TRETJI LETNIK — 1993–1994 – 2

LOGIKA

&

RAZVEDRILNA MATEMATIKA

Revijo sta za splet pripravila Nada in Marko Razpet
na podlagi datotek, ki jih je izdelal Darjo Felda.

Spoštovane bralke in bralci!

Do začetka novembra smo pridobili 2100 naročnikov in če vas bo toliko tudi plačalo naročnino, smo dosegli pogoj za normalnejše izhajanje.

Dva bralca sta nam že poslala svoje naloge na razpis za najboljšo logično nalogo, zato vas prosim, da daste mnenje o njunih prispevkih.

Izidor Hafner

V S E B I N A

Logične naloge 3

Rešitve logičnih nalog 9

Pisma bralcev 12

Nagradne logične naloge 13

Šola logike – Reševanje logičnih nalog s pomočjo simbolne logike 16

Bilten *4. državnega tekmovanja v razvedrilni matematiki*

Srednješolska priloga

Mednarodno iskanje matematičnih talentov 21

Angleške naloge za srednješolce 29

Angleške naloge za osnovnošolce 32

Naloge za najmlajše 35

Fishergeometric 37

Izdaja: Založniško podjetje LOGIKA d.o.o., Svetčeva 11, 61240 Kamnik,
št. žiro računa: $50140 - 603 - 57434$

Za izdajatelja: Izidor Hafner

Revija *Logika & Razvedrilna matematika* je vpisana v register časopisov pri *Ministrstvu za informiranje* pod registrsko številko *949*. Po mnenju *Ministrstva za informiranje* št. *23/89–92* šteje revija *Logika & Razvedrilna matematika* med proizvode informativnega značaja, za katere se plačuje davek od prometa po stopnji 5%.

Revijo *Logika & Razvedrilna matematika* subvencionira *Ministrstvo za šolstvo in šport*

Člani časopisnega sveta: prof. dr. Frane Jerman, prof. dr. Tomaž Pisanski in Darjo Felda, prof.

Strokovni pokrovitelj: Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko – Oddelek za teoretično računalništvo

Glavni in odgovorni urednik: dr. Izidor Hafner

Sodelavci: Marija Božnar, Jasna Bratanič, Breda Cestnik, Urša Demšar, Gregor Dolinar, Urška Drčar, Petra Ipavec, Alenka Kavčič, Dušanka Kocić, Jana Kristanc, Katka Kurent, Meta Lah, Nina Milač, Nika Novak, Hiacinta Pintar, Maja Pohar, Darja Polak, Tanja Soklič, Mirjana Todorovič, Aleš Vavpetič in Metka Žnidar

Jezikovni pregled: računalniški program *Besana*

Generalni sponzor: Marand d.o.o., zastopstvo Borland

Sponzorji: Državna založba Slovenije, Mlacom d.o.o., Mlakar & Co, Časopisno podjetje *Dnevnik*, NIL d.o.o., IR Electronic

Obdelava podatkov na računalniku firme *Mlacom* s programskim paketom PARADOX 3.5

Tisk: Tiskarna "Planprint", Rožna dolina c. IV/32–36, Ljubljana

Ilustrirala: Ana Hafner

Naklada: 2600 izvodov

© 1993 LOGIKA d.o.o.

ISSN $0354 - 0359$

LOGIKA & RAZVEDRILNA MATEMATIKA
letnik *III*, št. 2, 1993/94

Cena revije: v prosti prodaji 300 SIT, za naročnike 220 SIT in vključuje 5% prometni davek

LOGIČNE NALOGE

1. VRTNARJI

Štirje prijatelji, priznani vrtnarji, so se srečali na sejmu. Novinar je intervjujal vsakega izmed njih, ker pa si pogovorov ni zapisoval, se je doma spomnil le nekaj podrobnosti. Poskusi ugotoviti ime, priimek vrtnarja, njegovo najljubšo vrsto cvetja, barvo rože, čas njenega cvetenja in škodljivca, ki povzroča preglavice vsakemu vrtnarju posebej.

1. Nageljnom se sušijo listi.
2. Roza rože so Barbarine.
3. Gospod Rutar daleč naokrog slovi po čudovitih astrah, le teh ne ogrožajo gosenice.
4. Roža, katero ogrožajo hrošči, cveti aprila.
5. Gorazd se piše Leban.
6. Majsko cvetje je rumeno.
7. Božičevo ali Božičino cvetje je najlepše marca, ko cveti.
8. Ani nagajajo uši, vendar te niso na rdečih vrtnicah.

PRIIMEK: Leban, Rutar, Manfreda, Božič;
IME: Gorazd, Tone, Barbara, Ana;
IME CVETJA: vrtnice, astre, gladiole, nageljni;
BARVA CVETJA: rumena, roza, oranžna, rdeča;
ČAS CVETENJA: marec, april, maj, junij;
ŠKODLJIVCI: gosenice, uši, hrošči, sušenje listov.



2. NENAVADNO ODKRITJE

V južnem predelu Afrike so raziskovalci odkrili neko pleme o katerem niso vedeli še ničesar. Želeli so ga bolje spoznati, da bi o njem lahko napisali poročilo. Poleg njihovih navad, običajev in verovanja jih je zanimala tudi njihova sposobnost računanja. Vprašali so jih, koliko je 9×8. Vendar so na njihovo veliko začudenje dobili odgovor 52. Ko pa so jim postavili še več vprašanj so ugotovili, da je bil njihov izračun pravilen.

Kakšen odgovor bi dobili, če bi temu plemenu zastavili vprašanje: koliko je $114 + 23$?



3. IGRANJE TAROKA

Štirje prijatelji različnih poklicev so se zbrali pri Bojanu, da bi igrali tarok. Ko so se posedli okrog mize, si je vsak zaželel drugačno pijačo. Poskusi ugotoviti poklic, pijačo, ki jo je pil, ter mesto, ki ga je zasedel pri mizi vsak izmed njih.

1. Dani, ki je po poklicu ključavničar in njegov prijatelj, ki je sedel na mestu B in pil teran, si nista sedela nasproti.
2. Cenetov desni sosed je pil pivo, po poklicu pa je zidar.
3. Anže je sedel nasproti prijatelja, ki je po poklicu mizar. Anže ni pil viskija.
4. Bojan, ki je lastnik hiše, je sedel na čelu mize, torej na mestu A.

IME: Anže, Bojan, Cene, Dani;
POKLIC: ključavničar, mizar, zidar, učitelj;
PIJAČA: radenska, teran, pivo, viski.

4. ŠPORT, HOBI IN ŠE KAJ

Ana, Vesna, Tomaž, Boris in Matic se sicer ne poznajo, pa vendar imajo vsi nekaj skupnega. Vsak si po en dan v tednu vzame za šport (plavanje, tenis, aerobika), en dan za svojo miselno igro (šah, bridge, go) in en dan za svojo družino. Seveda moraš ugotoviti, kateri dan si je vsak izbral za katero stvar. Veš pa kar precej:

1. Nobena dva nimata športa na isti dan v tednu. Ravno tako velja za miselno igro in za družino.
2. V petek in v nedeljo nima nihče ničesar.
3. Tisti, ki igrajo tenis, igrajo tudi bridge.
4. Ana gre plavat dva dneva za tem, ko igra go.
5. Šah pade na torek in na četrtek.
6. Matic gre na tenis dva dneva po tem, ko je z družino.
7. Tomaž igra bridge takrat, ko ima Vesna aerobiko.
8. Boris je z družino v sredo, s športom pa se ukvarja dan za tem, ko je z družino Tomaž.
9. Edino go in aerobika nastopita enkrat.

5. TEKMOVANJA

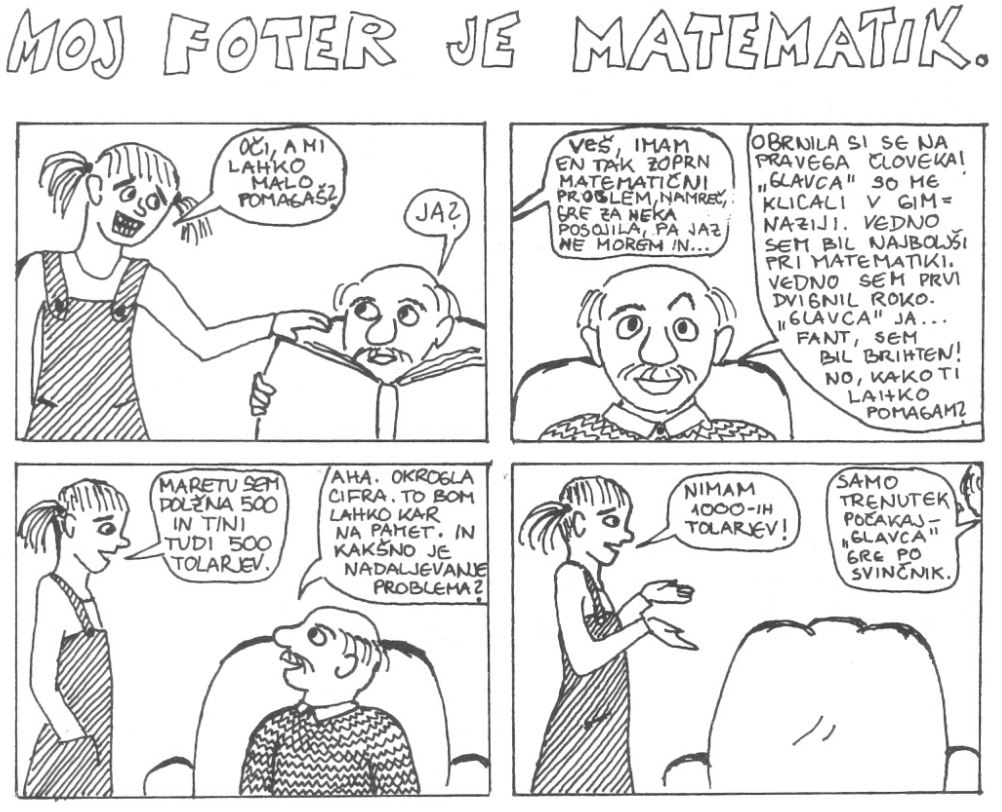
Pet prijateljev je prišlo na neko zabavo iz petih različnih mest (eden iz Celja). Na zabavi so priredili tudi tekmovanja, katerih so se vsi udeležili (vsak je tekmoval v drugi disciplini). Ali lahko s pomočjo naslednjih trditev ugotoviš ime vsakega, mesto, iz katerega prihaja, njegov poklic in disciplino, v kateri je tekmoval?

1. Tekmovalec iz Jesenic je po poklicu zdravnik.
2. Predavatelj ni tekmoval v plavanju.
3. Mateja ni prišla iz Ljubljane.
4. Peter, ki je prišel iz Maribora, ni delal slončkov iz marcipana.
5. Tekmovalec iz Krškega, ki je tekmoval v teku na 60 m, ni Blaž, ki je po poklicu socialni delavec.
6. Direktor tovarne je tekmoval v napihovanju balonov. Ime direktorja ima eno črko več kot ime ravnatelja, ki ni Miha.
7. Irena je tekmovala v krašenju torte.

6. GLASBENO NADARJENE

Celotna družina Melodija je zelo glasbeno nadarjena. Vsa dekleta se učijo različne inštrumente (ena harmoniko) in vsaka hodi k drugemu profesorju (ena h gospe Golob). Ali lahko iz naslednjih trditev ugotoviš ime vsake deklice (ena je Eva), inštrument, ki ga igra, profesorja, ki jo uči, in razred, ki ga obiskuje (od 1 do 5)?

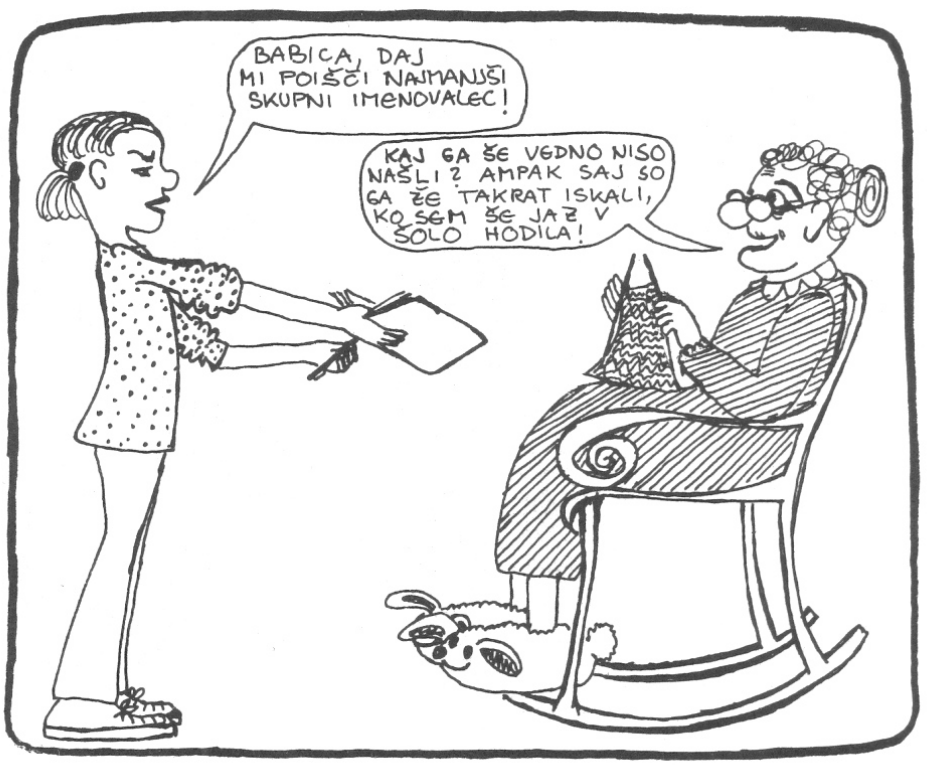
1. Cilka se uči pri gospe Erzar inštrument z lihim številom črk v imenu.
2. Barbara, ki se uči klavir, je v višjem razredu, kakor učenka gospoda Dolinarja.
3. Kitaristka hodi v 2. razred, violinistka pa ne obiskuje 4. razreda.
4. Učenka gospe Bobnar, ki igra bas, je v nižjem razredu, kakor učenka, ki hodi v razred gospe Erzar.
5. Daša ne hodi v 2. ali 4. razred.
6. Ana je najstarejša in hodi v najvišji razred; ne igra violine in ni učenka gospoda Cetina.



7. KUŽKI V DNEVNI SOBI

Moja prijateljica ima pet kužkov. Vsak je drugačne pasme (eden je čivava) ina vsak ima svoj kotiček za spanje v dnevni sobi (en najraje spi na preprogi). Ko sem včeraj prišla k njej, so ravno vsi spali, najbolj spokojno pa sta smrčala Živa in Miki. Ali lahko iz naslednjih trditev ugotoviš ime vsakega kužka, njegovo pasmo, barvo ovratnice in njegov priljubljeni kotiček v dnevni sobi?

1. Kokeršpanjelka z rdečo ovratnico ni spala ne v kotu ne v fotelju.
2. Tačka je pasme čoučou. Ni kuža z zeleno ovratnico, ki je spal v košari.
3. Pudel nima roza ovratnice in ni spal v fotelju.
4. Pega z modro ovratnico prav tako ni spala v fotelju.
5. Riki je počival na kavču. Nima rumene ovratnice in ni maltežan.



8. DRUŽINA DIVJAK

Na prelomu stoletja je bila napisana serija knjig o družini, ki se je pisala Divjak. Iz spodaj podanih namigov ugotovi, v kakšnem vrstnem redu so bile napisane knjige, kateri moški član družine Divjakovih je junak vsake izmed knjig in kakšna je njegova zaposlitev!

Knjige: Divjak, Divji tek, Divjakov poseg, Divje noči, Divjanje;
Člani družine: Borut, Ciril, Jakob, Konrad, Rupert;
Zaposlitev: čuvaj na plaži, ribič, pilot, tihotapec, rudar.

1. V knjigi "Divjakov poseg" je glavni junak član družine, ki je bil tihotapec.
2. Borut, čuvaj na plaži, je junak knjige, ki je v seriji na lihem mestu (1,3 ali 5), medtem ko je knjiga, ki opisuje dogodivščine rudarja, na sodem mestu (2 ali 4).
3. Ribič ni junak ne druge in ne tretje knjige o družini Divjak.
4. Pilot je junak knjige, ki je izšla po knjigi "Divjanje".
5. Knjiga "Divjanje" govori o dogodivščinah Ruperta.
6. Četrti knjigi je naslov "Divje noči" in v njej ne nastopa Ciril.
7. V prvi knjigi je junak Jakob.
8. Knjiga "Divji tek" ni bila napisana zadnja.



Rešitve logičnih nalog

1. VRTNARJI

Gorazd se piše Leban (5), zato je gospod Rutar, ki goji astre, lahko le Tone. Ker se nageljnom sušijo listi (1), Rutar goji astre, ima Ana, ki ne goji rdečih vrtnic, bori pa se z ušmi (8), lahko le gladiole. Ker Barbara vzgaja roza cvetje (2), Leban Gorazd pa goji rdeče vrtnice, se Barbara bori proti sušenju listov na nageljnih. Vemo, da se astram Toneta Rutarja ne sušijo listi in jih ne napadajo uši, zaradi (3) pa odpadejo tudi gosenice, zato astre napadajo hrošči; iz tega sledi, da astre cvetijo aprila (4). Potemtakem astre niso rumene rože, katere cvetijo maja (6), ampak oranžne. Rumene gladiole goji Ana. Z izločevanjem dobimo, da mora Gorazd na svojih rožah uničevati gosenice. Božičeva, kateri cvetje cveti marca (7), ne more biti Ana, zato je Barbara. Po nadaljnem izločanju izvemo, da se Ana piše Manfreda in da Gorazdovo cvetje cveti junija.

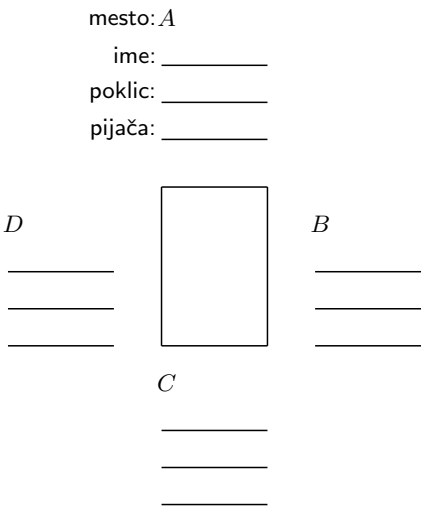
LEBAN, Gorazd, vrtnice, rdeče, junij, gosenice;
RUTAR, Tone, astre, oranžne, april, hrošči;
MANFREDA, Ana, gladiole, rumene, maj, uši;
BOŽIČ, Barbara, nageljni, roza, marec, sušenje listov.

2. NENAVADNO ODKRITJE

V tej nalogi ne gre za računanje s števili našega desetiškega sistema, temveč pleme odgovarja v sistemu z osnovo x: $9 \cdot 8 = 5 \cdot x + 2 \;\Rightarrow\; x = 14$

zato bi bil odgovor: $114 + 23 = 1 \cdot 14 + 1 \cdot 14 + 4 + 2 \cdot 14 + 3 = 245$

3. IGRANJE TAROKA



Bojan sedi na mestu A (4). Dani, ki je po poklicu ključavničar, ni moški, ki pije teran in sedi na mestu B, niti ne sedi na mestu D (1), zato sedi na mestu C. Cenetov desni sosed, ki pije pivo in je zidar (2), ne more sedeti ne na mestu D in ne na C, ker sta A in C že zasedeni. Dani je ključavničar, zato Cenetov desni sosed lahko sedi le na mestu A in je Bojan. Iz (2) izvemo, da Cene sedi na mestu B, Anžetu ostane mesto D. (3) nam pove,da je Cene mizar. Anže ne pije viskija (3), zato pije radensko, viski pa ostane Daniju. Anže je učitelj.

mesto A: Bojan, zidar, pivo;
mesto B: Cene, mizar, teran;
mesto C: Dani, ključavničar, viski;
mesto D: Anže, učitelj, radenska.

4. ŠPORT, HOBI IN ŠE KAJ

	PONED.	TOREK	SREDA	ČETRTEK	PETEK	SOBOTA	NEDELJA
Ana	plava	družina				go	
Vesna		šah	aerobika			družina	
Tomaž	družina		bridge	tenis			
Boris		plava	družina	šah			
Matic	bridge			družina		tenis	

5. TEKMOVANJA

Blaž je socialni delavec (5). Ravnatelju ni ime Miha (6), torej je Peter ali Irena, direktor tovarne pa je Mateja, ki je tekmovala v napihovanju balonov. Peter iz Maribora ni delal slončkov iz marcipana (4), tekmovalec iz Krškega je tekmoval v teku (5), Irena pa v krašenju torte (7), torej je Peter tekmoval v plavanju. Vemo, da Peter ni direktor tovarne ali socialni delavec, niti ne zdravnik iz Jesenic (1). Prav tako ne more biti predavatelj (2), torej je ravnatelj. Blaž ni tekmoval v teku (5), potemtakem je izdeloval slončke iz marcipana, tekmovalec iz Krškega, ki je tekel, pa mora biti Miha. Zdravnik iz Jesenic je lahko le Irena, Miha pa je predavatelj. Mateja ni iz Ljubljane (3), torej je iz Celja, Blaž pa je socialni delavec iz Ljubljane.

Blaž	Ljubljana	socialni delavec	slončki iz marcipana
Miha	Krško	predavatelj	tek na 60 metrov
Irena	Jesenice	zdravnik	krašenje torte
Peter	Maribor	ravnatelj	plavanje
Mateja	Celje	direktor tovarne	napihovanje balonov

6. GLASBENO NADARJENE

Barbara igra klavir (2), kitaristka pa hodi v 2. razred (3). Ana, ki hodi v 5. razred (6), ne more biti učenka gospe Bobnar, ki igra bas (4), in ne igra violine (6), torej igra harmoniko. Ne uči je g. Cetin (6) in ne g. Dolinar (2). Cilko uči ga. Erzar (1), torej Ano uči ga. Golob. Vemo, da v 2.razred kitare ne hodi Barbara, prav tako ne Cilka (1) ali Daša (5), ostane torej Eva. Sedaj poznamo učenke ali inštrumente treh učiteljic. Barbara, ki igra klavir, ni učenka g.Dolinarja (2), torej jo mora učiti g.Cetin.

Gospa Bobnar uči bas, zato ne uči Eve, ki igra kitaro, torej Evo uči g.Dolinar, gospa Bobnar pa uči Dašo. Daša igra bas, violino pa Cilka. V prvi razred ne hodi Barbara (2) ali Cilka (4), ostane Daša. Cilka ne hodi v 4.razred (3), torej hodi v 3. razred, 4. razred pa obiskuje Barbara.

Ana	ga. Golob	harmonika	5. razred
Barbara	g. Cetin	klavir	4. razred
Cilka	ga. Erzar	violina	3. razred
Daša	ga. Bobnar	bas	1. razred
Eva	g. Dolinar	kitara	2. razred

7. KUŽKI V DNEVNI SOBI

Kokeršpanjelka z rdečo ovratnico ni spala ne v kotu ne v fotelju (1). Ker je psička, ne more biti Riki, ki je spal na kavču (5). Pes z zeleno ovratnico je spal v košari (3), torej je kokeršpanjelka spala na preprogi. Tačka je pasme čoučou (2), Pega pa ima modro ovratnico (4), torej je kokeršpanjelka z rdečo ovratnico Živa. Sedaj poznamo barve ovratnic, ki se navezujejo na imena ali pasme, torej mora imeti Riki, ki je spal na kavču in nima rumene ovratnice (5), roza ovratnico.

Pega ni spala v kotu (4), torej je spala v fotelju. Kuža, ki je spal v kotu, ima rumeno ovratnico. Riki ni maltežan (5) in tudi ni pudel (3), torej je čivava. Pega, ki je spala v fotelju, ravno tako ni

pudel (3), torej je maltežan, pudel pa je Miki. Tačka ni spala v košari (2), spala je v kotu, Miki je torej kuža z zeleno ovratnico, ki je spal v košari.

8. DRUŽINA DIVJAK

Junak prve knjige je Jakob (trditev 7) in četrti knjigi je naslov Divje noči (trditev 6). Po trditvah 4 in 5 torej knjiga Divjanje, katere junak je Rupert, ne more biti peta, in je lahko le druga ali tretja. Zato Rupert ne more biti ribič (3). Čuvaj plaže je Borut (2) in tihotapec je junak knjige Divjakov poseg (1). Rupert ni pilot (4), torej je rudar. Zato knjiga, v kateri nastopa, ne more biti tretja (2) in je torej druga. V tretji knjigi je junak torej pilot (4). Zdaj vemo, da junak četrte knjige ni rudar, pilot ali tihotapec, pa tudi ne čuvaj plaže, zato je junak četrte knjige ribič. Zdaj poznamo imena ali zaposlitve junakov prvih štirih knjig, torej je junak pete knjige Borut. Zdaj vemo zaposlitve junakov v knjigah od dva do pet, torej je Jakob tihotapec v knjigi Divjakov poseg, ki je prva knjiga v seriji. Peta knjiga ni Divji tek (8), torej je peta knjiga Divjak in je Divji tek tretja knjiga, v kateri je junak pilot. V Divjih nočeh glavni junak ne more biti Ciril (6), torej je glavni junak Konrad, ki je zato ribič, Cirilu pa ostane vloga pilota v knjigi Divji tek.

Št. knjige	Naslov	Ime junaka	Zaposlitev
1.	Divjakov poseg	Jakob	tihotapec
2.	Divjanje	Rupert	rudar
3.	Divji tek	Ciril	pilot
4.	Divje noči	Konrad	ribič
5.	Divjak	Borut	čuvaj plaže

Pisma bralcev

Čeprav nekoliko zgodaj, se vam javljam in pošiljam svojo logično nalogo, s katero želim sodelovati na vašem razpisu za najboljšo logično nalogo v šolskem letu 93/94.

Moji predlogi za ocenjevanje: Mislim, da bi naloge morala oceniti komisija in bralci (za katere pa ne verjamem, da se bodo množično odzvali). Objava bi bila podpisana s pravim imenom in priimkom, zraven pa dodana starost. Dobro bi bilo, če bi dali nagrade sestavljalcem različnih starosti in še nagrado za absolutno najboljšo nalogo.

Damjan Japelj

Ime mi je Zlatko in hodim v osmi razred *OŠ Ob Dravinji*, sicer pa sem že tretje leto naročnik Vaše revije. Moram jo pohvaliti, saj mi je zelo všeč, še posebej pa njena sedanja oblika, četudi se naloge včasih ponavljajo.

Kot prilogo temu pismu (ali pa je morda to pismo priloga?) Vam pošiljam nekaj nalog kot odgovor na "Nagradni razpis za najboljšo logično nalogo v šolskem letu 93/94". Menim, da bi bilo najbolj primerno, če bi starostne skupine bile: do 8 let, 9-12 let, 13-16 let, nad 16 let. Tudi menim, da ni razloga za anonimno objavo, razen seveda, če bi si pisec nalog tako zaželel.

V upanju, da bo vaša revija še naprej takšna (ali boljša, seveda), Vam sporočam najlepše pozdrave.

Zlatko Kropf



Nagradne logične naloge

Na razpis za nagradno logično nalogo smo dobili prva predloga, ki ju tudi objavljamo.

Oh, vi bogovi!

Davno tega, že za časa cesarja Tanga, se je Džen Vu, bog severnega tečaja, zagledal v Guan Jin, boginjo usmiljenosti. Ko je prišel k njenemu očetu, Guan Diju, bogu vojske, da bi ga prosil za njeno roko, mu je ta dejal, da mora prej rešiti tri uganke, ki mu jih bo zastavil. Guan Di je namreč hotel hčeri priskrbeti pametnega moža. Džen Vu je privolil in spraševanje se je začelo.

1. Uganka nesmrtnih

V nebesih, je pričel govoriti Guan Di, prebiva osem nesmrtnih. Glavni izmed njih, Džung Li Kian, je živel v času dinastije Han. Recimo, da ga je takrat iskala neka določena oseba, ki ga ni poznala. Našla ga je v družbi dveh mož. Vsi trije so tej osebi dali po dve izjavi. Kakor se je izkazalo, je Džung Li Kian dal dve resnični izjavi, eden od ostalih dveh dve lažni, drugi pa eno lažno in eno resnično izjavo. Katera od oseb A, B in C je Džung Li Kian?

A: *Jaz sem Džung Li Kian.*
B-jevi izjavi sta lažni.

B: *A-jevi izjavi sta lažni.*
Vsaj ena C-jeva izjava je resnična.

C: *Vsaj ena B-jeva izjava je pravilna.*
A govori resnico.

Džen Vu je z lahkoto ugotovil pravilen odgovor, pa vi?

2. Še eno o vohunih

Guan Di se je zadovoljno nasmehnil in nadaljeval: Prav, sedaj pa nek resničen primer o vohunih. Prav te dni se je namreč pojavil v naši deželi vohun, ki ga je poslal Jen Loa, peklenski knez. Prijeli so ga v družbi dveh oseb. O trojici je bilo znano, da vohun včasih govori resnico, včasih laže, eden od ostalih dveh vedno govori resnico, drugi vedno laže. A in B sta dala izjavi:

A: *Vohun je B.*
B: *Vohun je C.*

Ko pa sem vprašal za odgovor tretjega, je ta pokazal na enega od drugih dveh osumljencev in dejal: *Vohun je tale.*

Kateri je vohun?

Džen Vu je mrščil obrvi in vprašal: "*In na koga je pokazal C?*" Guan Di pa mu je zatrdil, da je problem rešljiv tudi brez tega. Džen Vu je po krajšem premisleku rešil tudi ta problem.

3. Še zadnja uganka

Guan Di se je pritrdilno nasmehnil in postavil še tretjo uganko: Nekoč sta v nekem mestu ob reki Jangtse Kiang živela dva brivca, recimo jima A in B. A brije vse prebivalce, ki so mlajši od 35 let in nikogar drugega. Brivec B pa brije samo tiste, ki so starejši od 35 let. Sprašujem te: Kdo brije osebo C, če veš:

– da je mlajša od 500 let,
– da je število njegovih let kvadrat celega števila,
– da je tretji koren iz števila njegovih let tudi celo število.

Džen Vu si je vzel čas in dobro pretehtal. Tudi tokrat je zadel in končno se je Guan Di vdal ter mu dal Guan Jin za ženo. Džen Vu in Guan Di sta se potem še večkrat sestala in reševala uganke, vse dokler niso izumili telefaxa. Potem sta za te namene uporabljala telefax, sicer pa resno razmišljata tudi o svetovni računalniški mreži (Fidonet) za navdušene logike, kar pa je že druga zgodba.

Rešitve

1. Uganka nesmrtnih

Če bi bili obe A-jevi izjavi pravilni, dobimo protislovje, saj bi dala dve lažni izjavi tako B kot C. Če bi bili pravilni obe C-jevi izjavi, bi spet dobili protislovje. Torej je Džung Li Kian B, A je dal dve lažni izjavi, C lažni in resnično izjavo.

2. Še ena o vohunih

Če bi C rekel, da je vohun A, bi Guan Di ne mogel obsoditi nikogar, saj bi bilo mogoče, da je A vohun, B oproda, C vitez; A vitez, C oproda, B vohun ali C vohun, A oproda, B vitez. Ker pa je Guan Di rekel, da je problem rešljiv, je torej pokazal na B.
Zdaj sta že dva obtožila B vohunstva. Njuni izjavi sta ali obe resnični ali obe lažni. Obe ne moreta biti resnični, saj bi potem morala biti dva, ki govorita samo resnico (Vohun je B!). Torej B ni vohun, on govori resnico, vohun je C, A pa vedno laže.

3. Še zadnja uganka

Osebo C brije brivec B, stara pa je 64 let.

Zlatko Kropf, 13 let
Novo Tepanje 9, Slovenske Konjice
8. razred

Pismo prijatelju

Dragi Matej!

Končno sem našel čas in, čeprav pozno, Ti spet pišem. Delo medplanetarnega sodnika je izredno zahtevno in le težko si lahko privoščiš počitek. Je pač tako. Sedaj sem na sodišču *Plantex* na planetu *Rex*, kjer imamo neko gnilo sejo. Planet seveda poznaš, saj si tod z ženo velikokrat letoval (mimogrede, pozdravi Marijo in malega Mihca).

V pismu si me vprašal o primeru izpred treh let, ki sem ga uspešno rešil na planetu *Kind*. Ugodil ti bom, vendar rešitev prepustim tebi! Imeli smo torej tri osumljence (dva domačina in enega tujca, ki se je preobrazil v domačina in ga nismo mogli prepoznati). Vedeli smo, da je krivec tujec. *Kindovci* so znani po tem, da lažejo samo v primeru, če stojijo na tujčevi desni strani za eno mesto (če je recimo razporeditev ABC in je C tujec, potem B laže, A pa govori resnico). Dali pa so takšne izjave (razporejenost ABC):

A: *Jaz sem domačin.*
B: *C govori resnico.*
C: *A laže kot galaktični obrambni minister!*

Iz teh izjav sem lahko izločil osebo, ki nikakor ni mogla biti tujec. Ostali osebi sta v nespremenjenem vrstnem redu (brez tretje osebe) dali še naslednji izjavi:

1. oseba: *Jaz sem tujec.*
2. oseba: *To ni res!*

No, kdo je torej tujec?

Lep medplanetarni pozdrav od Damjana

Rešitev

Recimo, da je tujec A. Potem B in C govorita resnico (ker sta domačina): A torej laže in je v resnici tujec. Recimo, da je tujec C. Oseba B potem laže; torej laže tudi C, A pa govori resnico. Očitno je C lahko tujec, saj si nobena izjava ne nasprotuje. Sedaj pa recimo, da je tujec oseba B. Oseba A laže, kar pusti kot posledico dva tujca (A in B). B torej nikakor ne more biti tujec in ga lahko oprostimo po vseh galaktičnih zakonih.

Ostali sta osebi A in C. Če bi bil A tujec, bi C govoril resnico in bi prišli do protislovja. Tujec je torej C, oseba A pa laže kot galaktični obrambni minister!

Damjan Japelj

Reševanje logičnih nalog s pomočjo simbolne logike

V tem sestavku se bomo seznanili s preprosto metodo reševanja logičnih nalog, kakršna je na primer naslednja naloga iz knjige *Test your logic* avtorja *G. J. Summersa* (Dover Pbs., 1972):

> Andrej, Boris in Cene vsak dan kosijo v restavraciji, naročijo pa pečenko ali šunko.
>
> 1. Če naroči Andrej šunko, potem naroči Boris pečenko.
> 2. Šunko naroči Andrej ali Cene, vendar pa ne oba.
> 3. Oba, Boris in Cene, ne jesta hkrati pečenke.
>
> Kdo je lahko včeraj jedel šunko, danes pa pečenko?

Preden se lotimo uganke (bralec jo lahko za vajo reši sam), bomo uvedli *osnovne izjavne povezave*. Definirali jih bomo tako, da bomo povedali, kako je resničnost *sestavljene* izjave odvisna od resničnosti njenih *delov*:

ime povezave	simbolični zapis	resnica	neresnica
negacija	$\neg A$	če je A neresnica	če je A resnica
konjunkcija	$A \wedge B$	če sta A in B resnici	če je vsaj ena izmed izjav A in B neresnična
disjunkcija	$A \vee B$	če je vsaj ena izmed izjav A in B resnična	če sta obe izjavi A, B neresnični
implikacija	$A \Rightarrow B$	če je A neresnična ali pa B resnična	če je A resnična in B neresnična
ekvivalenca	$A \Leftrightarrow B$	če sta A in B obe resnični ali obe neresnični	če je A resnična in B neresnična ALI če je A neresnična in B resnična

Prvi del reševanja naloge je sestavljen iz prevajanja z logično stavčno analizo v logično simboliko. Označimo posamezne enostavne izjave takole:

A: "Andrej je (danes) naročil šunko."
B: "Boris je (danes) naročil šunko."
C: "Cene je (danes) naročil šunko."

Potem lahko izjavo "Andrej je (danes) naročil pečenko" zaznamujemo z $\neg A$, ker je Andrej naročil šunko ali pečenko, vendar ne obojega na isti dan. Podobno velja tudi za Borisa in Ceneta. Lahko bi seveda uvedli dodatne tri črke za izjave "... je naročil pečenko", vendar se bomo raje držali naslednjega napotka za dobro reševanje: *Uporabljaj čim manj osnovnih izjav*.

Pogoj (1) prevedemo v

(a) $A \Rightarrow \neg B$

Ta pogoj namreč izključuje možnost, da bi Andrej jedel šunko (da je izjava A resnična) in da bi hkrati tudi Boris jedel šunko (da je hkrati izjava B resnična).

Pogoj (2) pravi, da Andrej naroči šunko natanko tedaj, kadar je Cene ne naroči, torej

(b) $A \Leftrightarrow \neg C$

Pogoj (3) pravi, da ni res, da oba (Cene in Boris) hkrati jesta pečenko. To pomeni, da je v danem dnevu vsaj eden ne naroči, torej vsaj eden naroči šunko:

(c) $B \vee C$

Seveda bi pogoj (3) lahko prevedli tudi v

(c') $\neg(\neg B \wedge \neg C)$

vendar bi kršili naslednji napotek dobrega reševanja: *Prevodi naj bodo čim bolj enostavni.*

Mimogrede opazimo, da velja De Morganov zakon

$$B \vee C \Leftrightarrow \neg(\neg B \wedge \neg C)$$

Sedaj smo pred naslednjo nalogo: pri kakšnih vrednostih enostavnih izjav A, B in C so izpolnjeni (resnični) pogoji (a), (b) in (c)?

Da bi bil izpolnjen pogoj (c), mora biti resnična vsaj ena izmed izjav B oz. C. Da bi bil izpolnjen pogoj (b), imamo dve možnosti:

– (1) da sta A in $\neg C$ obe resnični
– (2) da sta A in $\neg C$ obe neresnični in zato izjavi $\neg A$ in C resnični.

Da bi bil pogoj (a) izpolnjen, sta dve možnosti – da A ni resnična (da je $\neg A$ resnična) ali da je $\neg B$ resnična. Zapišimo vse kombinacije resničnih izjav:

(1) A $\Rightarrow \neg$B
(2) A $\Leftrightarrow \neg$C
(3) B $\vee$ C
} dani pogoji

(4) B				(5) C pogoj (3)			
(6) A		(8) $\neg A$		(10) A		(12) $\neg A$	} pogoj (2)
(7) $\neg C$		(9) C		(11) $\neg C$		(13) C	
(14) $\neg A$	(15) $\neg B$	(16) $\neg A$	(17) $\neg B$	$\times$		(18) $\neg A$	(19) $\neg B$ pogoj (1)
$\times$	$\times$	$\surd$	$\times$			$\surd$	$\surd$

Veja (1), (2), (3), (5), (10), (11) vsebuje protislovje, namreč zahtevo po resničnosti obeh izjav C in $\neg C$, zato smo je označili z $\times$ (mrtva veja) in je nismo nadaljevali.

Ko smo upoštevali še tretji pogoj, smo dobili še nadaljnje mrtve veje. Preostale pa vsebujejo naslednje možnosti:

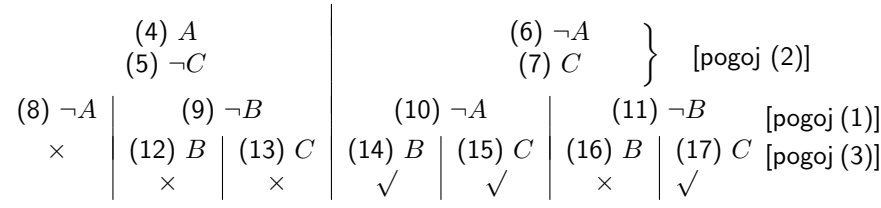
B, $\neg A$, C	[veja (1), (2), (3), (4), (8), (9), (16)]
C, $\neg A$	[veja (1), (2), (3), (5), (12), (13), (18)]
C, $\neg A$, $\neg B$	[veja (1), (2), (3), (5), (12), (13), (19)]

Vse te vključujejo zahtevo po resničnosti izjav C in $\neg A$, medtem ko sta za B obe možnosti odprti.

Torej: Cene vedno naroči šunko.
Andrej vedno naroči pečenko.
Boris lahko naroči eno ali drugo.

Analiza pogojev, kot smo jo naredili, se imenuje *semantična tabela* ali *semantično drevo*. Iz nje lahko razberemo vse možnosti, ki izpolnjujejo dane pogoje. Drugačen vrstni red upoštevanja pogojev nam bo dal drugačno semantično drevo:

(1) $\mathrm{A} \Rightarrow \neg\mathrm{B}$
(2) $\mathrm{A} \Leftrightarrow \neg\mathrm{C}$
(3) $\mathrm{B} \vee \mathrm{C}$



Neprotislovne veje vselej vsebujejo $\neg A$ in C.

Algoritem semantičnih dreves ima za vhod neko množico izjav (za katere želimo, da so resnične)

$$X_1,\ ...,\ X_n.$$

Te izjave zapišemo eno za drugo v drevo. Nato drevo razširjamo tako, da na vsakem koraku naredimo naslednji postopek:

A **(a)** Označimo za mrtve tiste veje, ki vsebujejo protislovne zahteve, to je, da se v njih pojavlja neka izjava in njena negacija.
(b) Odkljukamo tiste točke, v katerih nastopajo le enostavne izjave ali njihove negacije.
(c) Končamo, če so vse veje mrtve.

B **(a)** Poiščemo vejo, ki ni označena za mrtvo in vsebuje neodkljukano točko.
(b) Izberemo izjavo v neodkljukani točki.
(c) Razširimo vse žive veje, ki vsebujejo to točko in to točko odkljukamo.
(d) Končamo, če ni nobene žive veje z neodkljukano točko.

To, da smo določeno točko odkljukali, pomeni samo to, da smo pogoj, ki je zapisan v tej točki, upoštevali; razen seveda, ko pridemo do osnovnih izjav oziroma njihovih negacij, ki jih ne moremo naprej analizirati.

Takšen pogoj pa moramo upoštevati na vseh živih vejah, ki to točko vsebujejo. Ko smo upoštevali vse pogoje, se lahko zgodi, da:

(a) končamo tako, da so vse veje označene za mrtve. Tedaj je začetna množica pogojev *protislovna*.

(b) končamo v postopku **B**. Veje, ki niso označene za mrtve, vsebujejo seznam osnovnih izjav ali njihovih negacij. Če so te izjave resnične, so resnične tudi dane izjave X_1, ..., X_n. Vsaka takšna veja nam da kakšno tako možnost.

Sedaj želimo pokazati, da iz množice izjav

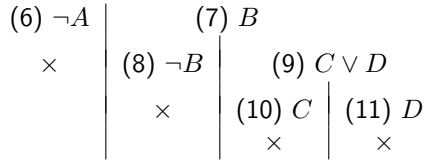
$$\{A \Rightarrow B, \quad B \Rightarrow (C \vee D), \quad \neg C, \quad A\}$$

sledi izjava D. To pomeni, da je nemogoče, da so vse izjave iz te množice resnične, da pa je hkrati D neresnična, to je, $\neg D$ resnična. Semantično drevo za množico

$$\{A \Rightarrow B, \quad B \Rightarrow (C \vee D), \quad \neg C, \quad A, \quad \neg D\}$$

se mora zaključiti s samimi mrtvimi vejami:

(1) $A \Rightarrow B$
(2) $B \Rightarrow (C \vee D)$
(3) $\neg C$
(4) A
(5) $\neg D$



Druga metoda, s katero bi rešili problem, je metoda resničnostnih tabel. Imamo osem kombinacij za logične vrednosti enostavnih izjav. Nato izračunamo pravilnostne vrednosti pogojev

A	B	C	$A \Rightarrow \neg B$	$A \Leftrightarrow \neg C$	$B \vee C$
1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0

Obkrožimo tiste nabore, za katere so vsi trije pogoji resnični (imajo vrednost 1). A je neresnična, C pa resnična izjava.

Tretja možnost je sklepanje:

Recimo, da Andrej naroči šunko. Potem Boris naroči pečenko. Zahteva (3) pravi, da Cene naroči šunko. Skratka – Andrej in Cene oba jesta šunko, to pa je v protislovju s pogojem

(2).
Torej Andrej naroči pečenko. Iz drugega pogoja sledi, da Cene naroči šunko. Tretji pogoj je avtomatično izpolnjen.

Razlike med temi tremi metodami so naslednje: metodi semantičnih dreves in pravilnostnih tabel bosta vedno dali rezultat; sta torej mehanični metodi, ki ju lahko sprogramiramo na računalniku. Metoda pravilnostnih tabel kratkomalo izčrpa vse možnosti za vrednosti osnovnih izjav. Pri metodi semantičnih dreves lahko z dobrim vrstnim redom upoštevanja pogojev (ta izbira je kreativni del metode) nekatere veje hitro zaključimo in tako eliminiramo marsikateri nabor pravilnostnih vrednosti osnovnih izjav.

Metodi sta si inverzni. Pri pravilnostnih tabelah izhajamo iz vrednosti osnovnih izjav in izračunavamo vrednosti danih pogojev. Pri semantičnih drevesih izhajamo iz resničnosti pogojev in iščemo vrednosti osnovnih izjav. Pri sklepanju pa je večkrat potrebna kakšna "ideja". Postopka se ne da mehanizirati.

NALOGE:

1. Zapiši še druga semantična drevesa za našo logično nalogo in poišči drevo, ki vsebuje najmanj izjav!
2. Pokaži, da so naslednje izjave resnične za vse vrednosti osnovnih izjav (semantično drevo za negacije takšnih izjav vsebuje le mrtve veje)
   (a) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
   (b) $(A \Rightarrow B \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
   (c) $A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$
   (d) $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C))$
3. Janez, Peter in Tomaž so osumljeni prestopka. Na sodišču so dali naslednje izjave:
   Janez: *Peter je kriv, Tomaž ni kriv.*
   Peter: *Če je Janez kriv, potem je kriv tudi Tomaž.*
   Tomaž: *Jaz nisem kriv, toda vsaj eden od drugih dveh je kriv.*
   (a) Ali so vse tri izjave lahko hkrati resnične?
   (b) Izjava enega sledi iz izjave drugega. O katerih govorimo?
   (c) Če so vsi trije nedolžni, kdo je lagal?
   (d) Če so vse izjave resnične, kdo je kriv, kdo ne?
   (e) Kdo je kriv, če krivi lažejo, nedolžni pa govore resnico?

International Mathematical Talent Search

Rezultati osmega kroga:

	1	2	3	4	5	SKUPAJ
Cigale Gvido	5	5	5	5	5	25
Dolinar Damjan	5	5	5	5	5	25
Fidler Sanja	5	5	3	5	5	23
Hočevar Nataša	5	3	2.5	5	0	15.5
Ipavec Petra	5	5	5	5	5	25
Jevnikar Milan	5	5	5	5	5	25
Košak Matjaž	5	0	5	5	0	15
Kuzman Boštjan	5	4	2.5	5	5	21.5
Moravec Primož	5	5	5	5	5	25
Pukšič Sašo	5	5	2.5	4	0	16.5
Šalamun Andrej	5	5	2.5	5	5	22.5
Žnidarič Marko	5	5	2.5	5	5	22.5

Tabela skupnih rezultatov:

	6	7	8
Bartolič Andrej	10	–	–
Brumen Gorazd	12	18	–
Cigale Gvido	20	22	25
Dolinar Damjan	22	23	25
Fidler Sanja	–	25	23
Hočevar Nataša	14	18	15.5
Ipavec Petra	15	25	25
Jevnikar Milan	–	–	25
Klanjšek Martin	–	20	–
Košak Matjaž	–	20	15
Kovačič Jernej	15	–	–
Kuzman Boštjan	15	13	21.5
Moravec Primož	–	–	25
Oreškovič Marko	15	–	–
Pangršič Tina	8.5	–	–
Pohar Maja	14	–	–
Pukšič Sašo	15	25	16.5
Šalamun Andrej	–	–	22.5
Žnidarič Marko	–	–	22.5

Solutions – Round 8

1/8 Prove that there is no triangle whose altitudes are of length 4, 7, and 10 units.

Solution 1: Suppose that such a triangle exists, and denote its area by A. Then the sides of the triangle are of length $A/2$, $2A/7$, and $A/5$. However, $A/5 + 2A/7 = 17A/35 < A/2$, contrary to the triangle inequality. Thus such a triangle may not exist.

Solution 2: One can easily derive from the triangle inequality that if h and k are two of the altitudes of a triangle, with $h \neq k$, then its third altitude, l, must satisfy the inequalities

$$\frac{hk}{h+k} < l < \frac{hk}{|h-k|}.$$

These inequalities are not satisfied by $h = 4$, $k = 7$, and $l = 10$.

Solution 3: As above, observe that if such a triangle exists, then its sides must have length $A/2$, $2A/7$, and $A/5$. Applying the Law of Cosines, we find that the angle, ϕ, opposite to the longest side, must satisfy the equation $(A/2)^2 = (2A/7)^2 + (A/5)^2 - 2(2A/7)(A/5)\cos\phi$. But from this equation, $\cos\phi = -629/560$, which is impossible as $|\cos\phi| \leq 1$. Thus such a triangle may not exist.

Solution 4: Recall Heron's formula for the area of the triangle,

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

where a, b, and c are the sides of the triangle and $s = (a+b+c)/2$ is its semiperimeter. With the sides as in Solution 1, we find that

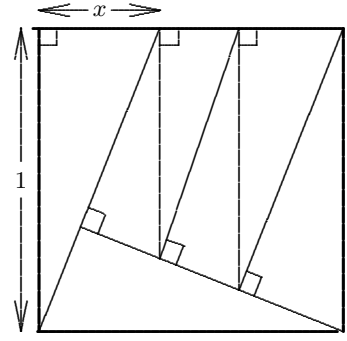
$$A = \sqrt{\left(\frac{69A}{140}\right)\left(\frac{-A}{140}\right)\left(\frac{29A}{140}\right)\left(\frac{41A}{140}\right)}.$$

But the expression under the square root sign is negative so the right-hand side cannot be equal to any real number. Thus such a triangle may not exist.

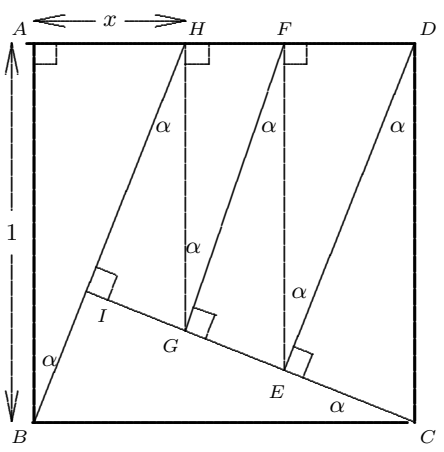
Comments: Alternately, one may also show that the triangle can exist only if its altitudes, h, k, l satisfy the inequality

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} > \frac{1}{l}.$$

2/8 As shown on the right, there is a real number x, $0 < x < 1$, so that the resulting configuration yields a dissection of the unit square into seven similar right triangles. This x must be a zero of a monic polynomial of degree 5. Find this polynomial. (Note: A polynomial in x is monic if the coefficient of the highest power of x is 1.)



Solution 1: The Pythagorean Theorem tells us that $BH = \sqrt{1+x^2}$. Then by similarity, we know that in each triangle the sides are in the proportion $x : 1 : \sqrt{1+x^2}$. Multiplying this ratio by $1/\sqrt{1+x^2}$ gives us $x/\sqrt{1+x^2} : 1/\sqrt{1+x^2} : 1$ for the sides of $\triangle BIC$ and $\triangle CED$. Multiplying this new ratio by $1/\sqrt{1+x^2}$ gives us $x/(1+x^2) : 1/(1+x^2) : 1/\sqrt{1+x^2}$ for the sides of $\triangle DFE$. Multiplying by $1/\sqrt{1+x^2}$ again gives us $x/(1+x^2)^{3/2} : 1/(1+x^2)^{3/2} : 1/(1+x^2)$ for the sides of $\triangle EGF$. Multiplying by $1/\sqrt{1+x^2}$ again gives us $x/(1+x^2)^2 : 1/(1+x^2)^2 : 1/(1+x^2)^{3/2}$ for the sides of $\triangle FHG$.



Then, since we have a unit square, we know that $x+HF+FD = 1$. Using the values found above, we have $x+x/(x^2+1)^2+x/(x^2+1) = 1$, or after clearing fractions, $x(x^2+1)^2+x+x(x^2+1) = (x^2+1)^2$. Simplifying gives us $x^5-x^4+3x^3-2x^2+3x-1 = 0$. Therefore x must be a zero of the monic 5th degree polynomial $x^5 - x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$.

Solution 2: A similar approch is to note that the operation of starting with one right triangle and using one of it's legs as the hypotenuse for a similar triangle is equivalent to multiplying every side by the cosine of the angle adjacent to the leg. We have labeled this angle α. Performing this operation twice, gives us $\triangle DFE$, so $FD = x\cos^2\alpha$. Performing the operation twice more, gives us $\triangle FHG$, so $HF = x\cos^4\alpha$. Noticing that $\cos\alpha = 1/\sqrt{x^2+1}$ gives us the equation in the last paragraph of Solution 1.

Solution 3: Impose a coordinate system on the figure with the origin at point A. We will use t for the horizontal variable. Then the equation of line BH is given by $y = (1/x)t-1$. Line IC is perpendicular to BH and passes through the point $(1,-1)$, so its equation is $y = -xt+(t-1)$. The point G lies on this line and has t-coordinate x. Therefore G has y-coordinate $-x^2+x-1$. The line GF passes through the point $(x,-x^2+x-1)$ and has slope $1/x$, and so its equation is $y = (1/x)t+(-x^2+x-2)$. Substituting $y = 0$ into this equation gives us x^3-2x^2+2x as the t-coordinate for F. But this is also the t-coordinate for E, so substituting into the equation for line IC gives us $-x^4+x^3-2x^2+x-1$ for the y-coordinate of E. Then line ED passes through E and has slope $1/x$, so we find its equation to be $y = (1/x)(t-x^3+x^2-2x)+(-x^4+x^3-2x^2+x-1)$. But line ED passes through the point $(1,0)$, so we have $0 = (1/x)(t-x^3+x^2-2x)+(-x^4+x^3-2x^2+x-1)$ which becomes $x^5-x^4+3x^3-2x^2+3x-1 = 0$ upon simplification.

Comments: More generally, let n be the number of triangles in a given unit square, which have one vertex at an acute angle pointing upward. Then one can show that x must satisfy the equation

$$(x^2+1)^n - x(x^2+1)^{n-1} = 1,$$

whose left side becomes a monic polynomial of degree $2n-1$, since $x \neq 0$. In our case, $n = 3$. Clearly, the coefficients of this polynomial are binomial coefficients of alternating signs from the n-th and $(n-1)$-st rows of Pascal's traingle.

One shoud also note, that since x is the root of an irreducible quintic (5th-degree) polynomial, it is, in general, impossible to find the exact value of x in closed form. There are a few tricks that can work in certain cases, such as a substitution which eliminates some of the terms and makes factoring possible. But usually, we are reduced to numerical techniques, such as Newton's Method, to estimate the value. In our case it turns out to be approximately 0.39.

3/8 (a) Is it possible to rearrange the numbers $1, 2, 3, \ldots, 9$ as $a(1), a(2), a(3), \ldots, a(9)$ so that all the numbers listed below are different? Prove your assertion.

$$|a(1) - 1|, |a(2) - 2|, |a(3) - 3|, \ldots, |a(9) - 9|$$

(b) Is it possible to rearrange the numbers $1, 2, 3, \ldots, 9, 10$ as $a(1), a(2), a(3), \ldots, a(9)$, $a(10)$ so that all the numbers listed below are different? Prove your assertion.

$$|a(1) - 1|, |a(2) - 2|, |a(3) - 3|, \ldots, |a(9) - 9|, |a(10) - 10|$$

Solution: The answer to Part (a) is yes, as can be seen from the mapping

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a(n)$	9	5	7	4	6	8	1	3	2

To Part (b) the answer is no. To prove this, one needs to utilize an argument based on parity; three such methods are outlined below:

Method 1: The differences must be the integers $0, 1, \ldots, 9$,which include 5 odd integers and 5 even ones. In order to obtain the 5 odd differences, we must choose $0 \leq k \leq 5$ even integers with $a(i)$ odd, with the remaining odd differences coming from $5 - k$ odd integers with $a(i)$ even. Thus, the remaining $5 - k$ even integers must have $a(i)$ even, and there must be k odd integers with $a(i)$ odd. Now, if there are k even integers with odd $a(i)$, and k odd integers with odd $a(i)$, then there are $2k$ odd $a(i)$. However, there are exactly 5 odd integers in $\{1, 2, \ldots, 10\}$, which yields a contradicion, so no such permutation is possible.

Method 2: Since the differences are to be distinct, $\sum_{i=1}^{10} |a(i) - i| = \sum_{i=1}^{9} i = 45 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$. Since $x \equiv |x| (\mathrm{mod}\ 2)$, $\sum_{i=1}^{10} |a(i) - i| \equiv \sum_{i=1}^{10} (a(i) - i) \equiv \sum_{i=1}^{10} a(i) - \sum_{i=1}^{10} i \equiv 0 (mod 2)$. This contradiction yields the conclusion that no such permutation is posibble.

Method 3: Recall that any permutation can be formed by a sequence of transpositions (swaps), and begin with the identity permutation $a(i) = i$. For this transformation, the sum of the differences $|a(i) - i|$ is clearly 0. Since a transposition switches the values of $a(i)$ and $a(j)$, each transposition changes the sum of the differences by an even amount. Thus the sum of the differences must always be even, and since, as seen in Method 2, the desired sum is 45, it can never be obtained.

Comments: Using a computer program, one can generate all the solutions that satisfy the distinct differnces property in Part (a). There are 96 such permutations!

In Part (b), one can avoid the (mod 2) arithmetic by summing the squares of the differences. Yet another, slightly more elegant argument models a permutation as a collection of disjont cycles in a directed graph in which the vertices are labled $1, 2, \ldots, 10$, and an arc is drawn from i to j if $a(i) = j$. If we partition the vertices into evens and odds, we see that we must have an odd number of arcs from one set to the other. However, since the digraph of a permutation contains only cycles, it will have an even number of arcs between any subset of vertices and the rest of the vertices.

It is easy to generalize from any of the three methods above, and conclude that if n is of the form $4k + 2$ or $4k + 3$ for any non-negative integer k, then it is impossible to find a permutation with the desired property. Method 1 leads easily to the conclusion that there can only be an even number of odd differences, and thus only an even number of odd integers between (not including) 0 and n. Methods 2 and 3 rely on showing that the parity of the sum of the differences is not even when $n = 10$, and this is the case for any n of the cited form, as can be seen by applying simple algebra to the formula for the sum of the first m integres.

4/8 In a 50 meter run, Anita can give at most a 4-meter advantage to Bob and catch up with him by the finish line. In a 200 meter run, Bob can give at most a 15-meters advantage to Carol and catch up with her by the end of the race. Assuming that all three of them always proceed at a constant speed, at most how many meters of advantage can Anita give to Carol in a 1000 meter run and still catch up with her?

Solution 1: If a, b, and c are the speeds of Anita, Bob, and Carol, respectively, then there are times t_1 and t_2 such that $at_1 = 50$, $bt_1 = 46$, $bt_2 = 200$, and $ct_2 = 185$. Eliminating t_1 and t_2 from these two equations yields $a/50 = b/46$ and $b/200 = c/185$. If x is the advantage that Anita can give Carol in a 1000 meter run, then $a/1000 = c/(1000 - x)$. Using the earlier equations to solve for a in terms of c and substituting into the above equation yields $x = 149$.

Solution 2: The conditions in the problem imply that Anita's speed is 50/46 Bob's speed and that Bob's speed is 200/185 Carol's speed. Therefore, Anita's speed is $\frac{50}{46} \cdot \frac{200}{185}$ Carol's speed. Thus, if Anita is to run 1000 meters in the time t, then in this same time Carol will run $(46/50)(185/200)1000 = 851$ meters, and so the advantage that Anita needs to give Carol is $1000 - 851 = 149$ meters.

Solution 3: Since Bob's speed is 46/50 Anita's speed, Anita can run 1000 meters in the same time as it takes Bob to run $(46/50)1000 = 920$ meters. Thus, Anita needs to give Bob an 80 meter advantage in a 1000 meter race. Since Carol's speed is $185/200$ Bob's speed, Bob can run 920 meters in the same time as it takes Carol to run $(185/200)920 = 851$ meters. So Bob needs to give Carol a 69 meter advantage in a 920 meter race. Finally, we see that Anita needs to give Carol a $80 + 69 = 149$ meter advantage in a 1000 meter race.

5/8 Given that a, b, x, and y are real numbers such that

$$\begin{aligned} a+b &= 23, \\ ax+by &= 79, \\ ax^2+by^2 &= 217, \\ ax^3+by^3 &= 691, \end{aligned}$$

determine ax^4+by^4.

Solution 1: For an integer $n \geq 0$ let $F_n = ax^n + by^n$. Then, for $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} F_n &= ax^n + ax^{n-1}y + by^n + bxy^{n-1} - ax^{n-1}y - bxy^{n-1} \\ &= (x+y)(ax^{n-1}+by^{n-1}) - (xy)(ax^{n-2}+by^{n-2}) \\ &= (x+y)F_{n-1} - (xy)F_{n-2} \end{aligned}$$

Since $F_0 = 23$,$F_1 = 79$,$F_2 = 217$, and $F_3 = 691$, we obtain $217 = 79(x+y) - 23(xy)$ and $691 = 217(x+y) - 79(xy)$ which yields $x+y = 1$ and $xy = -6$. Therefore, $ax^4+by^4 = F_4 = (x+y)F_3 - (xy)F_2 = F_3 + 6F_2 = 691 + 6 \cdot 217 = 1993$.

Solution 2: Denote the given equations by A, B, C, and D, respectively. Form three new equations, $(AD-BC)$, $(BD-C^2)$, and $(AC-B^2)$. Upon simplifications, these become

$$\begin{aligned} ab(x-y)^2(x+y) &= -1250, \\ ab(x-y)^2xy &= 6 \cdot 1250, \\ ab(x-y)^2(x+y) &= -1250. \end{aligned}$$

Substituting the third of these into first and second equations leeds to $x+y = 1$ and $xy = -6$. Thus, one of x or y is 3 while the other is -2. In turn, the third equation forces $ab = -50$ which, along with equation A, yields the fact that one of a or b is 25 while the other is -2. If $x = -2$ then $a = -2$, and if $x = 3$ then $a = 25$. So, in either case, ax^4+by^4 is easily computed as 1993.

Comments: The numbers 23, 79, 217, and 691, appearing on the right hand sides of the given equations, can be recognized as terms of sequence $F_n, n = 0, 1, 2, \ldots$, generated by the following recursion formulas (and possibly others):

$$F_{n+1} = 3F_n + (-2)^n \cdot 10$$

and

$$F_{n+1} = F_n + 6F_{n-1}$$

While both of them will yield the correct answer of 1993, to conclude this legitimately, one must first verify that the sequence of the left hand sides, $F_n = ax^n + by^n$, also satisfies the same recursion formula(s).

PROBLEMS – Round 9

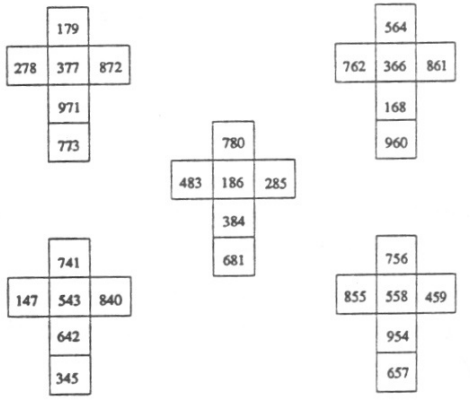
Problem 1/9. An $m \times n$ grid is placed so that it has it's corners at $(0,0)$ and (m,n). A legal move is defined as a move either one unit in a positive y direction or one unit in the positive x direction. The point (i,j), where $0 \leq i \leq m$ and $0 \leq j \leq n$, is removed from the grid so that it is no longer possible to pass through this point on the way to (m,n). How many possible paths are there from $(0,0)$ to (m,n)?

Problem 2/9. Given a point P and two straight line segments on a rectangular piece of paper in such a way that the intersection point Q of the straight lines does not lie on the paper. How can we construct the straight line PQ with the help of a ruler if we are allowed to draw only within the limits of the paper?

Problem 3/9. A convex polygon has 1993 vertices which are colored so that neighboring vertices are of different colors. Prove that one can divide the polygon into triangles with non-intersecting diagonals whose endpoints are of different colors.

Problem 4/9. A triangle is called *Heronian* if its sides and area are integers. Determine all five Heronian triangles whose perimeter is numerically the same as its area.

Problem 5/9. A set of five "Trick Math Cubes" is shown schematically on the right. A "magician" asks you to roll them and to add the five numbers on top of them. He starts adding them at the same time, and writes down the correct answer on a piece of paper long before you are finished with the task. How does he do it? Expose and explain this trick.



International Mathematical Talent Search

PROBLEMS ROUND 10



Angleške naloge za srednješolce

1. Find the domains and ranges of the following functions:
   (a) $y = \frac{1}{x^2}$
   (b) $y = \sqrt{x^2 - 1}$.
2. For any natural n we'll define $s(n)$ as the sum of the divisors of n (not counting n itself). For instance, $s(1) = 0$, $s(2) = 1$, $s(6) = 6$, $s(12) = 16$, $s(28) = 28$.
   Prove that $s(n)$ doesn't take the values 2 and 5.
3. Two persons A and B can occupy two rooms in four different ways. How many ways are there to place
   (a) two persons in three rooms;
   (b) three persons in two rooms;
   (c) three persons in two rooms, so that none of the rooms is left unoccupied?
4. A set M contains three elements and a set N contains two elements. Find the number of mappings of
   (a) M into N,
   (b) M onto N,
   (c) N into M,
   (d) N onto M.
5. Prove that there are more than a million functions taking only two values 0 and 1 and defined on the set of the first twenty natural numbers.
6. A set E consists of six elements. Prove that there are exactly 720 functions for which E is both the domain and the range.
7. Determine which of the following functions are injections: $f(x) = x^3$, $g(x) = x^4$, $h(x) = x^{17}$, $k(x) = x^{18}$.
8. No more than two students sit at any desk in a classroom. Assign to every student the student with whom they share the same desk (those sitting alone are each assigned to themselves). What is the inverse mapping?
9. A mapping of a finite set onto itself is always invertible. Give an example of a non-invertible mapping of the set of natural numbers onto itself.
10. If the line $ax + 2y = 0$ passes through the point $(-5, 9)$, what is the value of a?
11. Determine the value of k so that the line segment joining $P(3, 9)$ and $Q(-1, 3k)$ has slope -6.
12. Determine the value of k so that the lines $kx + 2y - 3 = 0$ and $2x - 3y + 5 = 0$ have the same x-intercept.
13. A line through the point (-2,6) forms with the axes a triangle with area 25. Determine all possible values for the x-intercept of such a line.

14. Construct each of the following straight lines: (a) $x + y - 2 = 0$;
(b) $x - 3y = 0$.

15. Find the area of the figure bounded by the following straight lines: $2x - y + 4 = 0$, $y = 1$, $x = 1$, $x = 5$

16. Find the slope of the straight line if:
(a) it is defined by equation $2x - 3y + 1 = 0$,
(b) it makes an angle of 30^o with x-axis,
(c) it is parallel to the straight line $8x + 4y + 3 = 0$,
(d) it passes through the points $(1, 1)$ and $(4, 3)$,
(e) it is parallel to the abscissa axis.

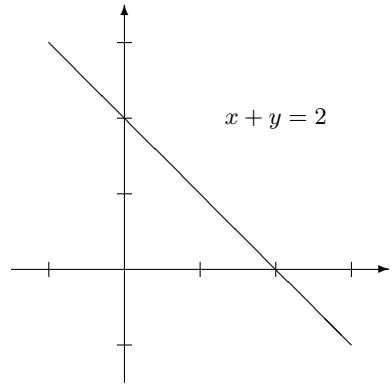
17. Given the vertices of the triangle $A(-3, 6)$, $B(4, -1)$, $C(-3, -5)$, set up an equation of the straight line which contains:
(a) the side AB,
(b) the altitude drawn from the vertex C,
(c) the side AC,
(d) the median drawn from vertex A,
(e) the side BC,
(f) the midline which is parallel to the side BC.

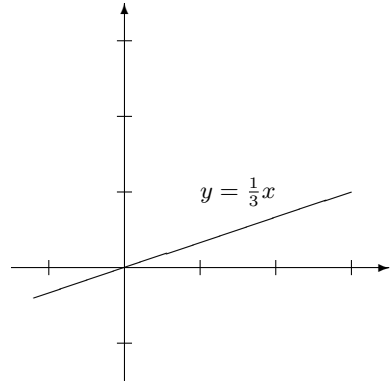
Glossary

domain	domena, definicijsko območje	point	točka
range	zaloga vrednosti	triangle	trikotnik
function	funkcija	area	ploščina
divisor	delitelj	equation	enačba
injection	injektivna funkcija	axis	os
inverse mapping	inverzna (obratna) funkcija	side	stranica
mapping of M onto N	surjektivna preslikava	altitude	višina
slope	naklon	vertex	oglišče
x-intersept	presečišče z x osjo	median	težiščnica
straight line	premica	midline	središčnica

Answers:

1. (a) $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathcal{R} = \{x; x > 0\}$
   (b) $\mathcal{D} = \{x; |x| \geq 1\}$, $\mathcal{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
2. If n is a prime, then $s(n) = 1$. If n isn't prime, then $n = a \cdot b$, so $s(n) = 1 + a + \ldots > 2$. If $s(n) = 5$, then $s(n) - 1 = 4$. But 4 can't be the only divisor of a number.
3. (a) 9, (b) 8, (c) 6
4. (a) 8, (b) 6, (c) 9, (d) 0
5. The number of functions is $2^{20} > 10^6$
6. $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$
7. f and h
8. The inverse mapping is the same as the original.
9. f(1)=1, f(n+1)=n.
10. $a = 3$
11. $k = 11$
12. $k = -\frac{6}{5}$
13. -5, $\frac{-10}{3}$, $\frac{-5}{3}$, 10.
14. see figures on the right
15. 36
16. (a) $\frac{2}{3}$, (b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, (c) -2, (d) $\frac{2}{3}$, (e) 0
17. (a) $x+y-3=0$, (b) $x-y-2=0$, (c) $x+3=0$, (d) $18x+7y+12=0$, (e) $4x-7y-23=0$, (f) $8x-14y+31=0$





Angleške naloge za osnovnošolce

1. Which of the following is closest in value to $49.5 : 0.5$?
   (a) 10 *(b)* 25 *(c)* 50 *(d)* 100 *(e)* 250

2. A car averages 50 km/h for 20 km and 60 km/h for another 20 km. The average speed in km/h for 40 km is
   (a) 55 *(b)* 54 *(c)* $\frac{546}{11}$ *(d)* $\frac{555}{11}$ *(e)* $\frac{556}{11}$

3. $\frac{43}{5} + \frac{21}{2}$ equals
   (a) $\frac{64}{5}$ *(b)* $\frac{64}{7}$ *(c)* $\frac{71}{10}$ *(d)* $\frac{63}{10}$ *(e)* none of this

4. The value of $9^3 \times 3^2$ is
   (a) 27^5 *(b)* 27^6 *(c)* 3^7 *(d)* 3^8 *(e)* 3^{12}

5. $-6 + 4 - (-3)$ equals
   (a) 1 *(b)* -7 *(c)* -5 *(d)* -13 *(e)* 7

6. What is the percentage of whole numbers from 2 to 21 inclusive which are exact multiples of 4?
   (a) 25 *(b)* 21 *(c)* 20 *(d)* 26 *(e)* 24

7. The square root of $15 \times 20 \times 12$ equals
   (a) 6000 *(b)* 60 *(c)* 6 *(d)* 80 *(e)* none of these

8. In how many ways can the number 24 be expressed as the sum of two prime numbers?
   (a) none *(b)* 1 *(c)* 2 *(d)* 3 *(e)* 4

9. What is the last digit of the number $(7^5)^3$?
   (a) 1 *(b)* 3 *(c)* 5 *(d)* 7 *(e)* 9

10. $3(2x-4y)+5x$ equals
(a) $11x-12y$ *(b)* $10x-12y$ *(c)* $11x-4y$ *(d)* $10x-4y$ *(e)* $10x-7y$

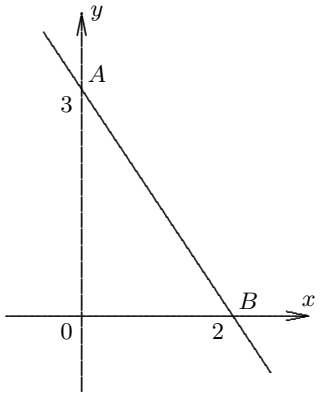
11. If x and y are positive integers and $x+y+xy=34$ then $x+y$ is
(a) 10 *(b)* 12 *(c)* 20 *(d)* 34 *(e)* not determined

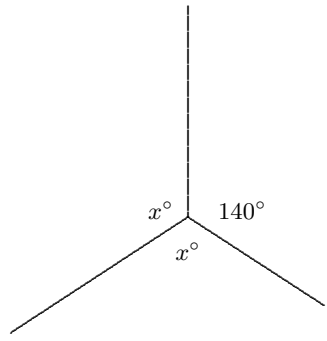
12. The solution of the equation $3(x-4)=7x-10$ is
(a) $\frac{1}{2}$ *(b)* $\frac{51}{2}$ *(c)* $\frac{21}{5}$ *(d)* $\frac{11}{2}$ *(e)* $\frac{-1}{2}$

13. Which of the following does not have $x+y$ as a factor?
(a) x^2+xy *(b)* x^2-y^2 *(c)* y^2+xy *(d)* x^2+y^2 *(e)* $2x+2y$

14. If $a>0$ and $b<0$, which of the following must be true?
(a) $a>-b$ *(b)* $-a>b$ *(c)* $a-b>0$ *(d)* $-a>-b$ *(e)* $ab>0$

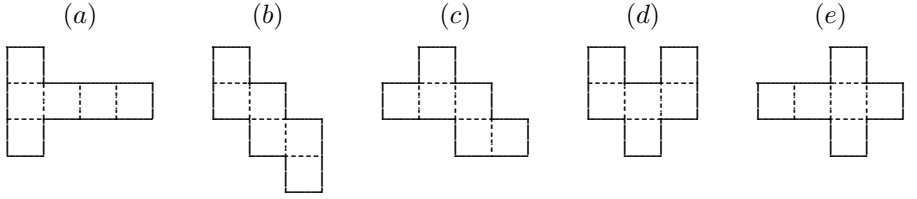
15. The equation of the line AB is (see the left figure just below)
(a) $y=-x-3$ *(b)* $3x+2y-6=0$ *(c)* $y=-x+3$
(d) $2y-3x+6=0$ *(e)* $2x-3y-9=0$





16. The value of x in the right-up figure is
(a) 20 *(b)* 70 *(c)* 110 *(d)* 140 *(e)* 220

17. Which one of the following figures can not be folded along the dotted lines shown to form a cube



Glossary

percentage	procent	digit	številka
whole number	celo število	positive integer	naravno število
multiple	večkratnik	factor	faktor
square root	kvadratni koren	cube	kocka
prime number	praštevilo		

Answers

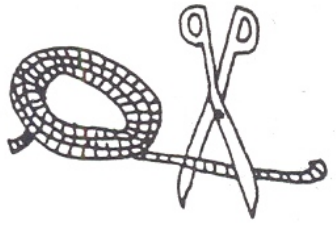
1. d	2. c	3. c	4. d	5. a	6. a	7. b	8. d	9. b
10. a	11. a	12. e	13. d	14. c	15. b	16. c	17. d	

Naloge za najmlajše

Naloge za najmlajše smo vzeli iz hrvaške revije *Matka*.

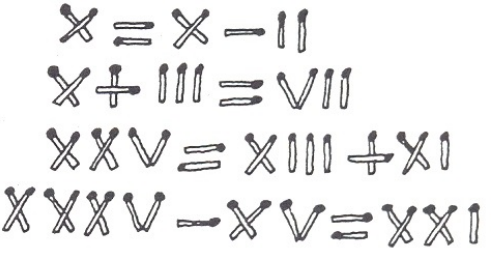
1. Namesto zvezdic in črk zapiši števke tako, da bo račun pravilen. Števke, ki so označene s črko B, so med seboj enake, tiste, ki so označene z zvezdico, pa so lahko različne.





2. Vrv dolžine $120\ \mathrm{m}$ razreži na 15 in $20\ \mathrm{m}$ dolge dele brez ostanka.

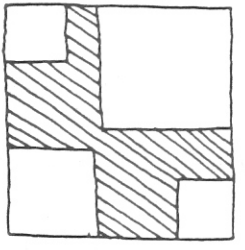
3. V vsaki vrstici prestavi po dve vžigalici, da boš res dobil enakosti.



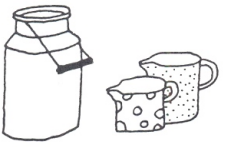


4. Koliko dvomestnih števil ima na mestu desetic večjo števko kot na mestu enic?

5. Kolikšen je obseg šrafiranega dela kvadrata, če je stranica kvadrata dolga a?



6. Osemlitrska posoda je polna mleka. Kako boš odlil štiri litre mleka, če imaš na voljo trilitrsko in petlitrsko posodo?

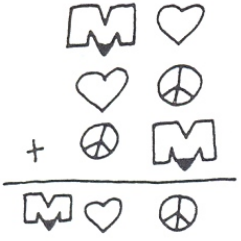




7. Revija *Matka* je napisana na desetih dvojnih listih. Na katerem od teh listov je vsota štirih števil, s katerimi so oštevilčene strani, največja?

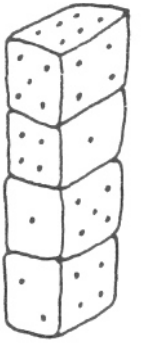
8. Ali lahko narišeš ta znak (PEACE) v eni potezi?





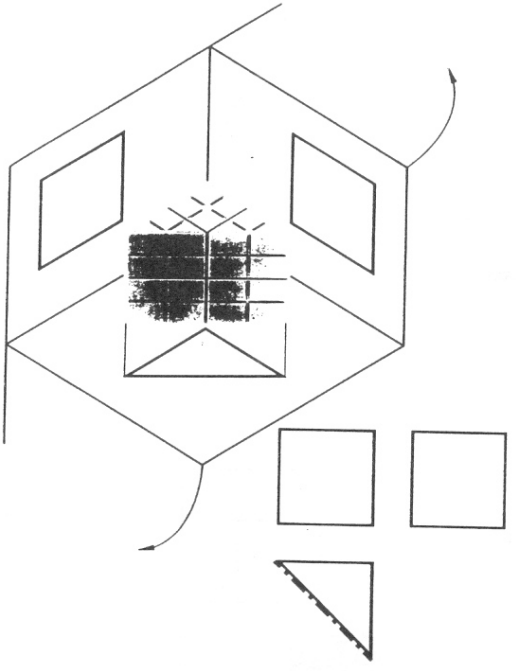
9. Znake  zamenjaj s številkami, da bo račun pravilen.

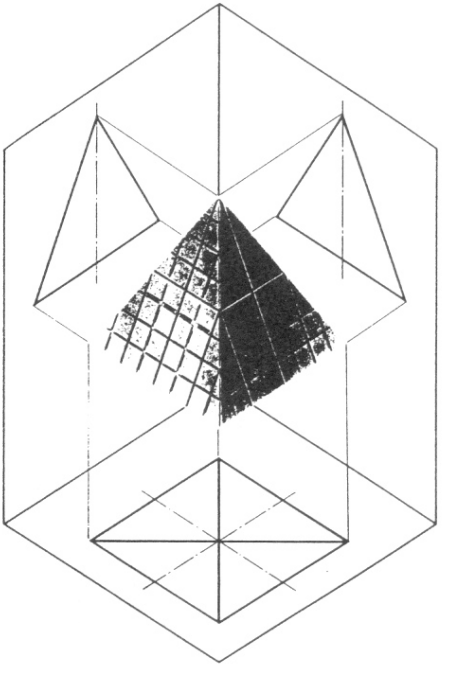
10. Štiri enake kocke za igro *Človek ne jezi se* so postavljene ena na drugo, kot kaže slika. Samo z opazovanjem slike ugotovi, koliko pik je na spodnji strani najnižje kocke.



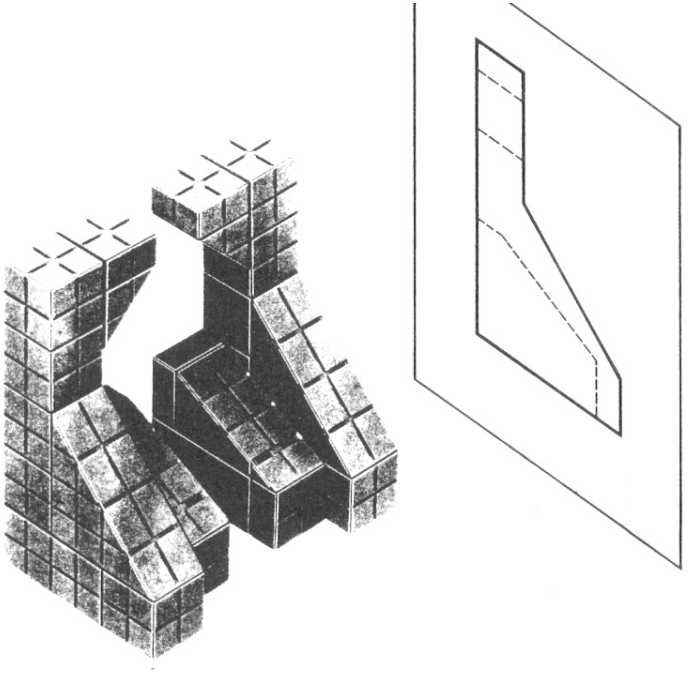
FISHERGEOMETRIC

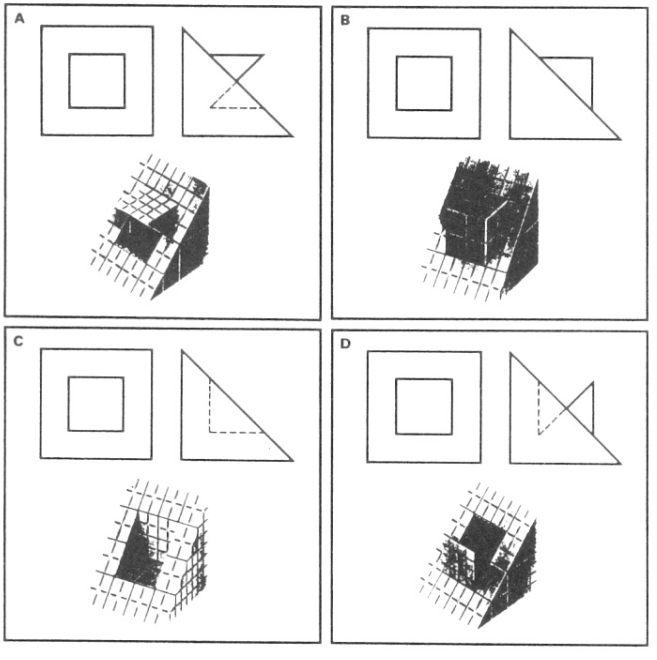
V prvi številki revije smo prikazali nekaj teles, ki jih lahko sestavimo iz 1. kompleta (pravokotna telesa). Zdaj pa si oglejmo komplet, ki ga sestavljajo prizme in piramide in ga seveda kombiniramo s kockami in kvadri prvega kompleta. Najprej sta tu prizma in piramida v treh pravokotnih projekcijah





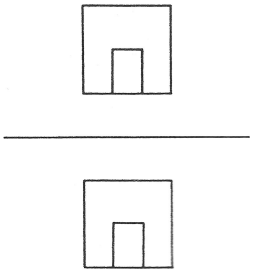
Sledijo telesa, ki jih dobimo s kombiniranjem





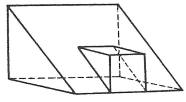
Da na osnovi pravokotnih projekcij ni vedno enostavno določiti telesa, nam pričata dva zgleda.

V knjižici *Zabavna matematika* Vladimir Devidé na strani 78 omenja nalogo *Ali znate "brati" iz tlorisa in narisa?*.



Poskusite v poševni projekciji skicirati telo, ki sta mu dana tloris in naris na sliki

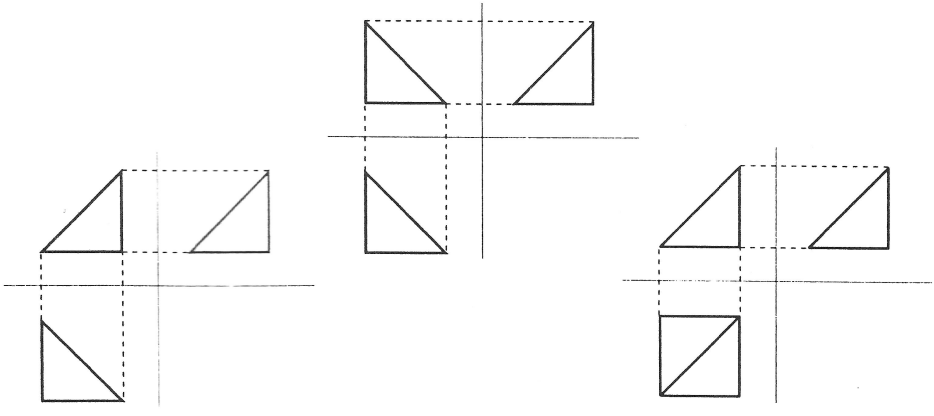
Naloga ni nemogoča – takšno telo obstaja. Če predpostavimo, da je telo omejeno samo z deli ravnine, potem obstaja samo ena rešitev. To nalogo sem zastavljal za zabavo mojim študentom in tudi kolegom matematikom, toda ni jih bilo veliko, ki bi nalogo rešili v manj kot 5 minut, večina pa je sploh ni rešila pravilno. No, rešitev je precej enostavna:



Nekaj podobnega opisuje zdaj že pokojni Jakov Smorodinski v *Quantumu* (marec/april 1993 str. 64):

Odšel sem v delavnico, da mi naredijo 6 delov po danih načrtih. Ključavničar, s katerim sem se dogovarjal, se je zelo razburil. Mislil je, da se norčujem...

Poskusite narisati ali si predstavljati telesa, ki so podana s projekcijami



Da bi stvar poenostavil, sem jih izdelal kar sam iz papirja. Tule sta mreži.

Ali lahko pojasniš, kako iz enakega izreza lahko sestavimo dve neskladni telesi?

Iz šestih tetraedrov ali treh štiristranih piramid lahko sestaviš kocko (Če imaš Fishergeometric boš sestavljal iz delov drugega kompleta).

