sphericalangle BTF=60^\circ$. Zato v trikotniku AFT velja $|AT|=2|FT|$. Zaradi $|CT|=2|FT|$ sklepamo, da je $|AT|=|CT|$, kar pomeni, da je trikotnik ACT enakokrak in velja $\sphericalangle ATC=120^\circ$. Iz tega sledi, da je $\sphericalangle ACT=\sphericalangle CAT=30^\circ$, oziroma $\sphericalangle BAC=60^\circ$. Analogno je trikotnik BCT enakokrak, zaradi $\sphericalangle BTC=120^\circ$ pa sledi $\sphericalangle BCT=\sphericalangle CBT=30^\circ$, oziroma $\sphericalangle ABC=60^\circ$. Velja torej $\sphericalangle BAC=\sphericalangle ABC=\sphericalangle ACB=60^\circ$, trikotnik ABC je enakostraničen.



4. Bodi y hitrost kolesarja od A do B, x pa čas, ki ga je kolesar porabil na poti od B do A, vključno z odmorom. Od mesta B do mesta počitka je kolesar prevozil y kilometrov. Ker je bila njegova hitrost po odmoru $y+4$, čas, ki ga je prebil na poti od počivališča do A, pa je znašal $x-1\frac{1}{3}$ ur, lahko zapišemo enačbo $(y+4)(x-1\frac{1}{3})+y=60$. Po urejanju dobimo $3x^2-4x-15=0$, oziroma $(x-3)(3x+5)=0$. Pozitivna rešitev je $x=3$.

Iz A v B je kolesar vozil s hitrostjo 20 km na uro.

5. Iz dejstva, da imata trikotnika ABC in ABD skupno osnovnico in enaki višini, sledi, da imata enaki ploščini. Ker pa imata tudi skupen del, to je trikotnik ABS, velja $P(BCS)=P(ADS)=\frac{6}{5}\ \mathrm{cm}^2$. Naj bo $P(ABS)=a$, $P(CDS)=b$, v_1 višina trikotnika ABS na $\overline{AB}$ in v_2 višina trikotnika CDS na $\overline{CD}$. Iz $a=\frac{|AB|\cdot v_1}{2}=\frac{3\cdot v_1}{2}$ sledi $v_1=\frac{2}{3}a$. Iz $b=\frac{|CD|\cdot v_2}{2}=\frac{2\cdot v_2}{2}$ sledi $v_2=b$, oziroma $v_1+v_2=\frac{2}{3}a+b=v$, kjer je v višina trapeza.



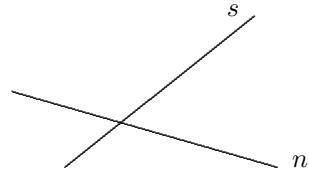
Ker je $P(ABC)=\frac{|AB|}{2}\cdot v=\frac{3}{2}\cdot(\frac{2}{3}a+b)=a+\frac{3}{2}b$ in še $P(ABC)=a+\frac{6}{5}$, velja $a+\frac{3}{2}b=a+\frac{6}{5}$, to je $b=\frac{4}{5}\ \mathrm{cm}^2$. Enako iz $P(BCD)=\frac{|CD|}{2}\cdot v=\frac{2}{3}a+b$ in $P(BCD)=b+\frac{6}{5}$ dobimo $\frac{2}{3}a+b=b+\frac{6}{5}$, to je $a=\frac{9}{5}\ \mathrm{cm}^2$.

ŠOLSKO TEKMOVANJE ZA BRONASTO VEGOVO PRIZNANJE V OBČINI LJUBLJANA MOSTE POLJE

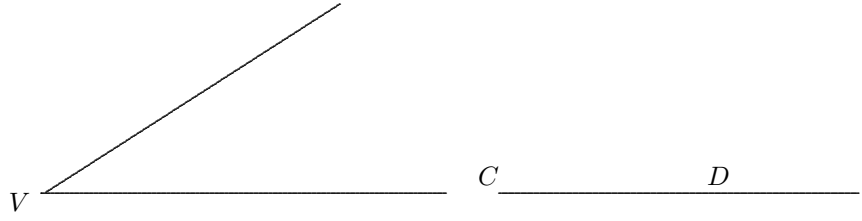
Kakor vsako leto, smo tudi v letu 1993 naloge za občinsko tekmovanje izbrali, priredili oziroma sestavili na sestanku občinskega aktiva. Učenci so na vseh šolah v občini $7.$ aprila prvi dve šolski uri reševali naslednje naloge:

5. razred:

1. Tone, Metka in Jure so skupaj nabirali gobe. Ko so se zbrali, so ugotovili, da mora Tone dati Metki 3 gobe in Metka Juretu 5 gob, da jih bo vsak od njih imel enako. To so tudi storili in vsak je imel v košari 16 gob. Koliko gob je kdo nabral?
2. Reši enačbo: $2316 - x = 2316 : (6^2 : 3 - 6)$.
3. Dani sta premici s in n. Nariši krožnico s polmerom 2.5 cm tako, da bosta premici s in n njeni tangenti.



4. V $5.$ razredu je 27 učencev. 9 učencev ima odličen uspeh, 12 učencev vzorno vedenje; 11 učencev nima niti odličnega uspeha niti vzornega vedenja. Koliko je v tem razredu učencev, ki imajo odličen uspeh in vzorno vedenje?
5. V notranjosti danega ostrega kota v vrhom V izberi točko V_1. Iz točke V_1 nariši poltraka pravokotno na kraka danega kota. Dobil si dva kota $\sphericalangle V$ in $\sphericalangle V_1$. Danima kotoma nariši skladna kota, ki imata skupen krak – poltrak CD. Primerjaj ju po velikosti.



6. razred:

1. Izračunaj vrednost izraza:

$$\left(\left(6\frac{3}{7} - 2\frac{12}{14}\right) \cdot 2.8 + 1.75\right) \cdot 20 + 1758 =$$

2. Na dvorišču so 3 race več, kot je mačk. Skupaj imajo 60 nog. Koliko je rac?

3. Pravokotno šolsko igrišče, ki je bilo 80 m dolgo in 48 m široko, so povečali tako, da so zvečali dolžino za 15%, širino pa za četrtino. Za koliko % je sedaj ploščina igrišča večja?

4. V trikotniku $\triangle ABC$ je $\alpha = 58°$ in $\beta = 84°$. Kolikšen je kot med simetralo kota γ in višino na stranico c?

5. Načrtaj enakokraki trapez, če je: $a = 6.5$ cm, $c = 3.6$ cm in $\alpha = 75°$.

7. razred:

1. Izračunaj vrednost izraza:

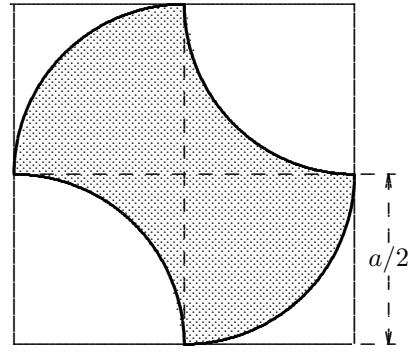
$$\frac{3.25 + 3 \cdot \frac{1}{5} - (-\frac{1}{2})^2}{3\frac{4}{5} - \frac{4}{5} \cdot (-1\frac{1}{4})} : \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 1 =$$

2. V trikotniku $\triangle ABC$ meri kot α $40°$, β pa $74°$. Nariši simetrali njunih zunanjih kotov in izračunaj kot, ki ga oklepata.

3. V koordinatnem sistemu nariši točki $A(5, -1)$ in $B(3, 3)$. Točki zrcali čez ordinatno os. Zapiši koordinati točk A' in B'. Nariši štirikotnik $ABB'A'$ in izračunaj njegovo ploščino.

4. Šola ima premoga za 90 dni, če ga porabi dnevno 700 kg. Po 30 dneh znižajo dnevno porabo na 525 kg. Za koliko dni bo zdaj zadoščala zaloga premoga?

5. Kvadratu s stranico a je včrtan lik, ki ga vidiš na sliki. Izrazi z a obseg in ploščino tega lika.



8. razred:

1. Izračunaj m, če veš, da sta enačbi $3x - 4m = \frac{1}{2}$ in $1.5 + \frac{x-5}{3} = \frac{3x}{2} - \frac{x-2}{6}$ ekvivalentni.

2. Določi notranje kote štirikotnika, če je drugi $\frac{4}{5}$ prvega, tretji $\frac{7}{8}$ drugega in četrti $\frac{5}{7}$ tretjega.

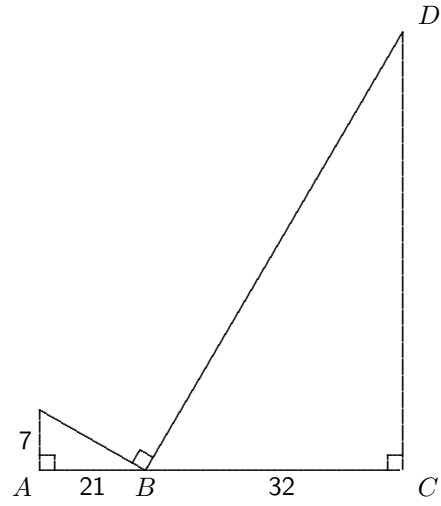
3. Za koliko % se spremeni prostornina kvadra, če se dolžina in širina povečata za 10%, višina pa se zmanjša za 10%?

4. V enakostraničnem trikotniku s stranico a je narisan krožni lok s središčem v oglišču C, ki razdeli trikotnik na dva ploščinsko enaka dela. Izrazi polmer loka s stranico a. Približno kolikšen del stranice a je polmer loka?

5. Opazovalec mora iz točke E določiti višino drevesa, ki je na sliki predstavljeno z daljico CD.

   a) Kolikšna je ta višina, če številke na sliki predstavljajo dolžine v dm?

   b) Izračunaj približek razdalje točke E od vrha drevesa D.



28. OBČINSKO TEKMOVANJE ZA SREBRNO VEGOVO PRIZNANJE

17. aprila 1993 se je 1740 šestošolcev, 1654 sedmošolcev in 1654 osmošolcev na občinskem tekmovanju potegovalo za srebrno Vegovo priznanje. Osvojilo ga je 591 učencev 6. razreda, 521 učencev 7. razreda in 643 učencev 8. razreda. Naloge, ki jih je izbrala republiška tekmovalna komisija, so bile:

6. razred:

1. Določi tisto najmanjše praštevilo, ki je delitelj vrednosti izraza $\Big(\big((8+7)\cdot 6+5\big)\cdot 4+3\Big)\cdot 2+1$. Odgovor utemelji z računom. (1 ni praštevilo.)

2. Reši enačbo
$$\left(\frac{3}{4}\cdot 2\frac{2}{3}-2.5:2\frac{1}{2}\right)\cdot x-\left(1.75-2\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{21}\right)\cdot\frac{2}{5}=1$$

3. Zaradi gripe je v 6.a razredu v torek manjkalo 10% učencev, v sredo $\frac{1}{6}$ učencev, v četrtek pa je bilo odsotnih kar 12 učencev.

   a) Koliko učencev je v 6.a razredu, če vemo, da jih ni več kot 32?

   b) Koliko učencev je bilo prisotnih v torek in koliko v sredo?

   c) Koliko odstotkov vseh učencev je bilo prisotnih v četrtek?

4. Nariši enakokraki trikotnik, če meri višina na krak $v_a = 4$ cm, kot med osnovnico in višino na krak pa $\varphi = 15^\circ$. Kot nariši s šestilom. Potek načrtovanja opiši.

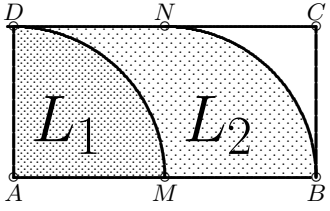
5. V trikotniku $\triangle ABC$ poznamo dva notranja kota $\sphericalangle A = \alpha = 30°$ in $\sphericalangle B = \beta = 45°$. Skozi oglišče B narišemo vzporednico r stranici AC. Izračunaj velikost ostrega kota, ki ga oklepata premica r in simetrala zunanjega kota ob oglišču C. Nariši skico, rešitev utemelji.

7. razred:

1. Reši enačbo $ax - 3x = -(a + b)$, če velja $a^2 = (-5)(-2) - (+3)(-5)$, $a > 0$ in $b - 1\frac{1}{8} = 7\frac{7}{8}$.

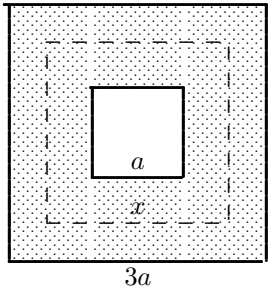
2. Določi najmanjše naravno število, ki je deljivo s 7 in da pri deljenju z 2, 3, 4, 5, in 6 ostanek 1.

3. Iz polne posode čistega alkohola odlijemo četrtino in dolijemo vode do roba. Nato odlijemo tretjino tekočine in spet prilijemo vodo do roba. Ali je sedaj v posodi več vode ali alkohola? Utemelji.



4. V pravokotniku $ABCD$ ($\overline{AB} = a = 20$ cm, $\overline{BC} = b = 10$ cm) sta včrtana lika L_1 in L_2. Točki M in N sta središči stranic AB in CD.
Izračunaj obsega in ploščini likov L_1 in L_2.

5. Stranica zunanjega kvadrata meri $3a$, stranica notranjega kvadrata pa a.
Izrazi z a stranico kvadrata, ki označeni okvir razdeli na dva ploščinsko enaka dela.



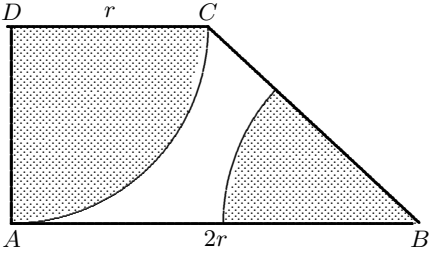
8. razred:

1. Reši enačbo

$$x + 0.5 = \frac{\frac{1}{10} + \frac{1}{100}}{x - 0,5}\ , \qquad x \neq 0,5$$

2. Morska voda vsebuje 5% soli. Koliko kg sladke vode je treba priliti 40 kg morske vode, da bo zmes vsebovala le 2% soli?

3. V pravokotnem trapezu $ABCD$ sta narisana dva loka z enakima polmeroma in središčema v B in D. Vsota ploščin krožnih izsekov je 24π cm^2. Koliko meri ploščina trapeza?



4. Osnovna ploskev pokončne prizme je romb s stranico a in kotom $\sphericalangle A = 120°$. Višina prizme je enaka daljši diagonali osnovne ploskve. Izrazi z a prostornino in površino prizme.

5. Koliko let ima Janez, ki je v letu 1993 star toliko, kot je vsota števk (cifer) njegove letnice rojstva?

Aleksander Potočnik

Rešitve nalog

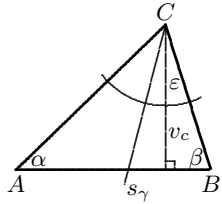
A – šolsko tekmovanje za bronasto Vegovo priznanje v občini Ljubljana Moste Polje

5. razred:

1. Tone je nabral 19 gob, Metka 18 in Jure 11.
2. $x = 1930$
3. Danima premicama narišemo vzporednici v razdalji $2,5$ cm. Središče iskane krožnice je v presečišču vzporednic. Možne so 4 rešitve.
4. Odličen uspeh in vzorno vedenje ima 5 učencev.
5. $\sphericalangle V_1 > \sphericalangle V$

6. razred:

1. Vrednost izraza je 1993.
2. Mačk je 9, rac pa 12.
3. Ploščina igrišča je večja za $43,75\%$.
4. $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 38^\circ$, $\varepsilon = 90^\circ - \beta = 6^\circ$. Iskani kot je $\frac{\gamma}{2} - \varepsilon = 13^\circ$.



5. Načrtamo osnovnico a in kota α in β, ki sta skladna. Nato narišemo simetralo osnovnice a, ki je tudi simetrala osnovnice c. Na osnovnici a označimo točki C' in D', ki sta od simetrale oddaljeni polovico dolžine osnovnice c in v točkah C' in D' konstruiramo pravokotnici na nosilko osnovnice a. V presečiščih pravokotnic s krakoma kotov α in β sta oglišči C in D.

7. razred:

1. Vrednost izraza je -7.
2. Simetrali oklepata kot 57°.
3. $A'(-5,-1)$, $B'(-3,3)$. Nastali štirikotnik $ABB'A'$ je enakokraki trapez, njegova ploščina pa meri 32 kvadratnih enot.
4. Zaloga premoga bo zadoščala za skupno 110 dni.
5. $o = \pi a$, $p = \frac{a^2}{2}$

8. razred:

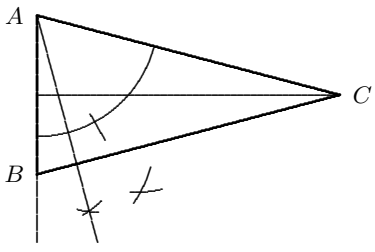
1. Izračunaj $m = -\frac{1}{2}$
2. $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 96^\circ$, $\gamma = 84^\circ$ in $\delta = 60^\circ$.
3. Prostornina kvadra se poveča za $8,9\%$.
4. Iz pogojev naloge sledi $\frac{\pi r^2}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\cdot 2}$ in odtod dobimo $r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}}$. Polmer loka je približno $\frac{16}{25}$ stranice a.

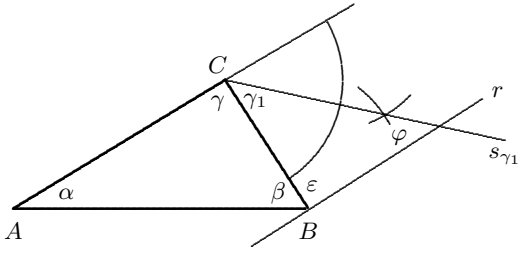
5. Iz podobnih trikotnikov $\triangle EAB$ in $\triangle BCD$ dobimo višino drevesa 96dm, po Pitagorovem izreku pa približek razdalje točke E od vrha drevesa D $103,6$ dm.

B – 28. občinsko tekmovanje za srebrno Vegovo priznanje

6. razred

1. $(((8+7)\cdot 6+5)\cdot 4+3)\cdot 2+1 = 767$, $767 = 13\cdot 59$. Najmanjše tako praštevilo je 13.
2. $x = 1\frac{1}{2}$
3. (a) $x \in V_{10} \ \wedge \ x \in V_6 \implies x = 30$. V 6.a razredu je 30 učencev.
   (b) V torek je bilo prisotnih 27, v sredo pa 25 učencev.
   (c) V četrtek je bilo prisotnih 60% učencev.
4. Narišemo nosilko osnovnice in izberemo A. Nato narišemo φ in v_a. Narišemo še nosilko kraka, ki seka nosilko osnovnice v B. Presek nosilke kraka in simetrale osnovnice je C. Narišemo AC (slika levo spodaj).





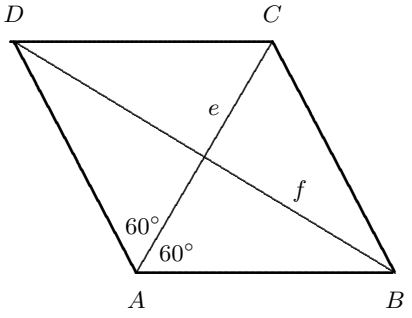
5. Glej desno sliko zgoraj: $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$. $\gamma_1 = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$ (sokota). $\varepsilon = \gamma = 105^\circ$ (izmenična). $\varphi = 180^\circ - \varepsilon - \frac{\gamma_1}{2} = 180^\circ - 105^\circ - 37^\circ 30' = 37^\circ 30'$.

7. razred

1. $a = 5$, $b = 9$, $x = -7$
2. $v(2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6) = 2^2\cdot 3\cdot 5 = 60$, $301 = 7\cdot 43$. Najmanjše tako število je 301.
3. V posodi je ostalo $\frac{3}{4}$ alkohola. Ko smo spet odlili tretjino tekočine, smo odlili četrtino alkohola. $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
   Skupaj smo odlili polovico alkohola in ga nadomestili z vodo. V posodi je torej obojega enako.
4. L_1: $o = (20+5\pi)$ cm, $p = 25\pi$ cm^2
   L_2: $o = (20+10\pi)$ cm, $p = 100$ cm^2
5. $p_v = 9a^2$, $\quad p_m = a^2$
   $p_{okv} = 8a^2$
   $x^2 = \frac{8a^2}{2} + a^2 = 5a^2$
   $x = a\sqrt{5}$

8. razred

1. $x_1 = 0,6$, $x_2 = -0,6$
2. $\frac{5}{100} \cdot 40 = \frac{2}{100} \cdot (x + 40)$, $x = 60$. Priliti je treba 60 kg sladke vode.
3. $\sphericalangle B = 45°$, zato je $\frac{\pi r^2}{4} + \frac{\pi r^2}{8} = 24\pi$, odtod pa dobimo $r = 8$ cm. $p = r^2 + \frac{r^2}{2}$ $(ali\ p = \frac{2r+r}{2} \cdot r = \frac{3r^2}{2}) = 96$ cm^2.
4. $e = a$, $f = a\sqrt{3}$, $v = a\sqrt{3}$. Zato je $V = \frac{ef}{2} \cdot v = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{2}$ in $P = 2 \cdot \frac{ef}{2} + 4av = a \cdot a\sqrt{3} + 4a \cdot a\sqrt{3} = 5a^2\sqrt{3}$



5. Janez je gotovo rojen v tem stoletju, ker vsota števk ne more biti večja od 27 $(= 1 + 9 + 8 + 9)$ in ne manjša od 10 $(= 1 + 9 + 0 + 0)$. Dobimo enačbo $1 + 9 + x + y = 1993 - (1900 - 10x - y)$, odtod pa $y = \frac{83 - 11x}{2}$. Sklepamo, da mora biti x lih, sicer $y \notin \mathbb{N}$. Naredimo preglednico

x	1	3	5	7
y	36	25	14	3

Ker x in y označujeta števki, je Janez rojen leta 1973, torej je star 20 let.

Aleksander Potočnik

RAZVEDRILNA MATEMATIKA PO SVETU

Tokrat bomo vzeli nekaj nalog iz knjige *M. Gardner, Perplexing Puzzles and Tantalizing Teasers*, Dover Publications. V knjigi bomo sicer našli 93 nalog, izbrali pa smo nekaj težje prevedljivih.

1. Find the hidden animals

In each of the sentences below, the name of an animal is concealed. The first sentence is marked so you can see how the word "*dog*" is hidden. Can you find the animal in each of the other sentences?

1. What shall I do, Gertrude?
2. Asking nutty questions can be most annoying.
3. A gold key is not a common key.
4. Horace tries in school to be a very good boy.
5. People who drive too fast are likely to be arrested.
6. Did I ever tell you, Bill, I once found a dollar?
7. John came late to his arithmetic class.
8. I enjoy listening to music at night.

2. Unscramble the beast

The boy at the zoo started to call out the name of the animal he saw, but he became so excited that he got his words all mixed up. See if you can take all twelve of the letters in "*Oh, it's a pom pup!*" and rearrange them to make a single word that will be the name of the huge beast the boy is pointing to.

3. The puzzling barbershop sign

The owner of a barbershop likes puzzles and jokes, so he put the sign

WHAT DO YOU THINK
I'LL SHAVE YOU FOR NOTHING
AND GIVE YOU A DRINK

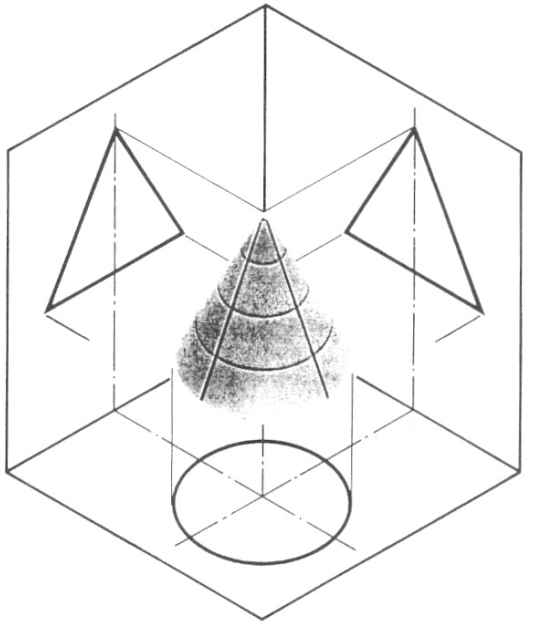
at the top of his window. When customers come in to ask for a free shave and drink, he explains that the artist who made the sign for him forgot to add the proper punctuation. See if you can add one exclamation mark and one question mark, each at the right spot in the sign, so that the sign expresses the barber really wants to say to his customers.

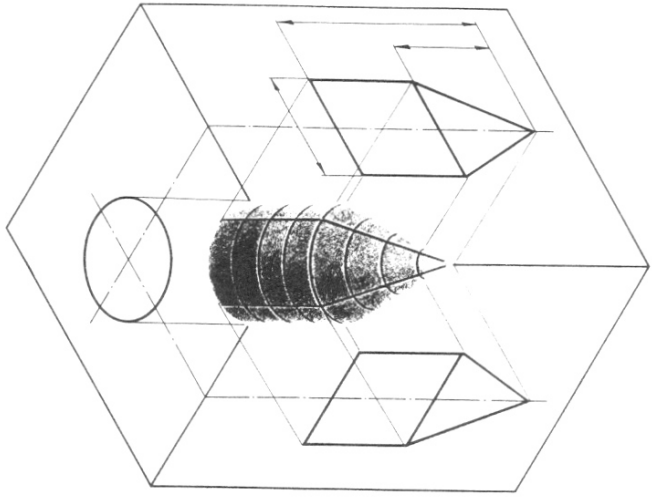
Answers

1. dog, gnu, monkey, beaver, bear, lion, camel, cat.
2. hippopotamus
3. WHAT! DO YOU THINK I'LL SHAVE YOU FOR NOTHING AND GIVE YOU A DRINK?

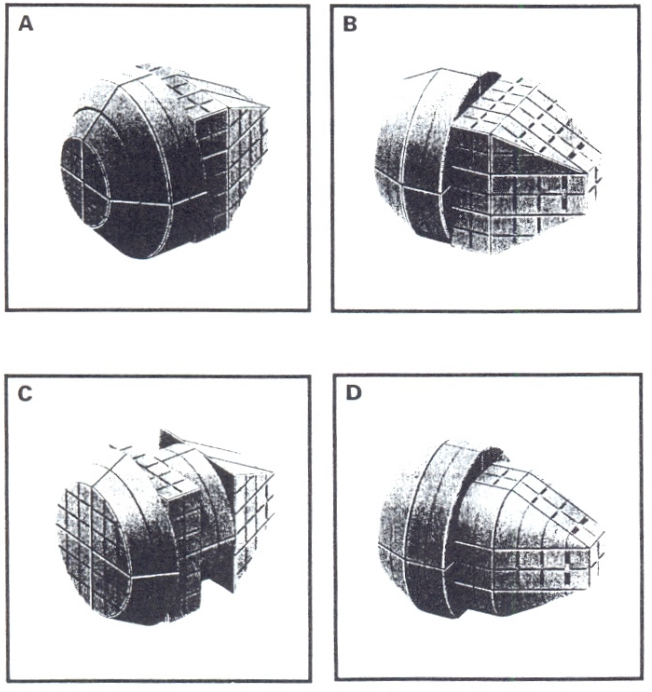
Fishergeometric

Četrti del kompleta sestavljajo deli stožcev in stožčaste odprtine, našli pa bomo tudi dele valja. Tako bomo lahko sestavili enostavne primere, ki so podani skupaj s projekcijami.





Skupaj z ostalimi deli pa lahko sestavimo dokaj zanimiva osnosimetrična telesa:



Odprtine običajno modeliramo tako, da prikažemo prerez:

