TRETJI LETNIK — 1993–1994 – 1

LOGIKA

&

RAZVEDRILNA MATEMATIKA

Revijo sta za splet pripravila Nada in Marko Razpet
na podlagi datotek, ki jih je izdelal Darjo Felda.

Spoštovane bralke in bralci!

Pred nami je tretje leto izhajanja. Cilj, ki smo si ga zastavili, je, da pri številu naročnikov presežemo število 2000. Ali nam bo to uspelo, je odvisno tudi od vas. Zato vas prosimo, da revijo pokažete prijateljem, ki jih zanima logika in matematika.

Cena enega izvoda se bo tudi v tem šolskem letu gibala okoli 3 DEM $+5\%$ prometni davek. Tako bo prva številka stala 220 SIT.

Izidor Hafner

V S E B I N A

Logične naloge 3

Rešitve logičnih nalog 14

Tekmujmo v logiki 20

Šola logike – Silogizmi 25

Srednješolska priloga

Mednarodno iskanje matematičnih talentov 29

Skupaj skozi srednješolsko matematiko 36

Nomic ali kdo lahko zniža poslancem plače 41

Matematične naloge 50

Rešitve matematičnih nalog 54

Angleške naloge za osnovnošolce 56

Logika in matematika po svetu 61

Fishergeometric 66

Izdaja: Založniško podjetje LOGIKA d.o.o., Svetčeva 11, 61240 Kamnik,
št. žiro računa: $50140 - 603 - 57434$

Za izdajatelja: Izidor Hafner

Revija *Logika & Razvedrilna matematika* je vpisana v register časopisov pri *Ministrstvu za informiranje* pod registrsko številko *949*. Po mnenju *Ministrstva za informiranje* št. *23/89–92* šteje revija *Logika & Razvedrilna matematika* med proizvode informativnega značaja, za katere se plačuje davek od prometa po stopnji 5%.

Revijo *Logika & Razvedrilna matematika* subvencionira *Ministrstvo za šolstvo in šport*

Člani časopisnega sveta: prof. dr. Frane Jerman, prof. dr. Tomaž Pisanski in Darjo Felda, prof.

Strokovni pokrovitelj: Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko – Oddelek za teoretično računalništvo

Glavni in odgovorni urednik: dr. Izidor Hafner

Sodelavci: Marija Božnar, Jasna Bratanič, Breda Cestnik, Urša Demšar, Gregor Dolinar, Urška Drčar, Petra Ipavec, Alenka Kavčič, Dušanka Kocić, Jana Kristanc, Katka Kurent, Meta Lah, Nina Milač, Nika Novak, Hiacinta Pintar, Maja Pohar, Darja Polak, Tanja Soklič, Mirjana Todorovič, Aleš Vavpetič in Metka Žnidar

Jezikovni pregled: računalniški program *Besana*

Generalni sponzor: Marand d.o.o., zastopstvo Borland

Sponzorji: Državna založba Slovenije, Mlacom d.o.o., Mlakar & Co, Časopisno podjetje *Dnevnik*, NIL d.o.o., IR Electronic, Aster d.o.o.

Obdelava podatkov na računalniku firme *Mlacom* s programskim paketom PARADOX 3.5

Zadnja stran ovitka: Alfred Anžlovar, Aster d.o.o.

Tisk: Tiskarna "Planprint", Rožna dolina c. IV/32–36, Ljubljana

Ilustrirala: Ana Hafner

Naklada: 4000 izvodov

© 1993 LOGIKA d.o.o.

ISSN $0354 - 0359$

LOGIKA & RAZVEDRILNA MATEMATIKA
letnik *III*, št. 1, 1993/94

Cena revije: 220 SIT vključuje 5% prometni davek

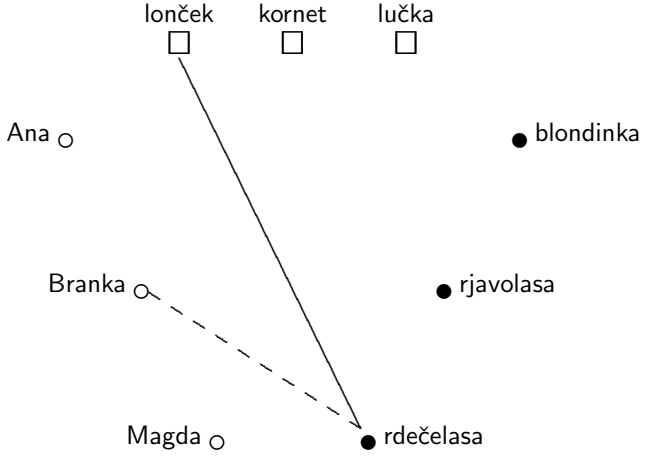
LOGIČNE NALOGE

1. DEKLETA

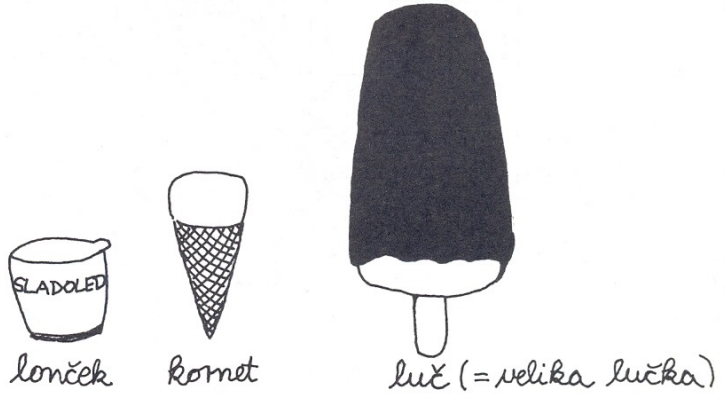
Tri dekleta (eni je ime Ana), različnih barv las (ena je blondinka), so kupile različne vrste sladoleda (ena je kupila kornet).
Kakšen sladoled je katera kupila in kakšne barve las ima, če vemo

1. Branka ni rdečelaska, ki je kupila sladoled v lončku.
2. Magda, ki je rjavolasa, ni kupila lučke.

Nalogo rešuj z grafom.



S prekinjeno črto povežemo vozla, če med njima ni povezave (Branka ni rdečelasa), s polno črto pa povežemo vozla, če povezava obstaja (rdečelasa je kupila sladoled v lončku).



2. JEDLI IN PILI SO

Jaka je použil mleko, toda ne kislo. Ana ob kolaču ni pila čaja. Ali je Jana pila vročo čokolado?
Kokta je poplaknila slane kikirikije. Katja je pojedla jagodno kremo. Brane je popil limonado. Kdo je jedel sendvič?

Jaka	Ana	Jana	Katja	Brane
☐	☐	☐	☐	☐

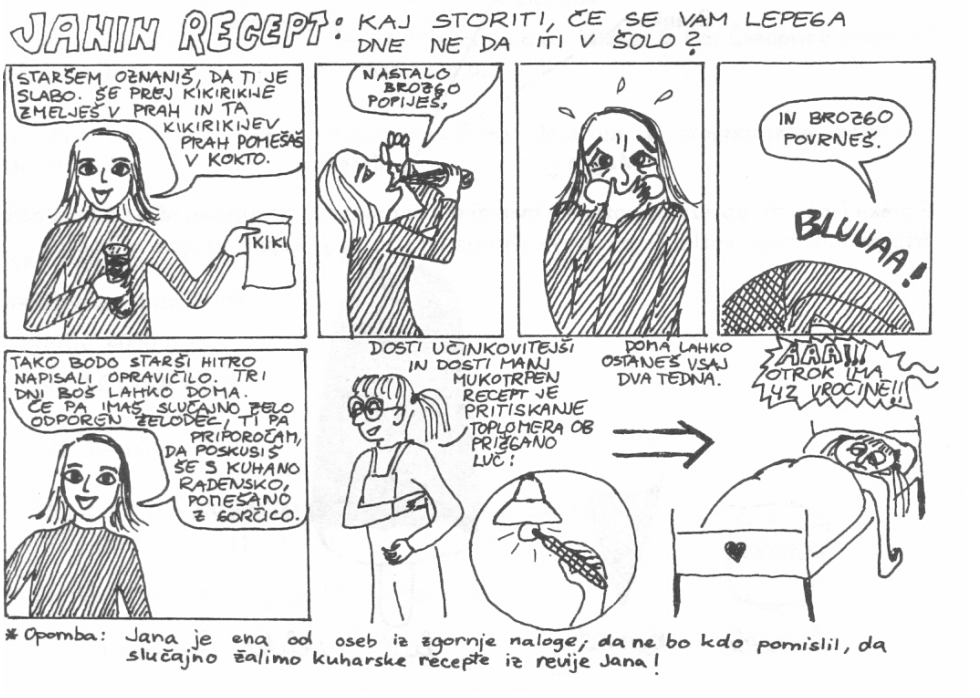
kislo mleko ○ ● mleko

kolači ○ ● čaj

kikirikiji ○ ● vroča čokolada

jagodna krema ○ ● kokta

sendviči ○ ● limonada



3. OTROCI TEKMUJEJO

Trije otroci so tekmovali v teku (enemu je ime Brane). Iz podatkov ugotovi otrokov priimek (eden se piše Ribnikar), barvo majice in uvrstitev.

1. Sin gospe Matjan je nosil rdečo majico.
2. Sanja je prišla na cilj za otrokom v modri majici.
3. Rumene majice ni nosil Drinovčev otrok.
4. Janez je bil tretji.

Pri reševanju si pomagaj s preglednico.

	Ribnikar	Matjan	Drinovec	rdeča	modra	rumena	1.	2.	3.
Janez									
Sanja									
Brane									
1.									
2.									
3.									
rdeča		○							
modra									
rumena			×						

Z "×" zaznamujemo negativno informacijo (elementarno prepoved), da Drinovčev otrok ni nosil rumene majice, s krožcem pa pozitivno (na primer, da je Matjan nosil rdečo majico).

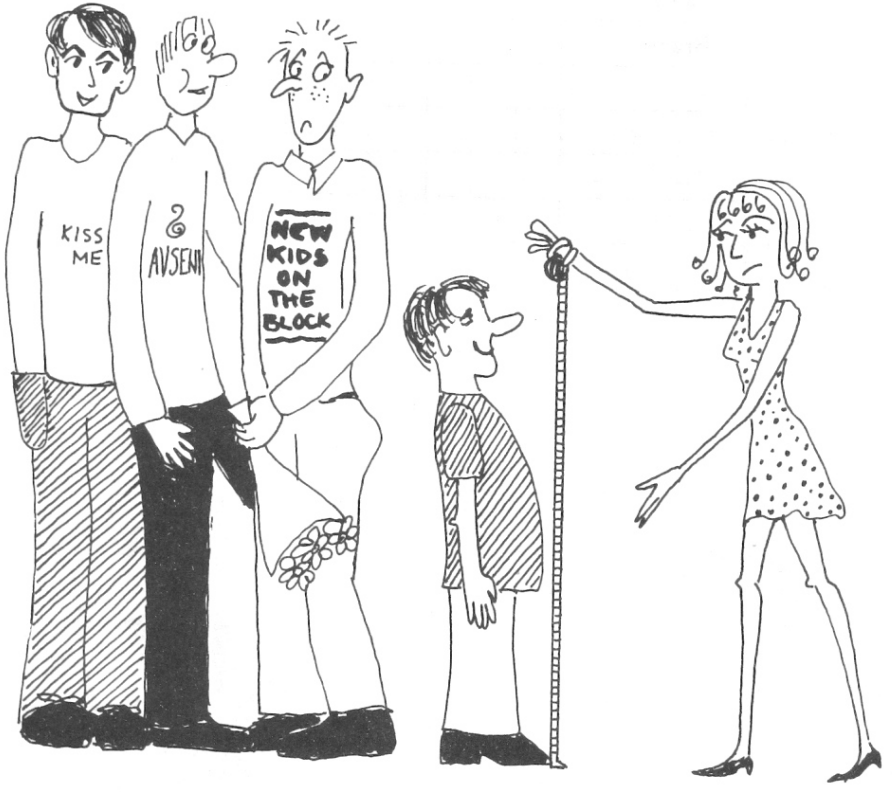


4. TATJANIN IDEALNI FANT

Tatjanin idealni fant je visok, temen in lep. Pozna štiri fante: Borisa, Gregorja, Matjaža in Tomaža. Samo eden od teh štirih ima vse tri lastnosti, ki jih Tatjana zahteva.

1. Vsak izmed četverice ima vsaj eno iskano lastnost.
2. Trije fantje so visoki, dva sta temna in en lep.
3. Gregor in Boris sta enako visoka (nista nizka).
4. Boris in Matjaž nista oba visoka.
5. Tomaž in Gregor imata isto barvo polti.

Kdo je Tatjanin idealni fant?



5. UVOZ – IZVOZ

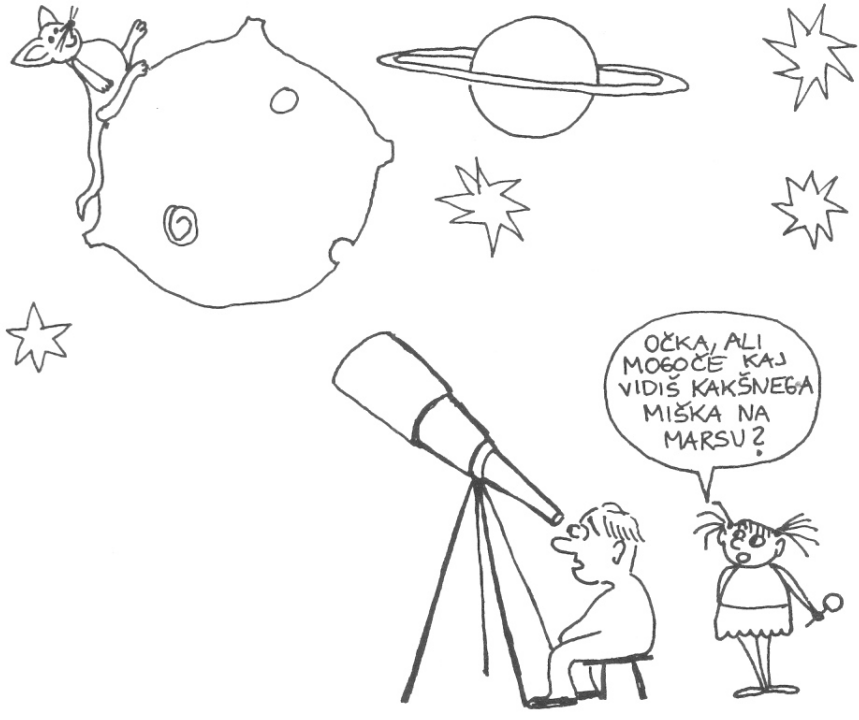
Pisatelju so se pri pisanju poučne pripovedke zamešale države (Lamia, Marlia, Nonia, Orlia in Perdria) in podatki o njih. Pomagaj mu tako, da ugotoviš, koliko prebivalcev ima katera država (5 milijonov, 5.5 milij., 64 milij., 7 milij., 7.5 milij.), kaj največ uvaža in kaj največ izvaža (trije izdelki so sir, usnje in vino).

1. Dežela, ki uvaža kolesa, ne izvaža ne ur in ne usnja in ima 1.5 milij. prebivalcev več kot Lamia.
2. Orlia, ki uvaža čaj ali meso in ne izvaža usnja, ima 0.5 milij. prebivalcev več kot dežela, ki izvaža sol.
3. Dežela s 6 milij. prebivalcev (ki ni Perdria) uvaža volno in izvaža zelo dober mlečni proizvod.
4. Nonia izvaža ure in ima manj prebivalcev kot dežela, ki uvaža avtomobile.
5. Dežela, ki uvaža čaj, ima več prebivalcev kot tista, ki uvaža meso. Marlia ima več prebivalcev kot Perdria.

6. DRUŽINSKI TELESKOP

Lansko pomlad je gospod Kovač kupil velik teleskop in ga postavil na teraso. V navado cele družine je prišlo nočno raziskovanje neba. Nek večer je bilo na nebu moč razbrati kar pet planetov: Jupitra, Marsa, Neptuna, Saturna in Venero. Vsak družinski član si je izbral svoj planet in poiskal informacije o njem. Iz spodaj navedenih podatkov ugotovi, kateri planet si je kdo izbral in njegovo oz. njeno ime (eno je Karmen).

1. Marija, Helena, oče in hči so izredno uživali v poslušanju informacij o Jupitrovih dvanajstih lunah.
2. Marija je še veliko raje poslušala zanimivosti o Veneri.
3. Oče se ni lotil poročila o Veneri ali Saturnu.
4. Tista oseba, ki si je izbrala Mars, je odgovarjala na vprašanja ostalih štirih: Helene, Borisa, babice in sina.



7. ZAVAROVALNA POLICA

Mohorčič in še 5 članov vodstvenega kadra v neki tovarni je polovico zadnje plače dalo za življenjsko zavarovanje. Iz spodaj navedenih podatkov ugotovi na kakšnem delovnem mestu dela kdo in višino njegove zavarovalne police. Vse so večkratniki 6.000 SIT. Nobeden pa seveda ni delal zastonj.

1. Celotna vrednost zavarovalnih polic je 180.000 SIT.
2. Škuljeva polica je vredna polovico police vodje finančne službe.
3. Vodja prodaje ima za 6.000 SIT večjo polico kot Škulj in za 18.000 SIT večjo kot Vilfan.
4. Korenova polica je dvakrat večja kot Rudeževa.
5. Ena izmed polic je vredna več kot je trikratna vrednost police samostojnega direktorja.
6. Slaparjeva polica je dvakrat večja kot polica samostojnega direktorja.
7. Vodja oddelka za propagando ima polico večjo kot vodja nabave (ki pa nima najmanjše) in je vredna 18.000 SIT več kot polica vodje skladišč.
8. Rudeževa polica je vredna tretjino vrednosti police vodje prodaje.

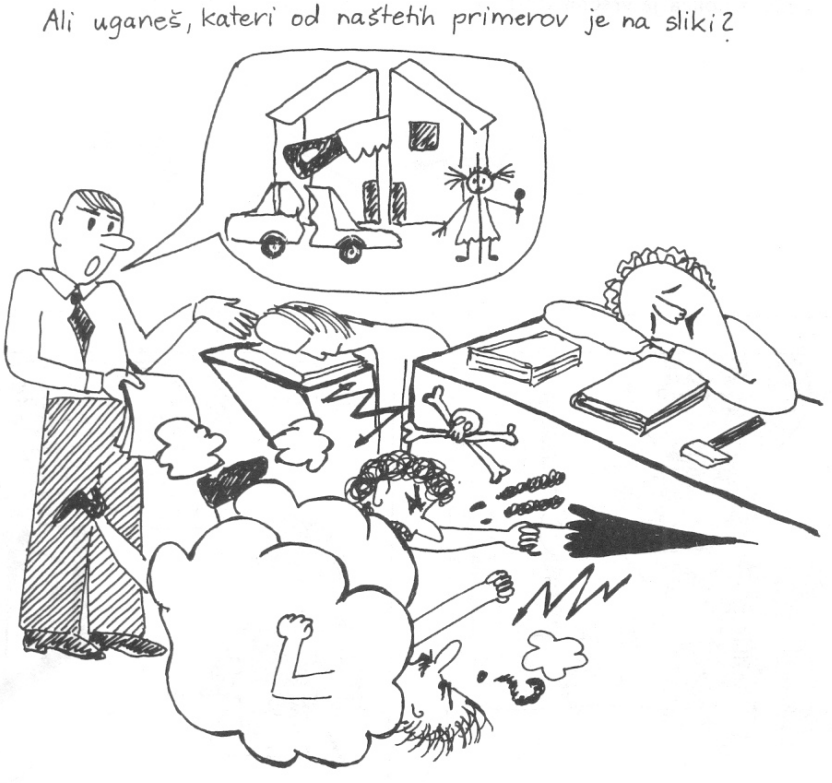




8. NA SODIŠČU

Sodnik Marin je imel zelo napet urnik na sodišču prejšnjo sredo. Tega dne je obravnaval kar pet primerov: posvojitev, ločitev, pritožbo, uvodno zaslišanje v zvezi z vlomom in tožbo za očetovstvo. Iz spodaj navedenih podatkov ugotovi ime in priimek odvetnikov, ki so zagovarjali primere, in vrstni red, kako so primeri potekali.

1. Trije jutranji primeri so bili prava rutina: ločitev, primer gospe Basle in Suzanin primer. Popoldanska primera pa sta trajala veliko dlje, toda primer gospoda Debelaka le ni trajal tako dolgo kot Klemenov.
2. Primer gospe Arh (ki ni posvojitev) je bil pred primerom vloma, toda za Janezovim primerom.
3. Gospod Erjavec je bil na vrsti za Vesno, toda pred Gregorjem (ki ni bil na vrsti zadnji).
4. Niti Gregor, niti gospod Cigler nista zastopala primera posvojitve in ne pritožbe. Primer vloma ni bil Klemenov.



9. POKLICI

Gospodje Kovač, Kuhar, Lovec in Pevec so po poklicu kovač, kuhar, lovec in pevec. Toda nihče ni po poklicu to, kar izdaja njegov priimek. Ko smo poskušali izvedeti, kdo je kdo, smo dobili tele štiri izjave:

1. Gospod Kovač je pevec.
2. Gospod Kuhar je kovač.
3. Gospod Lovec ni pevec.
4. Gospod Pevec ni lovec.

Očitno tu nekaj ni v redu, zato smo poizvedovali naprej in odkrili, da so kar tri izmed štirih izjav neresnične. Kdo je po poklicu kuhar?

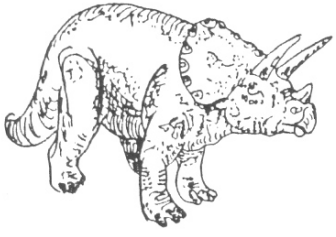


10. DINOZAVRI

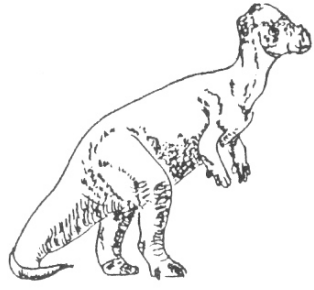
Dinozaver (*Dinosauria* – "strašen plazilec"). Nekateri so bili večji od dvajsetih metrov z dolgim vratom in še daljšim repom, drugi so bili "majhne" čokate postave z bodečimi izrastki po celem telesu, tretji so imeli čudno oblikovane glave polne koščenih bul, izboklin, grebenov in rogov.

S pomočjo naslednjih šestih stavkov poskusite ugotoviti v katerem obdobju so živeli posamezni dinozavri, koliko so bili veliki in po kateri lastnosti se razlikujejo od drugih.

1. *Diplodok* ni najstarejši dinozaver, je pa eden izmed največjih dinozavrov, kar jih je kdajkoli tlačilo zemeljsko skorjo. Njegov vrat je bil dolg vsaj štirinajst metrov.
2. Pred 65 milijoni let je živel dinozaver (ni bil *stegozaver*) s ptičjim okolčjem, ki je bil večji od *kelofiza* in manjši od *pahikefalozavra*.
3. Rastlinojedi dinozaver, ki je bil natančno dvakrat starejši od *pahikefalozavra*, je imel velik želodec v katerem je prebavljal hrano, saj s svojimi šibkimi zobmi ni mogel prežvečiti listja z dreves.
4. Tri metre velik dinozaver (ni *stegozaver*) je bil zaradi svoje šibke in za dinozavra zelo majhne konstitucije dober tekač. Na rokah je imel po štiri prste, na nogah pa samo tri.
5. *Stegozavrova* velikost deli obdobje v katerem so živeli nekateri drugi dinozavri, ne deli pa obdobja v katerem je živel sam.
6. O pestrosti sveta dinozavrov pričata tudi naslednja dva dinozavra. Prvi je sedem metrov dolg dinozaver s štrlečimi ploščami po sredini hrbta, ki je imel tako majhno glavo, da njegovi možgani niso mogli biti večji od orehove lupine. Drugi dinozaver pa je lahko svojo glavo večkrat uporabljal, saj je bil vrh lobanje odebljen za več kot 25 cm (čeladaste oblike) in tako še posebej primeren za trkanje z drugimi dinozavri.

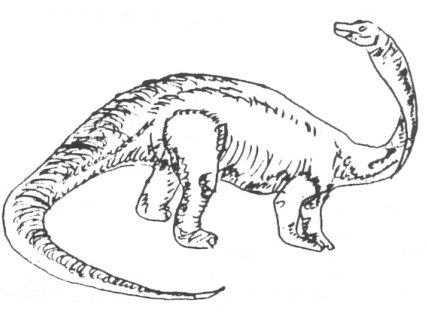






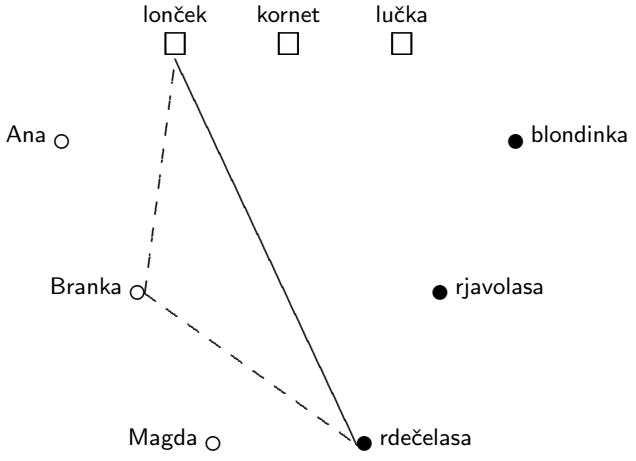
		ZNAČILNOST					VELIKOST					OBDOBJE				
		mnogi kotorezgani	dobertekač	odbel! lobanja	ptičje oklečje	šibki zobje	pr. 65 m. l.	pr. 70 m. l.	pr. 140 m. l.	pr. 150 m. l.	pr. 210 m. l.	3 metre	7 metrov	9 metrov	10 metrov	27 metrov
IME	Diplodok															
	Kelofiz															
	Pahikefalozaver															
	Stegozaver															
	Triceratop															
OBDOBJE	pr. 65 mil. let															
	pr. 70 mil. let															
	pr. 140 mil. let															
	pr. 150 mil. let															
	pr. 210 mil. let															
VELIKOST	3 metre															
	7 metrov															
	9 metrov															
	10 metrov															
	27 metrov															





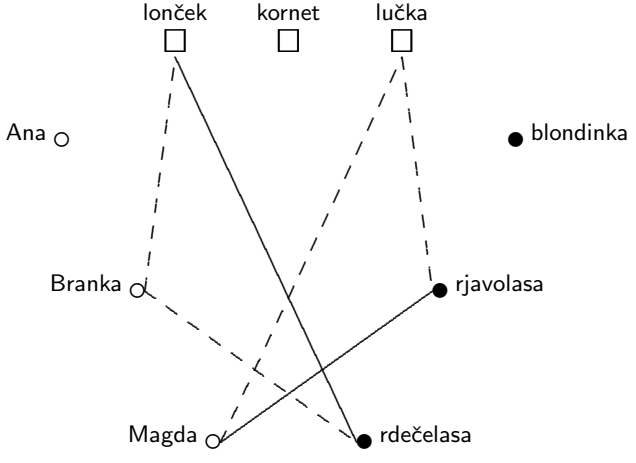
Rešitve logičnih nalog

1. DEKLETA

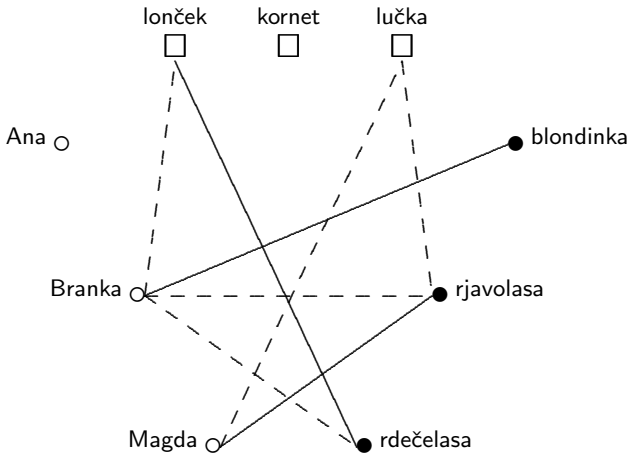


Ker Branka ni rdečelasa, ni naročila sladoleda v lončku. Zato povežemo vozla "Branka" in "lonček" s prekinjeno črto.

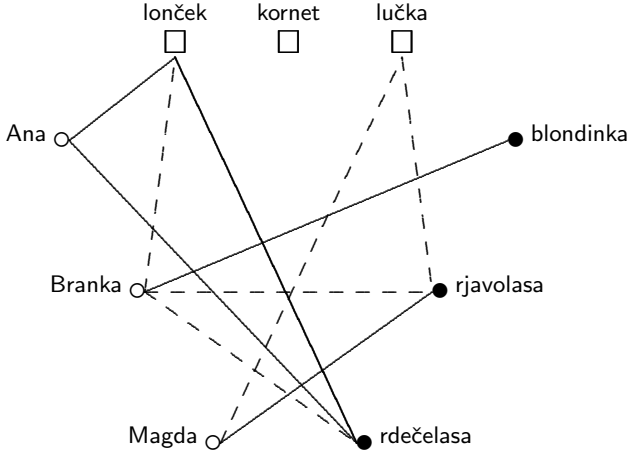
Drugi pogoj pravi, da je Magda rjavolasa (narišemo polno črto) in da Magda ni kupila lučke (prekinjena črta).



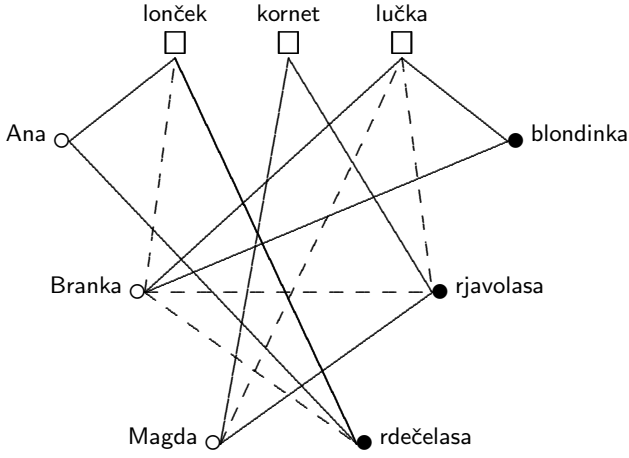
Zato rjavolaska ni kupila lučke. Ker Branka ni rdečelasa (1. pogoj) in ni rjavolasa (ker je to Magda), mora biti Branka blondinka.



Potem mora biti Ana rdečelasa (ki je naročila sladoled v lončku).



Rjavolasa Magda je kupila kornet, blondinka Branka pa lučko.



2. JEDLI IN PILI SO

Jaka	sendvič	mleko
Ana	kolač	vroča čokolada
Brane	kislo mleko	limonada
Katja	jagodna krema	čaj
Jana	kikirikiji	kokta

3. OTROCI TEKMUJEJO

Iz 1. podatka sklepamo, da je Matjan imel rdečo majico (zato nima majice druge barve) in je sin, kar pomeni, da mu ni ime Sanja.

	Ribnikar	Matjan	Drinovec	rdeča	modra	rumena	1.	2.	3.
Janez									
Sanja		×		×	×	O		O	
Brane									
1.									
2.									
3.									
rdeča	×	O	×						
modra		×							
rumena		×	×						

Sklepamo tudi, da Sanja nima rdeče majice. Tako smo prvi pogoj popolnoma izkoristili.

Sanja nima modre majice (2. pogoj), ker pa tudi rdeče nima, ima rumeno. Ker pa rumene majice nima Drinovčev otrok, se Sanja piše Ribnikar. Ker Sanja ni bila prva (2. pogoj), Janez pa je bil zadnji, je bila Sanja druga.

Ker je bil zadnji, Janez nosi rdečo majico, piše pa se Matjan. Brane nosi modro, piše pa se Drinovec.

4. TATJANIN IDEALNI FANT

– Iz (*2*) sledi, da eden izmed fantov ni visok. Iz (*3*) sledi, da sta Gregor in Boris oba visoka. Iz (*4*) pa sledi, da Matjaž ni visok.

– Iz (*1*) sledi, da je Matjaž temen (saj mora imeti vsaj eno lastnost, vemo pa, da ni visok). – Iz (*2*) sledi, da sta dva fanta temna. Iz (*5*) vidimo, da sta Tomaž in Gregor ali oba temna ali oba svetla. Ker je Matjaž temen, Tomaž in Gregor nista temna. – Boris je edini, ki je visok in temen in zato tudi lep.

POVZETEK: Boris je visok, temen in lep.
Gregor je visok.
Tomaž je visok.
Matjaž je temen.

5. UVOZ – IZVOZ

Dežela s 7.5 milij. je Marlia (z izločanjem *1, 2, 4, 5*). Dežela s 6 milj. uvaža volno, izvaža sir (*3*) in je Lamia (*2, 3, 4*). Marlia uvaža kolesa in izvaža vino ali sol (*1*). Orlia izvaža vino (*2, 4*). Marlia izvaža sol. Orlia ima 7 milij. (*2*) in uvaža čaj (*2, 5*). Nonia ima 5 milij. (*4*). Perdria ima 5.5 milij. Nonia izvaža ure (*4*) in uvaža meso (*4*). Perdria izvaža usnje in uvaža avtomobile.

POVZETEK:

dežela	prebivalstvo (v milij.)	uvoz	izvoz
Lamia	6	volna	sir
Marlia	7.5	kolesa	sol
Nonia	5	meso	ure
Orlia	7	čaj	vino
Perdria	5.5	avtomobili	usnje

6. DRUŽINSKI TELESKOP

Helena ni ne hči, ne oče (*1*), ne babica in ne sin (*4*); torej je mati. Marija ni hči (*1*), torej je babica. Sin ni Boris (*4*), torej je Peter. Oče je Boris. Karmen je hči. Boris ni govoril o Jupitru (*1*), Saturnu, Veneri (*3*) ali Marsu (*4*); torej je govoril o Neptunu. Marija ni govorila o Jupitru (*1*), Veneri (*2*) ali Marsu (*4*), ampak o Saturnu. Ostali se niso lotili Marsa (*4*), ampak je to storila Karmen. Helena se ni lotila Jupitra (*1*), ki ga je obdelal Peter. Helena je govorila o Veneri.

POVZETEK:

Boris	oče	Neptun
Helena	mati	Venera
Karmen	hči	Mars
Marija	babica	Saturn
Peter	sin	Jupiter

7. ZAVAROVALNA POLICA

Največja polica ni ne Slaparjeva (*5, 6*), ne Korenova (*4, 8*), ne Rudeževa (*4*), ne Škuljeva in ne Vilfanova (*3*); je Mohorčičeva. Polica vodje prodaje je višja kot Korenova, Rudeževa (*4, 8*), Škuljeva in Vilfanova (*3*); je Slaparjeva (druga največja), Mohorčič pa je vodja financ (*2, 3*). Če

je Rudeževa polica 6.000 SIT, je polica vodje prodaje 18.000 SIT (*8*) in Vilfanova nič (*3*). Če je Rudeževa polica 18.000 SIT ali več, skupni znesek presega 180.000 SIT (*1*). Tako je Rudeževa polica 12.000 SIT, vodja prodaje je plačal 36.000 SIT (*8*), Škuljeva je 30.000 SIT, Vilfanova 18.000 SIT (*3*), Mohorčičeva 60.000 SIT (*2*) in Korenova 24.000 SIT (*4*). Vilfan je samostojni direktor (*6*). Rudež je vodja skladišč, Koren je vodja nabave in Škulj vodja propagandne službe.

POVZETEK:			
	Koren	v. nabave	24.000
	Mohorčič	v. financ	60.000
	Rudež	v. skladišč	12.000
	Slapar	v. prodaje	36.000
	Škulj	v. propagande	30.000
	Vilfan	s. direktor	18.000

8. NA SODIŠČU

Dve ženski sta Vesna Basle (*1*) in Suzana Arh (*2*). Obe sta bili na vrsti zjutraj (*1*). Janezov primer je bil prav tako zjutraj (*2*); to je primer ločitve (*1*). Klemen in Gregor sta bila na vrsti popoldan. Gregor Debelak (*1*) je bil na vrsti kot četrti (*3*), Klemen pa kot peti. Erjavec ni Gregor (*3*), je Janez. Klemen se piše Cigler. Erjavec je bil na vrsti za Vesno (*3*), toda pred g. Arh (*2*); Vesna je bila prva, Janez drugi in Suzana tretja. Niti Gregor niti Klemen nista zastopala posvojitve ali pritožbe (*4*); Suzana je zastopala pritožbo (*2*). Posvojitev je Vesnina. Očetovstvo je Klemenovo (*4*). Vlom pa Gregorjev.

POVZETEK:				
	ločitev	Janez	Erjavec	2.
	očetovstvo	Klemen	Cigler	5.
	posvojitev	Vesna	Basle	1.
	pritožba	Suzana	Arh	3.
	vlom	Gregor	Debelak	4.

9. POKLICI

Ena izjava je pravilna.

1. Naj bo pravilna prva izjava. Potem imamo dva pevca (gospod Kovač in gospod Lovec). Zato ta možnost odpade.
2. Naj bo pravilna druga izjava. Potem je gospod Kuhar kovač, gospod Lovec pevec in gospod Pevec lovec. Gospod Kovač pa je kuhar.
3. Naj bo pravilna tretja izjava. Potem je gospod Pevec lovec, Gospod Kovač ni ne lovec, ne pevec in ne kovač, in je potemtakem zopet kuhar.
4. Naj bo pravilna četrta izjava. Zdaj je gospod Lovec pevec. Gospod Kuhar ni ne pevec, ne kovač in ne kuhar, torej je lovec. Tudi tokrat je gospod Kovač kuhar.

Zagotovo torej vemo, da je gospod Kovač kuhar.

10. DINOZAVRI

Diplodok	pred 140 mil. leti	šibki zobje	27 metrov
Kelofiz	pred 210 mil. leti	dober tekač	3 metre
Pahikefalozaver	pred 70 mil. leti	odebeljena lobanja	10 metrov
Stegozaver	pred 150 mil. leti	možgani veliki kot oreh	7 metrov
Triceratop	pred 65 mil. leti	ptičje okolčje	9 metrov

Obrazložitev:

1) Diplodok je bil velik 27 m in ni živel pred 210 milijoni let.

2a) Dinozaver s ptičjim okolčjem, ki je živel pred 65 milijoni let ni ne stegozaver, pahikefalozaver, kelofiz in tudi ni diplodok (saj je dinozaver s ptičjim okolčjem manjši od pahikefalozaverja, ki je manjši od največjega dinozavra – diplodoka). Potemtakem je triceratop dinozaver s ptičjim okolčjem.

2b) Ker je triceratop večji od kelofiza in manjši vsaj od dveh dinozavrov (pahikefalozavra in diplodoka) je lahko velik 7 ali 9 metrov. Od kelofiza so večji vsaj trije dinozavri, zato je lahko velik 3 ali 7 metrov. Pahikefalozaver pa je lahko velik 9 ali 10 m (kelofiz in triceratop sta manjša od njega).

3) Dinozaver s šibkimi zobmi je živel pred 140 mil. let. Pahikefalozaver pa pred 70 mil. let.

4) Iz *(2b)* sledi, da je lahko tri metre dolg "dober tekač" (ki ni stegozaver) samo kelofiz, ki je živel pred 150 ali 210 milijoni let – sledi iz *(2a)* in *(3)*.

5a) Stegozaver je lahko velik 7, 9 ali 10 metrov (sledi iz *(1)* in *(4)*). Ker število 9 ne deli nobenega izmed obdobij, odpade. Recimo, da je stegozaver dolg 10 metrov. Ker stegozavrova velikost ne deli obdobja, v katerem je sam živel, bi moral živeti pred 65 mil. let, kar pa je protislovje z *(2a)*. Sledi, da je stegozaver dolg 7 metrov in in je živel pred 150 milijoni let.

5b) Iz *(4)* in *(5a)* sledi, da je kelofiz (trimetrski "dober tekač") živel pred 210 milijoni let. $27-$metrski diplodok pa je lahko živel samo pred 140 milijoni let (sledi iz *(2a)*, *(3)* in *(5a)*) in je on dinozaver s šibkimi zobmi *(3)*.

5c) Ker je stegozaver velik 7 metrov, iz *(2b)* sledi, da je lahko triceratop (dinozaver s ptičjim okolčjem, ki je živel pred 65 milijoni let) velik 9 metrov, pahikefalozaver pa 10 metrov.

6) Stegozaver je sedem metrov dolg dinozaver *(5c)*, ki je živel pred 150 milijoni let, z možgani velikimi kot oreh. Desetmetrski pahikefalozaver *(5c)*, ki je živel pred 70 milijoni let, pa je dinozaver z odebeljeno lobanjo.

TEKMUJMO V LOGIKI

Pred nami je 8. republiško (zdaj tudi državno) tekmovanje v logiki, zato ne bo odveč, če se spomnimo nalog s 1. tekmovanja. Prav bodo prišla posebej osnovnošolcem za pripravo na tekmovanje.

7. RAZRED

1. Trije igralci golfa – Tomaž, Dore in Hinko – gredo po poti. Tomaž vedno govori resnico, Dore in Hinko pa se včasih zlažeta.

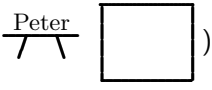


Kje je kdo?

2. Štirje športniki – Klemen, Peter, Pavel in Tone – so se po treningu vsedli za kvadratno mizo. Eden je nogometaš, drugi telovadec, tretji drsalec in eden plavalec.

Plavalec je sedel levo od Petra.
Telovadec je sedel nasproti Klemena.
Pavle in Tone sta sedela eden poleg drugega.
Eden od fantov z imenom na "P" je sedel levo od drsalca.

Kdo je nogometaš?

(Pri reševanju naj bo Petrov sedež določen takole: 

)

3. V Kopru, Kranju in na Ptuju živijo Kranjc, Kovačič in Pipan. Eden je kovač, drugi pečar in tretji pleskar. Kranjc ne živi v Kranju, čeprav vsi njegovi sorodniki živijo v Kranju. Pri dveh moških se črka poklica in mesta, v katerem živi, ujema s prvo črko priimka. Kranjc je pleskarjev svak.

Kje kdo živi in kateri poklic opravlja?

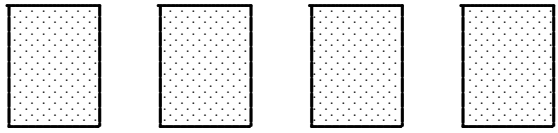
8. RAZRED

1. Tokrat smo na otoku vitezov in oprod. Vitezi vedno govorijo resnico, oprode pa nikoli.

a) Recimo, da srečamo otočane Miha, Tineta in Ceneta. Prva dva sta izjavila:
Miha: *Vsi trije smo oprode.*
Tine: *Natanko eden od nas je vitez.*
Kaj so otočani?

b) Kaj pa, če bi Miha in Tine rekla takole:
Miha: *Vsi trije smo oprode.*
Tine: *Natanko eden od nas je oproda.*
Kaj je Cene?

2. Na mizi imamo štiri ase navadnega kompleta kart. Obrnjeni so z licem navzdol. Aleška, Breda, Fani in Hana so takole ugibale, kaj je katera karta:



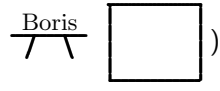
Aleška:	pik	srce	križ	kara
Breda:	srce	srce	kara	kara
Fani:	kara	srce	kara	pik
Hana:	križ	kara	pik	srce

Vsak as je bil vsaj enkrat pravilno imenovan. Dekleta so imela enako število pravilnih ugibanj.
Kako si sledijo asi na mizi?

3. Štirje glasbeniki – Ana, Cirila, Boris in Davor – so se po koncertu vsedli za kvadratno mizo. Eden od glasbenikov je violinist, drugi pianist, tretji flavtist in eden bobnar.

Oseba, ki je sedela nasproti Borisa, je pianist.
Oseba, ki je sedela nasproti Davorja, ni flavtist.
Levo od Ane sedi violinist.
Levo od Cirile ne sedi bobnar.
Flavtist in bobnar sta poročena.

Kdo je bobnar?

(Pri reševanju označi Borisov sedež takole: 

)

1. LETNIK SREDNJE ŠOLE

1. Na zabavi je bilo pet parov. Pri nobenem plesu noben fant ni plesal s svojim dekletom. Dragovo dekle je plesalo s fantom, katerega dekle je plesalo z Markom. Drago je plesal s Klemenovim dekletom. Primož je plesal z dekletom, katere fant je plesal z Janezovim dekletom.
Kdo je plesal s Primoževim dekletom?

2. Pet deklet si je za novoletna darila dalo štiri knjige tako, da je vsaka tudi dobila štiri knjige. Toda nobeni dve dekleti nista svojih knjig dali na enak način. Tako je, na primer, ena dala dvema drugima vsaki po dve knjigi.
Breda je dala vse Aleški. Cvetka je dala tri Evi.
Kdo je dal knjige Danici?

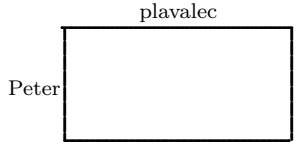
3. Miloš in Primož se preizkušata v naslednji igri. Nekdo jima na čelo napiše vsakemu po eno od dveh zaporednih naravnih števil. Vidita seveda število, ki je napisano na čelu drugega, svojega števila pa ne. Pravila določajo, da morata izmenično izjavljati:
"Ne vem, katero je moje število."
oziroma, na koncu
"Vem, katero je moje število."
Zmaga tisti, ki prvi ugotovi svoje število.
Predpostavljamo, da se Miloš in Primož ne motita v sklepanju in da sta poštena.
Recimo, da je Miloš prvi na potezi.
a) Kdo bo zmagal, če ima Miloš napisano 3, Primož pa 2?
b) Kdo bo zmagal, če ima Miloš napisano 2, Primož pa 3?
c) Ali lahko poveš, kdo zmaga v splošnem primeru?

REŠITVE

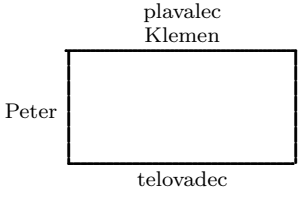
7. RAZRED

1. Izjave, ki so jih dali igralci, nasprotujejo ena drugi. Resnična je samo ena, to je Tomaževa izjava. Prvi z leve gotovo ni Tomaž, ker trdi, da je Tomaž v sredini. Ker je ta izjava napačna, Tomaž ni v sredini. *Tomaž je torej na desni.* Njegova izjava je resnična. Torej je *Hinko v sredini, na levi je Dore.*

2. Iz podatkov sklepamo: Peter ni plavalec, Klemen ni telovadec. Narišimo mizo in določimo sedež za Petra:



Pavel in Tone sedita eden poleg drugega, zato eden od njiju sedi nasproti Petru. Klemen torej sedi poleg Petra. Klemen mora sedeti levo od Petra in je plavalec. Če bi sedel desno, bi bil nasproti plavalca. Spodaj je telovadec.



Peter ne sedi levo od drsalca (ker sedi levo od telovadca). Peter ni drsalec, ker bi v nasprotnem primeru sedel Pavel levo od njega (sedi pa Klemen). Peter je torej nogometaš.

3. Ker ni dveh poklicev na "K", Pipan živi na Ptuju, je pa pečar ali pleskar. Ker Kranjc ne živi v Kranju, pa tudi na Ptuju ne, živi v Kopru. Kovačič potem živi v Kranju. Kranjc ni pleskar, je pa pleskarjev svak, ker pa vsi njegovi sorodniki živijo v Kranju, pleskar živi v Kranju. Kovačič je torej pleskar. Pipan, ki ni pleskar, mora biti pečar. Kranjc je Kovač.

8. RAZRED

1. *a)* Če bi bil Mihov stavek resničen, bi bil Miha vitez, pravi pa, da so vsi trije oprode, torej tudi

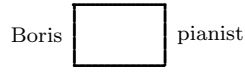
sam. Miha je torej oproda. Vsi trije pa niso oprode. Recimo, da je Tine tudi oproda. Potem je Cene vitez, ker vsi trije niso oprode. Potem pa je Tinetov stavek resničen in mora biti Tine vitez. To je protislovje, saj smo predpostavili, da je Tine oproda. Tine je torej vitez in to edini. Cene je zato oproda.

b) Miha je oproda, toda vsi trije niso. Če je oproda en sam, to je Miha, sta Tine in Cene viteza. Če sta oprodi dva, potem je Tine tudi oproda, ker je njegova izjava napačna. Cene je torej vitez v vsakem primeru.

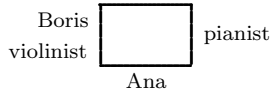
2. Največ pravilnih odgovorov bi imeli, če bi bila druga karta srce, tretja ali četrta pa kara. Tedaj bi imeli $3+1+1+1=7$ pravilnih odgovorov. Toda, ker so imela dekleta enako število pravilnih odgovorov, to število ne more biti 2, ker bi to dalo 8 pravilnih ugibanj, ker je bil vsak as uganjen natanko enkrat.

Druga karta z leve je kara (srce odpade).
Četrta kara z leve je pik (kara je že bila, srce odpade, ker je Hana že enkrat zadela).
Tretja karta z leve je križ (kara in Hanin odgovor odpadeta).
Prva karta je srce (Brede še nismo upoštevali oziroma srce je še ostalo).

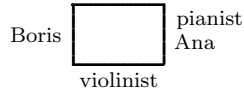
3. Boris ni pianist, Ana ni violinist. Skiciramo sliko in vstavimo podatke:



Ano lahko postavimo na spodnji sedež ali na desni sedež na sliki (zgornji ne pride v poštev).



Recimo, da je Ana spodaj, to je desno od Borisa. Boris je levo od nje in zato je violinist. Ana je bobnar ali flavtist. Zato je poročena in to z Davorjem (Boris je violinist). Cirila je pianist. Ana je levo od Cirile in ni bobnar. Torej je flavtist in nasproti Davorja. To je protislovje.
Ana torej sedi nasproti Borisa in je pianist. Levo od nje je violinist.



Boris je flavtist ali bobnar. Torej je poročen. Toda ne z Ano, ker je pianistka. Poročen je s Cirilo. Davor je zato violinist. Nasproti Davorja ni flavtist, zato je to bobnar in to Cirila.

1. LETNIK SREDNJE ŠOLE

1. Narišimo razpredelnico in prečrtajmo diagonalne elemente.

	D. d.	M. d.	K. d.	P. d.	J. d.
Drago	×	×	○	×	×
Marko		×	×		○
Klemen			×		
Primož		○	×	×	×
Janez			×		×

Sklepamo: Dragovo dekle ni plesalo z Markom. Vnesimo še, da je Drago plesal s Klemenovim dekletom. Prečrtajmo ustrezni stolpec in vrstico. Primož ni plesal z Janezovim dekletom. Recimo, da je plesal z Dragovim dekletom. Potem je Drago plesal z Janezovim dekletom. To ni res, saj Drago pleše s Klemenovim dekletom.
Primož torej pleše z Markovim dekletom. Marko zato pleše z Janezovim dekletom.
Dragovo dekle pleše z Janezom. Primoževo dekle pleše s Klemenom.

2. Različni načini za grupiranje štirih knjig so:

$$\begin{array}{cccc} 4 & & & \\ 3 & 1 & & \\ 2 & 2 & & \\ 2 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Narišemo razpredelnico:

dobila / dala	Aleška	Breda	Cvetka	Danica	Eva
Aleška	0	1	1	1	1
Breda	4	0	0	0	0
Cvetka	0		0	1	3
Danica	0	2	2	0	0
Eva	0			2	0

Le Aleška je lahko dala vsaki po eno knjigo, ker druge (razen Brede) Aleški ne morejo dati ničesar. Eva je tako odpravljena. Danica lahko da le dvema, ker treh knjig ne more dati, da dve Bredi in dve Cvetki. Danica lahko dobi dve knjigi le od Eve. Eno dobi od Cvetke (in eno od Aleške).

3. *a)* Miloš vidi Primoževo 2. Ve, da ima na čelu 1 ali 3, ne ve pa, katero. Na potezi je Primož. Vidi Miloševo 3, ve, da ima 2 ali 4, ne ve pa, katero. Na potezi je Miloš. Ve, da ima 1 ali 3. Toda katero? Če bi imel 1, potem bi Primož vedel, da ima 2. Toda Primož ni vedel. *Zato Miloš ve, da ima* 3.

b) Miloš vidi Primoževo 3. Ve, da ima 2 ali 4. Primož vidi Miloševo 2, sklepa, da ima 1 ali 3. Toda, če bi imel 1, bi Miloš vedel, da ima 2. Toda Miloš ne ve. *Primož sklepa, da ima* 3.

SILOGIZMI

Tvorec prve logične teorije je bil starogrški filozof $Aristotel$ (384 – 322 pred našim štetjem). Njegov sistem je znan kot $teorija\ silogizmov$, bolj natančno kategoričnih silogizmov. Danes bi rekli, da se je ukvarjal s teorijo neprazniih množic.

Silogizmi so posebne vrste sklepi, ki sestojijo iz dveh $premis$ (ali predpostavk) in $zaključka$. Tule je zgled:

Vsi ljudje so živa bitja.
Vsi Grki so ljudje.
Torej, vsi Grki so živa bitja.

ali drugače zapisano

Vsi ljudje so živa bitja.
Vsi Grki so ljudje.

Vsi Grki so živa bitja.

Seveda, informacija, ki jo dasta zgornji premisi, zadošča, da sklepamo na pravilnost spodnjega zaključka. Zato je zgornji silogizem $pravilen$ (oz. $veljaven$). Bolj natančno, zgornji silogizem je veljaven, ker je sklep

Vsi M so P.
Vsi S so M.

Vsi S so P.

vedno pravilen: Če sta zgornji izjavi (premisi) resnični, potem je resnična tudi spodnja izjava (zaključek), ne glede katere lastnosti zaznamujejo črke M, S in P.

Vzemimo zdaj sklep iz istih besed:

Vsi Grki so živa bitja.
Vsi Grki so ljudje.

Vsi ljudje so živa bitja.

Tudi tokrat sta premisi in zaključek resnični, sklepanje pa vseeno ni pravilno. To pomeni, da sklepanje oblike

Vsi M so P.
Vsi M so S.

Vsi S so P.

pri resničnih premisah ne da vedno resničnega zaključka. Ali lahko najdemo takšne pomene črkam M, S in P, da bosta premisi resnični, zaključek pa neresničen. Ni težko:

Vsi ljudje so razumna bitja.
Vsi ljudje so živa bitja.

Vsa živa bitja so razumna.

Še bolj jasno bo, če postavimo vse v ednino.

Vsak človek je razumno bitje.(resnica)
Vsak človek je živo bitje. (resnica)
Vsako živo bitje je razumno. (neresnica)

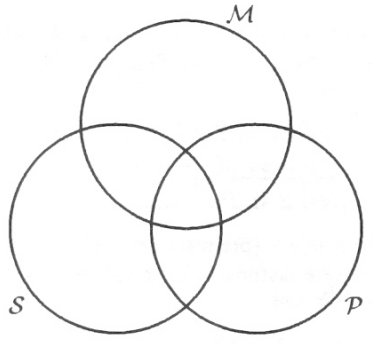
Videli smo, kako pokažemo nepravilnost silogizma. Kako pa bi pokazali pravilnost silogizma? Metoda, ki jo bomo uporabili, so *Vennovi diagrami*.

Pojme (lastnosti) M, S in P bomo predstavili s krogi, ki se med seboj prekrivajo. Če v nekem delu ni nobenega elementa, bomo tisti del osenčili. (To je nekoliko drugače, kot smo navajeni.)

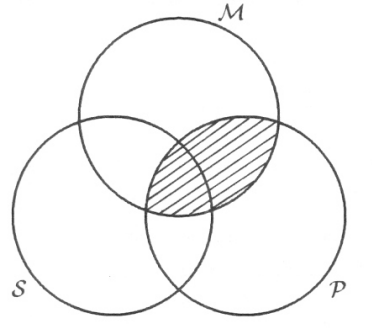
1. Zgled

Nobeno živo bitje nima treh nog.	Noben M ni P.
Vsak človek je živo bitje.	Vsak S je M.
Noben človek nima treh nog.	Noben S ni P.

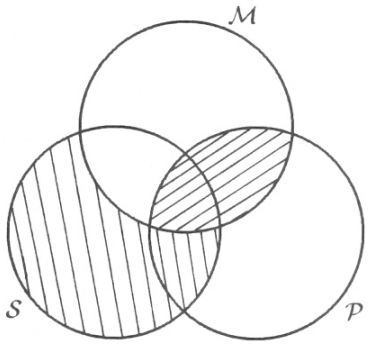
Silogizem bomo predstavili s krogi



Pokazati moramo, da je zaključek pravilen, če sta premisi pravilni. Pravilnost prve premise bomo ponazorili tako, da osenčimo tisti del kroga $\mathcal{M}$, ki je v krogu $\mathcal{P}$. Osenčitev nam namreč pomeni, da tam ni elementov.



Druga premisa pravi, da je vsak S tudi M. To pomeni, da izven kroga $\mathcal{M}$ ni nobenega S-a. Zato osenčimo ves del kroga $\mathcal{S}$, ki je zunaj kroga $\mathcal{M}$. Zdaj vidimo, da ni nobenega S-a v P. Zaključek je torej pravilen.



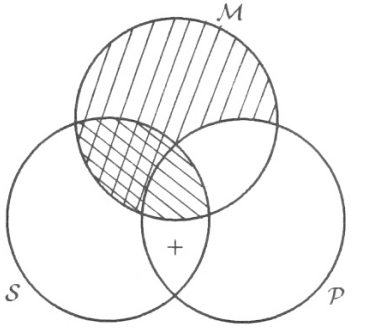
Kadar želimo prikazati, da je v nekem področju vsaj en element, mesto tistega elementa označimo s '+'. Z Vennovimi diagrami lahko pokažemo tudi nepravilnost silogizma.

2. Zgled

Vsak kit je sesalec.	Vsak M je P.
Nobena riba ni kit.	Noben S ni M.
Nobena riba ni sesalec.	Noben S ni P.

Čeprav so v levem silogizmu resnične tako premise kot zaključek, pa silogizem te oblike vseeno ni pravilen.

Narišimo tri kroge. Osenčimo celoten del kroga $\mathcal{M}$, ki je izven kroga $\mathcal{P}$ (s tem bo prva premisa resnična). Osenčimo tisti del kroga $\mathcal{S}$, ki je v $\mathcal{M}$ (tako bo resnična druga premisa). Toda to nam ne zagotavlja, da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{P}$ nimata skupnega elementa. Zapišimo '+' v presek $\mathcal{S}$ in $\mathcal{P}$. To pomeni, da je pri tej razlagi vsaj en S, ki je P. To pa je ravno negacija zaključka, da noben S ni P.



Naloge

Pokaži pravinost oziroma nepravilnost naslednjih silogizmov.

1. Vsi medvedi imajo kožuh.
Vsi grizliji so medvedi.
Vsi grizliji imajo kožuh.

2. Vse hiše so velike.
Vsa drevesa so velika.
Vsa drevesa so hiše.

3. Vse limone so rumene.
Nobena češnja ni rumena.
Nobena češnja ni limona.

4. Nekatere rdeče stvari rastejo.
Vse rože rastejo.
Nekatere rože so rdeče.

In še nekaj silogizmov Lewisa Carrolla.

5. Dictionaries are useful.
Useful books are valuable.
Dictionaries are valuable.

6. Gold is heavy.
Nothing but gold will silence him.
Nothing light will silence him.

7. His songs never last an hour.
A song, that lasts an hour, is tedious.
His songs are never tedious.

8. All, who are anxious to learn, work hard.
Some of these boys work hard.
Some of these boys are anxious to learn.

9. Ill-managed business is unprofitable.
Railways are never ill-managed.
All railways are profitable.

10. No bankrupts are rich.
Some merchants are not bankrupts.
Some merchants are rich.

Odgovori:				
1. p	**2.** n	**3.** p	**4.** n	**5.** p
6. p	**7.** n	**8.** n	**9.** n	**10.** n

SREDNJEŠOLSKA PRILOGA

❀ ✳ ❀ ✳ ❀ ✳ ❀ ✳ ❀ ✳ ❀ ✳ ❀ ✳ ❀ ✳ ❀ ✳ ❀ ✳ ❀ ✳

MEDNARODNO ISKANJE MATEMATIČNIH TALENTOV

International mathematical talent search

Začetki te akcije segajo v leto 1989 z imenom *USA mathematical talent search*, ki se ga udeležuje nakaj več kot 500 ameriških srednješolcev. Z začetkom izdajanja revije *Mathematics and Informatics quarterly* so akcijo prenesli na mednarodni nivo, tako da poteka vzporedno z istimi problemi.

Cilj te akcije je spodbujanje dijakov k reševanju matematičnih problemov, za neangleško govoreče pa tudi postopno navajanje na angleško terminologijo, ki je trenutno prevladujoča na področju matematično naravoslovnih ved.

Strokovni pokrovitelj akcije v Sloveniji je *Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, Oddelek za matematiko*.

Vsak krog akcije sestoji iz 5 problemov, ki jih komisija oceni z največ 5 točkami za vsako popolno rešitev. Nagrade bodo deležni uspešnejši reševalci 4 krogov, posebej pa tisti, ki bodo sodelovali v 10 krogih.

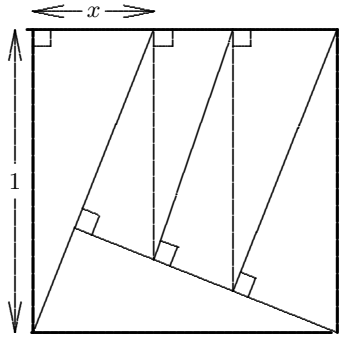
Rešitve problemov (v slovenščini ali angleščini) morate poslati najkasneje v 6 tednih po objavi nalog na naslov: *Izidor Hafner, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, Tržaška 25, 61000 Ljubljana*. Rešitve vsakega kroga morate poslati v posebni mapi ali dvojnem papirju formata $A4$, kjer so zapisani podatki: Ime in priimek, domači naslov, letnik šolanja, država, ime šole in ime mentorja. V mapi mora biti tudi pisna izjava, da ste naloge reševali samostojno.

Akcijo *IMTS* v Sloveniji vodita Izidor Hafner in Aleš Vavpetič v okviru *Komisije za popularizacijo matematike v srednji šoli*.

PROBLEMS – ROUND 8

Problem 1/8. Prove that there is no triangle whose altitudes are of length 4, 7, and 10 units.

Problem 2/8. As shown on the right, there is a real number x, $0 < x < 1$, so that the resulting configuration yields a dissection of the unit square into seven similar triangles. This x must be a zero of a monic polynomial of degree 5. Find this polynomial. (Note: A polynomial in x is monic if the coefficient of the highest power of x is 1.)



Problem 3/8. **(a)** Is it possible to rearrange the numbers 1, 2, 3, ..., 9 as $a(1)$, $a(2)$, ..., $a(9)$ so that all the numbers listed below are different? Prove your assertion.

$$|a(1) - 1|,\ |a(2) - 2|,\ ...,\ |a(9) - 9|$$

(b) Is it possible to rearrange the numbers 1, 2, 3, ..., 9, 10 as $a(1)$, $a(2)$, $a(3)$, ..., $a(10)$ so that all the numbers listed below are different? Prove your assertion.

$$|a(1) - 1|,\ |a(2) - 2|,\ |a(3) - 3|,\ ...,\ |a(10) - 10|$$

Problem 4/8. In a 50 meter run, Anita can give at most a 4-meter advantage to Bob and catch up with him by the finish line. In a 200 meter run, Bob can give at most a 15-meter advantage to Carol and catch up with her by the end of the race. Assuming that all three of them always proceed at a constant speed, at most how many meters of advantage can Anita give to Carol in a 1000 meter run and still catch up with her?

Problem 5/8. Given that a, b, x, and y are real numbers such that

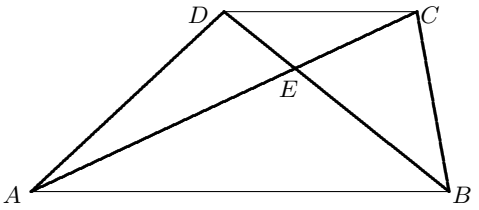
$$\begin{aligned} a + b &= 23, \\ ax + by &= 79, \\ ax^2 + by^2 &= 217, \\ ax^3 + by^3 &= 691, \end{aligned}$$

determine $ax^4 + by^4$.

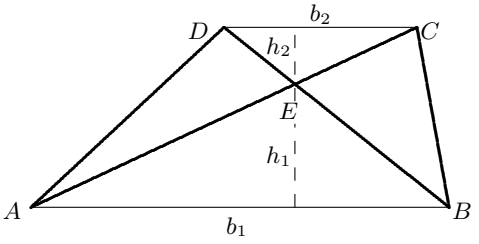
SOLUTIONS – Round 7

1/7

In trapezoid $ABCD$, the diagonals intersect at E, the area of $\triangle ABE$ is 72, and the area of $\triangle CDE$ is 50. What is the area of trapezoid $ABCD$?



Solution 1: Since triangles CDE and ABE are similar, the ratio of their side lengths and altitudes is the square root of the ratio of their areas: $\sqrt{50/72} = 5/6$. Denoting their bases and altitudes by b_1, b_2, h_1, h_2, as in the figure on the right, we find that the area of trapezoid $ABCD$ is



$$\frac{1}{2}(b_1+b_2)(h_1+h_2) = \frac{1}{2}(b_1+\frac{5}{6}b_1)(h_1+\frac{5}{6}h_1) = \frac{1}{2}(\frac{11}{6}h_1)(\frac{11}{6}b_1) = 242$$

since $\frac{1}{2}b_1h_1 = 72$.

Solution 2: As above, $\triangle CDE$ and $\triangle ABE$ are similar, and the ratio of their side lengths is $5/6$. Since $\triangle DAE$ has the same height as $\triangle CDE$, and its base, AE, is $6/5$ times as long as CE, its area is $(6/5)50 = 60$. Similary, the area of $\triangle CBE$ is also 60. Thus the area of trapezoid $ABCD$ is $72 + 50 + 60 + 60 = 242$.

Comments: More generally, if the areas of the two similar triangles are T_1 and T_2, then the each of the other two triangles has area $\sqrt{T_1T_2}$, and the area of the trapezoid is $T_1 + T_2 + 2\sqrt{T_1T_2} = (\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2})^2$.

2/7

Prove that if a, b, and c are positive integers such that $c^2 = a^2 + b^2$, then both $c^2 + ab$ and $c^2 - ab$ are also expresible as the sums of squares of two positive integers.

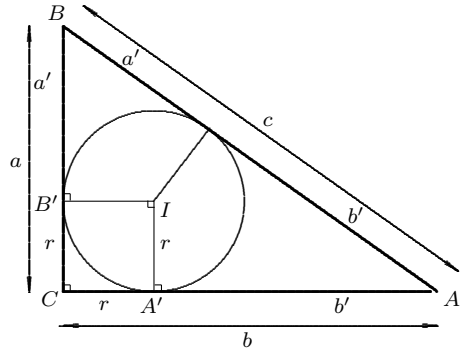
Solution 1: We seek integers x and y such that $x^2 + y^2 = c^2 + ab$. After looking at severel examples, we conjucture that $x + y = a + b$ and $xy = 2ab$. Solving these equations yieldes $x = (a + b + c)/2$ and $y = (a + b - c)/2$. If we substitute these expressions into $x^2 + y^2$ and simplify we get $c^2 + ab$.

To complete the proof, we need to show that x and y are indeed positive integers. By the triangle inequality, we have $a + b > c$, and all of a, b, and c are positive, so x and y are positive. Further, since $a^2 + b^2 = c^2$, there must be either 0 or 2 odd numbers among a, b, and c, and therefore, $a \pm b \pm c$ must be even. Thus, X and y are integers.

The proof for $c^2 - ab$ is identical, with $x + y = c$ and $xy = 2ab$, and we find that $c^2 - ab = ((-a + b + c)/2)^2 + ((a - b + c)/2)^2$.

Solution 2: From the theory of Pythagorean triangles, we know that there exists integers m and n with $m > n$ such that $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ and $c = m^2 + n^2$. (See any book of elementary number theory.) Then a quick computation shows that $c^2 + ab = (m(m + n))^2 + (n(n - m))^2$ and $c^2 - ab = (m(m - n))^2 + (n(n + m))^2$.

Solution 3: Since the square of an integer has the same parity as the integer itself, $a + b$ has the same parity as $a^2 + b^2 = c^2$, wich has the same parity as c. So, $a + b + c$ is even, and so the semiperimeter of the triangle shown on the right; i.e., $s = (a+b+c)/2$, is an integer. Since the triangle is right, $A'CB'I$ is a square and so $A'C = CB' = r$, the inradius of the triangle. Noting that $ab = 2rs$, $s = a'+b'+r$, $c = a'+b'$, $a = a'+r$, and that $b = b' + r$, it is easy to show that a', b', and r are all integers, and that $c^2 + ab = s^2 + r^2$ and $c^2 - ab = a'^2 + b'^2$.



Comments: *Solution 3* is clearly superior to the others, since it gives geometric meaning to the expression obtained for $c^2 - ab$ and $c^2 + ab$.

3/7

For n positive integer, denote by $P(n)$ the product of all positive integers divisors of n. Find the smallest n for which

$$P(P(P(n))) > 10^{12}$$

Solution 1: The problem can be solved by brute force by applying the definition of $P(P(P(n)))$ to small n, until the answer is found. Indeed, $P(1) = 1$, hence $P(P(P(1))) = 1$, while $P(2) = 1 \cdot 2 = 2$, hence $P(P(P(2))) = 2$. In fact, for any prime number p, $P(P(P(p))) = p$. Next we find that $P(4) = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$, hence $P(P(4)) = P(8) = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 = 64$, and $P(P(P(4))) = P(64) = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 64 = 2^{21} = 2^{12} \cdot 2^9 < 2^{12} \cdot 5^{12} = 10^{12}$. However, $P(6) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$, hence $P(P(6)) = P(36) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 36 = 10077696$, and $P(P(P(6))) = P(10077696) > 1 \cdot 10077696 \cdot 2 \cdot 5038848 = 10077696^2 = 10155995668416 > 10^{14} > 10^{12}$. So the answer is 6.

Comments: Having noted that primes are unlikely candidates (although a prime number greater than 10^{12} will do the trick), we can examine $P(q^m)$ for q prime. The divisors of q^m are q^i, $0 \le i \le m$, and their product, $P(q^m) = \prod_{i=0}^{m} q^i = q^{m(m+1)/2}$. If $n = p^a q^b$ with both p and q prime, then $P(n) = \prod_{i=0}^{a} \prod_{j=0}^{b} p^i q^j = p^{(b+1)(a^2+a)/2} q^{(a+1)(b^2+b)/2}$.

In general, if $P(n) = n^{d_n/2}$, where d_n is the number of divisors of n. To justify this statement, order the divisors from high to low. If the entries in these two lists are multiplied component-wise, each result is n, and there are d_n such products. Thus the product of all the entries in both lists is $[P(n)]^2 = n^{d_n}$, and $P(n) = n^{d_n/2}$. Given the prime factorization $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_m^{a_m}$, we find that n has $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_m + 1)$ divisors, since there are $a_i + 1$ choices for the exponent of p_i.

4/7

In an attempt to copy down from the board a sequence of six positive integers in an arithmetic progression, a student wrote down the five numbers,

$$113, 137, 149, 155, 173,$$

accidentally omitting one. He later discovered that he also miscopied one of them. Can you help him recover the original sequence?

Solution: Since the differences of members of an arithmetic progression must be the same, we first observe the following: if we have four numbers $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ in which the differences $d_2 - d_1,\ d_3 - d_2,\ d_4 - d_3$ are all different, then it is impossible to enlarge this set of four numbers to a set of six numbers which would, in fact, be part of an arithmetic progression. To see this, observe that only by halving them can we hope to make the progression arithmetic. However, halving two different numbers will still keep them different.

This observation shows that 113 could not have been the miscopied number. If it were, the other four numbers would be in the sequence, but the differences between the other four numbers are 12, 6, and 18. By similar reasoning, one can show that 173, as well as 137, must have also been in the original sequence.

To complete the solution, we must either add three more numbers to the sequence 113, 137, 173, so as to make it arithmetic, or limit ourselves to the two numbers 113 and 173, and add four numbers to them. In both cases we will find that the common difference must have been 12.

Since $137 - 113 = 24$ and $173 - 137 = 36$, only by halving first difference (24) and dividing the second one (36) by three we can arrive at equal differences. Hence we are led to the arithmetic progression 113, 125, 137, 149, 161, 173, from which 125 was omitted and 161 was miscopied as 155.

If we start with 113 and 173, then depending on the correct positions of the miscopied number and the omitted number, the number of members of the original progression between 113 and 173 must have been 2, 3, or 4. Recall that if there are k numbers between two members, $a < b$, of an arithmetic progression then the common difference in the sequence is equal to $(b-a)/(k+1)$. Therefore, since $173-133 = 60$, the common difference in our original sequence must be $60/3 = 20$, $60/4 = 15$, or $60/5 = 12$. But since there are four differences in the given sequence $(24,\ 12,\ 6,$ and $18)$, one of these differences must be the common difference of the original arithmetic sequence, since changing one of the five numbers and adding a new number to the given sequence will change at most three of these differences. Since 20 and 15 are not in this set of differences, the common

difference is 12. The only way for 113 and 173 to be in an arithmetic sequence with the common difference 12 is for the original sequence to be 113, 125, 137, 149, 161, and 173. Thus, again we find that 125 was omitted and 161 was miscopied as 155.

Comments: One should notice that not all such sequences come from a unique arithmetic sequence. As an example, the reader should observe that the sequence 113, 119, 125, 137, 149 determines two different arithmetic sequences which could have been on the board.

It should also be noted that the arithmetic could have been simplified by substracting 113 from each of the given numbers, and then dividing the resulting ones by 6. Hence one could have concentrated on the smaller numbers 0, 4, 6, 7, 10, and then apply the findings to the larger ones. In this setting, the problem becomes nearly tranparent!

5/7

Let $T = (a, b, c)$ be a triangle with sides a, b, and c and area $\triangle$. Denote by $T' = (a', b', c')$ the triangle whose sides are the altitudes of T (i.e., $a' = h_a$, $b' = h_b$, $c' = h_c$) and denote its area by $\triangle'$. Similarly, let $T'' = (a'', b'', c'')$ be the triangle formed from the altitudes of T', and denote its area by $\triangle''$. Given that $\triangle' = 30$ and $\triangle'' = 20$, find $\triangle$.

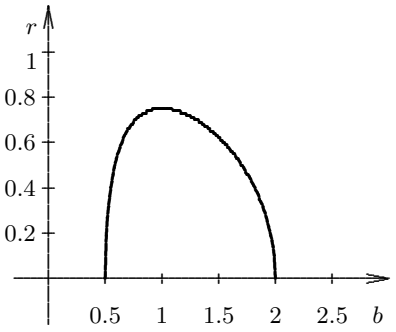
Solution: From $aa' = bb' = cc' = 2\triangle$ and $a'a'' = b'b'' = c'c'' = 2\triangle'$, it follows that $a/a'' = b/b'' = c/c'' = \triangle/\triangle'$. Hence T and T'' are similar, with a ratio of similitude, $\triangle/\triangle'$. It follows that $a'/a''' = \triangle/\triangle'$ (corresponding parts of similar triangles are in the same ratio), and that $aa'/a''a''' = (\triangle/\triangle')^2$ (upon multiplying the previous equation by $a/a'' = \triangle/\triangle'$). Now if we make the substitutions $aa' = 2\triangle$ and $a''a''' = 2\triangle''$, and simplify the resulting equation, we get $\triangle = (\triangle')^2/\triangle'' = 30^2/20 = 45$.

Comments: It should be noted that the altitudes of an arbitrary triangle T will not form a triangle. However, if the triangle T' exists, then the altitudes of T' will also form a triangle T'', and as we saw, T'' will be similar to T. Moreover, $\triangle''/\triangle = (\triangle'/\triangle)^2$, whence $\triangle'/\triangle = \triangle''/\triangle'$. In other words, $\triangle, \triangle', \triangle''$ forms a geometric sequence with ratio $\triangle'/\triangle$. In this problem, this ratio was $30/45 = 20/30 = 2/3$.

If $T = (a, a, a)$, then T' is also equilateral and the constant ratio $\triangle'/\triangle$ equals $3/4$. If $T = (a, a, \sqrt{2}a)$ is an isosceles right triangle, then $\triangle'/\triangle$ equals $\sqrt{7}/4 \approx .6614$. It follows that the triangle T of this problem cannot be represented as either an equilateral or isosceles right triangle. Nevertheless, the conditions of the problem can be satisfied.

In fact, it can be shown that if $0 < r_0 \leq 3/4$ then there exists an isosceles triangle of any given area $\triangle$ for which the altitudes form a triangle of area $\triangle'$ and $\triangle'/\triangle = r_0$. To this end, consider the function $f(x, y, z) = \sqrt{(x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z)}$.

will form a triangle if and only if $xy < xz + yz$, $xz < xy + yz$, and $yz < xy + xz$; and, by Heron's formula, the area of T is $\frac{1}{4}f(x,y,z)$. One can also show that the ratio $\triangle'/\triangle$ is given by $r(x,y,z) = \frac{1}{4}f(x,y,z)f(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z})$.



Now consider $T = (1,1,b)$, where $\frac{1}{2} < b < 2$. Then the altitudes of T do form a triangle, and $\triangle'/\triangle = r(1,1,b) = \frac{1}{4}\sqrt{17 - 4b^2 - 4/b^2}$. Then (as the graph of $r(1,1,b)$ in the adjoining figure illustrates) for $0 < r_o < 3/4$ there are values b_1 and b_2 with $\frac{1}{2} < b_1 < 1 < b_2 < 2$ such that $r(1,1,b_1) = r(1,1,b_2) = r_0$. (Also, $r(1,1,b)$ attains its maximum of $3/4$ when $b = 1$, i.e., when T is equilateral.)

One may now obtain a triangle similar to $T_1 = (1,1,b_1)$ of a desired area $\triangle$ by "scaling" the sides of T_1 by a factor of $\sqrt{4\triangle/f(1,1,b_1)}$. It is interesting to note that the triangle of area $\triangle' = r_0\triangle$ formed by the altitudes of this triangle is in fact similar to $T_2 = (1,1,b_2)$. This procedure, applied with $r_0 = 2/3$ and $\triangle = 45$, yields a triangle $T = (a,a,b)$, where

$$a = \sqrt{\frac{6480\sqrt{2}}{\sqrt{7487 - 55\sqrt{2737}}}} \quad \text{and} \quad b = \sqrt{\frac{90(89 - \sqrt{2737})\sqrt{2}}{\sqrt{7487 - 55\sqrt{2737}}}},$$

satisfying the conditions of the problem.

Some experimentation with the computer algebra system $Mathematica$ will also yield a non-isosceles example, with sides given numerically, as $T = (9.11585, 9.87902, 13.2045)$, as well as the conjecture that generally the ratio $\triangle'/\triangle$ cannot exceed $3/4$.

SKUPAJ SKOZI SREDNJEŠOLSKO MATEMATIKO

1. DEL

1. Za koliko procentov je M večji od N?

   (a) $\frac{100(M-N)}{M}$ *(b)* $\frac{100(M-N)}{N}$ *(c)* $\frac{M-N}{N}$ *(d)* $\frac{M-N}{M}$ *(e)* $\frac{100(M+N)}{N}$

2. Primerjaj relativni napaki naslednjih dveh meritev: napaka 2 cm pri merjenju 10m dolge daljice ter napaka 2 dm pri merjenju 100 m dolge daljice!

   (a) Prva je večja za 18% *(b)* Enaki sta *(c)* Prva je manjša
   (d) Prva je desetkrat tolikšna kot druga *(e)* Pravilni sta trditvi (a) in (d)

3. V enakostraničnem trikotniku s stranico a povežemo razpolovišča stranic in s tem dobimo nov enakostranični trikotnik. Postopek ponovimo na tem trikotniku in ga nadaljujemo v neskončnost. Kolikšna je vsota obsegov vseh tako nastalih trikotnikov?

   (a) Neskončno velika *(b)* $5\frac{1}{4}$ *(c)* $2a$ *(d)* $6a$ *(e)* $4\frac{1}{2}a$

4. Od naslednjih trditev je ena nepravilna. Katera?

   (a) Podvojitev osnovnice danega pravokotnika povzroči podvojitev ploščine.

   (b) Podvojitev trikotnikove stranice povzroči podvojitev ploščine.

   (c) Podvojitev polmera danega kroga povzroči podvojitev ploščine.

   (d) Podvojitev imenovalca ulomka in deljenje števca z 2 spremeni kvocient.

   (e) Podvojitev dane količine lahko to količino tudi zmanjša.

5. Kolikšen kot oklepata kazalca na uri ob 2:15? (Mislimo seveda na urni in minutni kazalec.)

   (a) 30° *(b)* 5° *(c)* $22\frac{1}{2}^\circ$ *(d)* $7\frac{1}{2}^\circ$ *(e)* 28°

6. V prostoru je točka T, ki je od oglišč enakostraničnega trikotnika oddaljena po $\sqrt{13}$ cm, od vsake stranice pa 2 cm. Koliko je točka T oddaljena od ravnine trikotnika?

   (a) 0 cm *(b)* $1\frac{1}{2}$ cm *(c)* 6 cm *(d)* 1 cm *(e)* nič od naštetega

2. DEL

7. Vrednosti za a v enačbi $\log_{10}(a^2 - 15a) = 2$ sta

   (a) $\frac{15\pm\sqrt{233}}{2}$ *(b)* $20, -5$ *(c)* $\frac{15\pm\sqrt{305}}{2}$ *(d)* ± 20 *(e)* nič od naštetega

8. Polmer valjaste škatle je 8 cm, višina pa 3 cm. Za koliko moramo povečati bodisi radij bodisi višino škatle, da obakrat dobimo enako povečanje prostornine?

   (a) za 1 cm *(b)* za $5\frac{1}{3}$ cm *(c)* za katerokoli dolžino
   (d) nič od naštetega *(e)* naloga je nerešljiva

9. V enačbi $\frac{x(x-1)-(m+1)}{(x-1)(m-1)} = \frac{x}{m}$ sta korena enaka, če velja:

   (a) $m = 1$ *(b)* $m = \frac{1}{2}$ *(c)* $m = 0$ *(d)* $m = -1$ *(e)* $m = -\frac{1}{2}$

10. Če sta dva drogova, visoka 2 m in 8 m, 10 m vsaksebi, je višina presečišča daljic, ki vežeta vrh enega stebra z vznožjem drugega, enaka

    (a) 5m *(b)* 4m *(c)* 16m *(d)* 6m *(e)* nič od naštetega

11. Na neki zabavi naštejemo 28 rokovanj. Koliko ljudi je na zabavi, če se je vsak rokoval z vsakim?

    (a) 14 *(b)* 28 *(c)* 56 *(d)* 8 *(e)* 7

12. Korena enačbe $x^2 - 2x = 0$ lahko poiščemo tudi grafično kot abscise presečišč ustreznih parov grafov funkcij. Samo eden od naslednjih parov temu ne ustreza. Kateri?

    (a) $y = 2x, y = x^2$ *(b)* $y = x^2 - 2x, y = 0$ *(c)* $y = x, y = x - 2$
    (d) $y = x^2 - 2x + 1, y = 1$ *(e)* $y = x^2 - 1, y = 2x - 1$

13. Naj bo $f(x) = \cos\frac{\pi x}{3}$ in $g(x) = 2|x + 1|$. Določi $(g \circ f)(1990)$!

    (a) 1 *(b)* 0.5 *(c)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *(d)* $\sqrt{2}$ *(e)* π

14. Koliko rešitev ima enačba $\sin 2x = \cos 3x$ na intervalu $[0, \pi]$?

(a) 5 *(b)* 2 *(c)* 4 *(d)* 6 *(e)* 3

15. Izračunaj ploščino trikotnika, ki ga določajo središče krožnice $x^2+y^2-2x+4y+4 = 0$ in gorišče elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$!

(a) 24 *(b)* 8 *(c)* 15 *(d)* 18 *(e)* 12

3. DEL

16. Višinsko razliko 600 čevljev želijo premostiti z železnico. Strmino lahko ublažijo s tem, da progo podaljšajo in jo speljejo okrog vrha gore. Dodatna dolžina proge, potrebna za zmanjšanje strmine s 3% na 2%, je:

(a) 10000 čevljev *(b)* 20000 čevljev *(c)* 30000 čevljev
(d) 12000 čevljev *(e)* nič od naštetega

17. Katera od naslednjih trditev ne drži?

(a) Neenačba ostane v veljavi, če vsako od strani povečamo, zmanjšamo, množimo ali delimo z istim pozitivnim številom.

(b) Aritmetična sredina dveh različnih pozitivnih števil je večja od geometrijske.

(c) Denimo, da poznamo vsoto dveh pozitivnih števil. Njun produkt je največji, če sta enaki.

(d) Če sta a in b različni pozitivni števili, velja $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) > (\frac{1}{2}(a + b))^2$.

(e) Če je produkt dveh pozitivnih števil fiksen, je njuna vsota največja, če sta enaki.

18. Denimo, da poznamo $\log 8 = 0.9031$ in $\log 9 = 0.9542$. Edini logaritem, ki ga brez tabel ne moremo izračunati, je

(a) $\log 17$ *(b)* $\log \frac{5}{4}$ *(c)* $\log 15$ *(d)* $\log 600$ *(e)* $\log 0.4$

19. Ploščina kvadrata, včrtanega v polkrog, je proti ploščini kvadrata, včrtanega v celoten krog, v razmerju

(a) $1 : 2$ *(b)* $2 : 3$ *(c)* $2 : 5$ *(d)* $3 : 4$ *(e)* $3 : 5$

20. Težiščnici na kateti pravokotnega trkotnika merita 5 in $\sqrt{40}$. Dolžina hipotenuze je

(a) 10 *(b)* $2\sqrt{40}$ *(c)* $\sqrt{13}$ *(d)* $2\sqrt{13}$ *(e)* nič od naštetega

21. Realna komponenta kompleksnega števila iz prvega kvadranta je štirikrat večja od imaginarne. Kolikokrat je realna komponenta njegovega kvadrata večja od imaginarne komponente le-tega?

(a) 1.875 *(b)* 2.55 *(c)* 2.85 *(d)* 4.875 *(e)* 16

	1.b	2.b	3.d	4.c	5.c	6.d	7.b
REŠITVE:	8.b	9.e	10.c	11.d	12.c	13.a	14.e
	15.b	16.a	17.e	18.a	19.c	20.d	21.a

NAPOTKI ZA REŠEVANJE NEKATERIH NALOG

4. Če si rešitev uganil(-a), se posveti za vajo še vsaki trditvi posebej. Pravilne dokaži, napačno ovrži.

6. Gre za pravilno tristrano piramido, v kateri poznamo stranske robove in stranske višine, računamo pa njeno (telesno) višino.

8. Naloge se lahko lotiš tudi takole: $V = \pi r^2 v; V_r = \pi(r+\Delta)^2 v$ (povečamo radij); $V_v = \pi r^2(v+\Delta)$ (povečamo višino). Nato enačiš $V_r - V = V_v - V$ oziroma $V_r = V_v$.

10. Nariši dobro sliko in rešuj s podobnimi trikotniki.

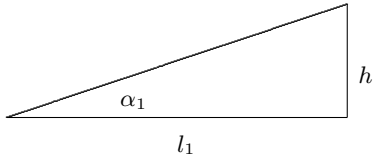
12. Za vajo nariši vse pare funkcij, potem ko si nalogo že rešil računsko.

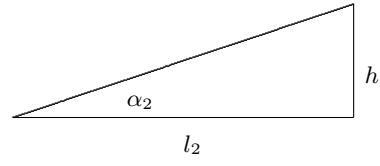
13. Kompozitum je $(g \circ f)(x) = 2|\cos\frac{\pi x}{3} + 1|$. Kosinus kota $\frac{1990\pi}{3}$ dobiš z uporabo periodičnosti.

14. Po faktorizaciji dobimo dve enačbi: $\cos x = 0$, ki ima na intervalu$[0, \pi]$ le eno rešitev, in $4\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$ z rešitvama $\sin x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$ (približki 0.3 in -0.8). Na intervalu $[0, \pi]$ ima prva različica dve rešitvi, druga pa nobene. Nariši ustrezne slike v enotski krog!

15. Središče krožnice je v $S(1, -2)$, gorišči elipse pa sta $F_1(-4, 0)$ in $F_2(4, 0)$. Ploščina trikotnika ΔF_1F_2S je $\frac{1}{2}(d(F_1, F_2)\cdot q)$, če je q ordinata središča krožnice. Nariši sliko!

16. Kljub morebitni razgibanosti terena si lahko oba poteka železnice ponazoriš s trikotnikoma:





Upoštevaj, da je naklon proge tangens naklonskega kota.

17. Za vajo dokaži pravilne in ovrzi nepravilno trditev. Velja namreč: če je produkt dveh količin fiksen, je njuna vsota NAJMANJŠA, če sta enaki.

18. Če poznaš $\log 8$, poznaš tudi $\log 4$ in $\log 2$. Če poznaš $\log 9$, poznaš tudi $\log 3$. Števila $\frac{5}{4}$, 15, 600 in 0.4 lahko zapišemo kot produkte in kvociente števil z znanim logaritmom ($\log 5 = \log \frac{10}{2} = 1 - \log 2$), števila 17 pa ne.

20. Nariši pregledno sliko in zapiši Pitagorov izrek za trikotnika, v katerih težiščnici nastopata kot hipotenuzi.

21. Zapiši, recimo, takole: $z = 4b + bi$, pa dobiš $z^2 = b^2(15 + 8i)$ in razmerje komponent $15 : 8$.

Marta Zabret

N O M I C ali KDO LAHKO ZNIŽA POSLANCEM PLAČE

Moj namen je v sledečem članku predstaviti bralstvu naše revije pravno-logično igro ameriškega avtorja *Petra Suberja*, imenovano **Nomic**. Igra je stara že kakšno dobro desetletje in pol, vendar mislim, da slovenskemu občinstvu še ni bila predstavljena. Uvod v samo igro se nekoliko širše ukvarja s pravnimi paradoksi in njihovim (ne)reševanjem ter predstavlja osnovo, iz katere igra pravzaprav izhaja; bralec oz. potencialni igralec pa (se) bo verjetno lahko igral tudi brez njega – torej tisti, ki ga bo konkretno čtivo začelo dolgočasiti, lahko mirno preskoči stran ali dve in se ga ponovno loti le kakšen odstavek pred igro samo.

V dokaz, da problematika, ki se je lotevam, sega že v stoletja pred našim štetjem, naj začnem s štorijo iz stare Grčije. *Protagoras*, v tistih časih znan in priznan retorik, je pristal, da bo *Euthalasa*, ki je imel željo postati pravnik, učil retorike. Dogovorila sta se, da mu bo Euthalas plačal polovico precej visokega honorarja takoj, drugo polovico pa, ko bo dobil svoj prvi primer na sodišču. Toda Euthalas, čeprav že podučen o vseh skrivnostih in lepotah govorništva, je kar odlašal in odlašal s tem, da bi sploh začel s pravno prakso, Protagoras pa je seveda moral čakati na svoj honorar. Ko ga je že zaskrbelo za svoj ugled (in najbrž tudi za denar), se je odločil, da bo svojega učenca tožil. Svoj primer je na sodišču utemeljil takole: *"Euthalas trdi, da mi ni dolžan plačati, toda to je absurdno. Recimo, da dobi to pravdo. Ker je to njegov prvi primer na sodišču, v katerem bo zmagal, mi že po dogovoru mora plačati. Recimo pa, da izgubi. Potem mi mora plačati po razsodbi sodišča. Ker lahko pravdo le dobi ali izgubi, mi mora plačati v vsakem primeru"*.

Euthalas, očitno kar dober učenec, v svojem zagovoru ni zaostajal za učiteljem: *"Protagoras trdi, da sem mu dolžan plačati, toda to je absurd. Recimo, da dobi to pravdo. Ker ne bom dobil svojega prvega primera na sodišču, mu po najinem dogovoru ne bom ničesar dolžan. Recimo pa, da izgubi. Potem mu nisem ničesar dolžan po razsodbi sodišča. Ker lahko pravdo le dobi ali izgubi, mu v nobenem primeru nisem ničesar dolžan"*.

No, kaj pa sedaj? Za pojasnitev take uganke bi se bilo treba poglobiti v splošne postopke dokazovanja. Toda mnenje večine (tudi strokovne) je (bilo), da je tako poglabljanje popolnoma nepotrebno in zelo redki so (tudi med pravniki), ki bi se jim zdelo vredno ukvarjati se s takšno "paradoksalno" problematiko, češ, takšne problematike so le kot drobni mozoljčki in ne kvarijo sicer brezmadežnega lica prava, odstraniti pa se jih da popolnoma enostavno ali pa – še lažje – prezreti. Podobno tisti, ki jemljejo teologijo resno, menijo, da so vprašanja o vsemogočnosti, kot npr. *"Ali lahko Bog naredi kamen tako težak, da ga ne bo mogel dvigniti?"* le otroške ugankice in ne resne teološke dileme in so rešljive na enostaven in dokončen način. Tako so bile zanke take vrste vseskozi zapostavljene ali pa so bile za njih predlagane le zasilno in v bistvu izmikajoče se rešitve. Toda takele zankice se ne dajo kar tako; ko se enkrat zapleteš v njih, ugotoviš, da so globoke in prodorne in poizkusi, rešiti jih, nas vodijo po popolnoma nepričakovanih poteh. Reševanje pa je vsekakor potrebno, saj se problemi refleksivnosti oz. povratnosti (kar naj bi preprosto povedano pomenilo, da se rešitev zaplete v sam izvor problema) lahko pojavijo v našem vsakdanu in so precej

pogoste tudi v že omenjeni, popolnoma realistični panogi – to je pravu. Avtor[1] članka, ki ga povzemam (originalni naslov: *Nomic: A Self Modifying Game Based on Reflexivity in Law*) ugotavlja, da avtorji, ki se ukvarjajo z definiranjem prava oz. njegove narave, omenjeni problematiki ne posvečajo prav velike pozornosti; dileme te vrste se pojavljajo le v redkih člankih specializiranih pravnih ali pa filozofskih revij.

Zato ga je toliko bolj navdušilo, ko je odkril knjigo filozofa in pravnika *Petra Suberja*, ki je neke vrste študija o logiki, pravu, vsemogočnosti in spremembah (naslov: *The Paradox of Self Amendment*). Dodatek te knjige pa je igra, imenovana *Nomic* (po grško: *nomos* = pravo), katere pravila najdete ob koncu članka.

Za popestritev in kot dokaz praktičnega pomena pa pred tem še nekaj paradoksalnih primerov iz političnega in pravnega vsakdana, do katerih prihaja ali pa bi lahko vsaj hipotetično prišlo.

Ker je avtor Američan, navajam za začetek nekaj njegovih primerov iz ameriške politične scene. Za bralce, ki niso preveč doma v sistemu delitve oblasti na področju ZDA, naj najprej pojasnim nekaj pojmov. Zakonodajna oblast v ZDA je *Congress*; njegova osnovna funkcija je več ali manj identična funkciji našega državnega zbora – sprejema zakone. *Supreme Court* pa je institucija, ki v naši ureditvi nima čisto identične paralele, še najbolj pa ji je podobno ustavno sodišče; ima 9 članov in med drugim odloča tudi o tem, ali je zakon, ki ga sprejme kongres, v skladu z ustavo, in če ni, ga razveljavi. Pri odločanju pa je potrebna večina glasov (torej najmanj 5). Naš (seveda hipotetični) problem pa je sledeč: recimo, da zakonodajalec sprejme zakon, v katerem odloči, da odslej navadna večina $5:4$ za odločanje *Supreme Courta* ne zadošča več, ampak je potrebna večina $6:3$. Zakon stopi v veljavo, a sprožen je postopek, ki skuša ovreči ustavnost tega zakona. Ko o zakonu odloča *Supreme Court*, ugotovi, da zakon ni v skladu z ustavo in to z večino $5:4$. Gre za neke vrste klasičen paradoks, bralcem v tolažbo pa naj povem, da v Sloveniji do njega še ne more priti – ker naš državni zbor in še pred njim skupščina, nista uspela izvoliti vseh 9 ustavnih sodnikov in zato naše ustavno sodišče še vedno zaseda in odloča v nepopolni sestavi.

Do podobnih paradoksov in zapletov lahko seveda prihaja tudi na mnoge druge načine. Vsaka oblast je sama zase oz. s svojimi uslužbenci, objekti, pogodbami itd. pač del družbe, v kateri deluje, in slej ko prej tudi sama ujeta v svoje lastne institute. Naj omenim dva primera, še pred kratkim aktualna v deželici na sončni strani Alp. Večina se najbrž še spominja problematike kolektivnih pogodb – vlada jih je podpisala, vendar se jih ni držala. Mnogi sindikati so zato, zagovarjajoč interese svojih delavcev, tožili državo pri sodiščih združenega dela, ki se s temi pravdami ukvarjajo. Za podoben korak se je odločal tudi sindikat sodnikov – hipotetični problem, ki se postavlja, pa je: *Kdo bi razsodil v konkretnem primeru, če bi bili tudi vsi sodniki sodišč združenega dela člani omenjenega sodniškega sindikata?*

Precej bolj odmevno in sploh ne hipotetično pa je bilo še pred kratkim vprašanje, ki je zastavljeno že v naslovu članka. Višino plač si odredijo poslanci kar sami, iz česar sledi, da se mehanizmi kontrole oblasti pač nekje končajo in da je na koncu verige vedno kdo, ki odloča o samem sebi. Da pa veriga vendarle vsebuje vsaj nekatere elemente krožnosti, pa je postalo jasno, ko se je zaslišal glas ljudstva in so se poslanski prihodki znižali za nekaj

[1] *Douglas R. Hofstadter:* Metamagical Themas

procentov.

Parlamentarno proceduro bi na nek način lahko primerjali tudi z delovanjem velikega računalniškega sistema. Slednji mora, če hoče delovati in služiti svojemu namenu, imeti tudi nek program, ki usklajuje njegove notranje akcije in delovanja ter odloča o prioriteti operacije, ki jo bo računalnik izvedel naslednjo. Toda, če celotna zadeva ni čisto dobro sprogramirana, se lahko zgodi, da sistem podeljevanja prioritete odpove, ni več čisto "pravičen", operacije, ki usklajujejo notranje delovanje, postajajo prioritetne in namesto, da bi računalnik opravljal delo za zunanjega uporabnika, se ukvarja le sam s sabo.

Kot dokaz utemeljenosti primerjave lahko služi primer parlamenta (hipotetičnega seveda), ki se, namesto da bi sprejemal zakone in v splošnem deloval v dobrobit ljudstva, ki ga je izbralo, ukvarja le s problematiko poslovnika, lastnega financiranja, vodstva, ipd. – skratka – ne funkcionira. Nekaj podobnega se lahko zgodi s človekom, na katerega se zgrne ogromno stvari in vsak poizkus rešiti jih, se zdi le kot tavanje v začaranem krogu. Ena boljših rešitev je najbrž – iti spat in dopustiti, da se stvari same nekako pokažejo v lepši luči.

Za sisteme, ki urejajo delovanje parlamentov in sodišč, pa predpisana rešitev žal ne pride v poštev. Zapleti, do katerih lahko pride, če ne funkcionirajo dobro, lahko pripeljejo do kolapsa celotnega sistema. Prav razmišljanja o tem, kako take zaplete razreševati, pa so pripeljala *Petra Suberja* do iznajdbe *Nomica*. Sam pravi, da ga je spodbudil pogosto slišan cinizem – *Oblast je le igra*. No, najbolj bistvena dejavnost oblasti je ustvarjanje zakonov. Če gre torej za igro, potem je sprejemanje in spreminjanje zakonov (oz. pravil) pač poteza. Toda najprej potrebujemo pravila, ki bodo predpisovala način sprejemanja in spreminjanja ostalih pravil (in tudi samih sebe). Situacija je identična tisti v realnosti; osnova pravnih sistemov je ustava – ta je izhodišče za vsa ostala pravila (zakone), ki morajo biti v skladu z njo, ustava pa tudi določa, kdo in kako lahko zakone sprejema in seveda tudi spreminja. Sestavni del ustave pa je ponavadi tudi poglavje, ki govori o tem, kako je mogoče spreminjati ustavo samo. Značilnost večine ustav pa je, da določajo za svoje spreminjanje težavnejši in bolj kompliciran postopek, kot je tisti, ki se nanaša na sprejem in spremembo zakonov.

Kot primer naj navedem slovensko ustavo, ki za sprejem zakona v državnem zboru zahteva večino opredeljenih glasov navzočih poslancev; navzoča pa mora biti večina vseh poslancev. Konkretno: sklepčnost je zagotovljena s prisotnostjo 45 (od 90) poslancev – v tem primeru za sprejem zakona zadošča že 23 glasov (ta številka pa se lahko čisto minimalizira, če se poslanci ne opredelijo, to je – vzdržijo glasovanja). Določba, ki pa govori o spremembi ali sprejemu ustavnih določil, pa pravi, da državni zbor sprejme akt o spremembi ali sprejemu ustavnih določil z dvotretjinsko večino glasov vseh poslancev; konkretno je to 60 glasov. Taka ureditev seveda ni naključna. Ustava je dokument, ki ureja najpomembnejša področja v življenju neke države (državno ureditev, gospodarstvo, socialo) ter varuje človekove pravice in svoboščine. Ker je te člene težje spreminjati, se država tako varuje sama pred sabo oz. pred prenagljenimi odločitvami trenutno vladajočih struktur, ki bi lahko podrle leta ali desetletja napredka. Tak namen pa je dosežen z že nakazanim dvo- ali pa večtirnim sistemom, po katerem je pravila z višjo prioriteto težje spreminjati, tista z nižjo prioriteto pa so manj rigidna.

Enak sistem je prevzel tudi *Nomic*; za osnovo je avtor postavil dva niza pravil; pravila

iz prvega niza je poimenoval kar nespremenljiva (*immutable*; čeprav ne gre za dobesedno nespremenljiva, le za težje spremenljiva, čisto nespremenljivo ni nobeno pravilo), druga pa so spremenljiva (*mutable rules*). Da bo sistem efektiven, pa imajo seveda nespremenljiva pravila logično prioriteto nad spremenljivimi – če pride do konflikta med dvemi pravili (besedilo enega pravila je v logičnem nasprotju z drugim), prevlada težje spremenljivo pravilo (to je pravilo z višjo prioriteto). Sistem bi funkcioniral tudi, če bi imeli poljubno število poljubno velikih razredov pravil, pri katerih bi z naraščajočo prioriteto rasla tudi stopnja konsenza, potrebna za njihove spremembe. Npr. imamo razred A pravil, za spremembo katerih je potreben sto odstoten konsenz odločujočega telesa, razred B z 90% itd., pri čemer pravila razreda A prevladajo nad B itd.

Tudi naš vsakdan se giblje znotraj takega sistema razredov. Na vrhu prioritetne lestvice so zakoni, predpisi (na njihovo spreminjanje lahko po navadi vplivamo le s tem, da na volitvah glasujemo za podobno mislečega poslanca (ali pa morda na referendumu), proti dnu lestvice se srečujemo s pravili oblačenja, obnašanja in z običaji – posameznik jih lahko spreminja čisto sam zase, za to ne potrebuje niti soglasja najožje okolice (edino, čemur se izpostavlja, pa so opravljivi jeziki upokojenih sosed).

V *pravilu 212 Nomic* vključuje tudi predpis o subjektivni sodbi, pa ne le zato, da bi imitiral vladanje v še enem aspektu, ampak iz istih razlogov, ki silijo tudi realno družbo, da si organizira in vključi v svoje življenje tudi sistem sodstva; kakršnakoli že so pravila, skoraj vedno bo v njih moč najti neko nedorečenost, nepredvidljivost in nepopolnost, ki bo zahtevala poseg glede na okoliščine. Igra ne sme biti prekinjena – torej mora obstajati institucija, ki ima moč avtoritativne in končne odločitve in omogoča, da se navkljub sporu igra lahko nadaljuje.

V nobenem od začetnih pravil pa *Nomic* ne obravnava področja kršitve pravil; odločitve o tem, kako bodo kršilce pravil kaznovali, so prepuščene igralcem samim.

Še o nekaj lastnostih igre bi spregovorila, preden se lotim igre same. Ena od teh je možnost izbrisanja meje med igro in resničnostjo, o možnosti vključitve ne-igre v igro samo. Družabne igre, ki jih igramo, te možnosti ponavadi ne predvidijo in se izognejo paradoksalnosti, ki jo prinaša s sabo. Na tak pojav pa velikokrat naletimo v otroških igrah, ki te izključijo tudi, če sodelovanje odbiješ in igro razširijo na celotno "resnično" življenje (*"Očka, očka, zmislili smo si novo igro. Pridi se igrat z nami!". "Ne morem, ravno berem neko zanimivo knjigo". "Oh, očka, super, to je deset točk, v vodstvu si!"*), končajo pa se šele, ko se otroci naveličajo.

Nomic razvije ta princip do skrajnosti, v igro prenese vse, kar si igralci zaželijo – črta med igro in neigro se lahko prenese pri vsaki potezi ali pa se med igro izniči. Igralci so lahko pod vplivom pravil takrat, ko še igrajo, pa tudi, ko mislijo, da so že nehali.

Za večino iger je tudi značilno, da določajo legitimnost oz. pravilnost neke poteze. V *Nomicu* pa zlahka naletimo na situacije, ko je težko dokazati, ali je neka poteza pravilna. Občasno se bo to zgodilo zaradi slabo načrtovanih pravil, lahko pa do tega pripelje tudi pravilo, namerno načrtovano tako, da ohromi razsojanje o legitimnosti neke poteze – če je igralec, ki ga postavi, dovolj spreten, da ga "spravi skozi", mu lahko (zaradi *pravila 213*) to prinese zmago. Torej pazljivo!

Tale uvod je seveda neizmerno dolg (in si sploh ne zasluži svojega imena), zato naj mi bo dovoljeno, da ga na koncu sumiram (in še nekoliko podaljšam) ter dodam še nekaj

praktičnih nasvetov za izvedbo igre (TU VSKOČITE TUDI TISTI, KI STE UVOD IZPUSTILI):

Nomic je igra, v kateri je sprememba pravila poteza. Za igro zadoščata že dva, a če igrajo trije ali več, je igra boljša. Bistvo *Nomica* je zajeto v *pravilu 202*, ki naj ga igralci preberejo najprej. Igralci potrebujejo svinčnik in papir in (vsaj na začetku) eno igralno kocko (kot npr. za "človek ne jezi se"). Vsa nova pravila in spremembe morajo biti zapisane, lahko jih dopisujete na konec ali pa ob pravilo, ki ga spreminjate, mesto, kjer je pravilo zapisano, pa naj nakazuje tudi stopnjo spremenljivosti pravila. Pravila, ki ne veljajo več oz. na igro ne vplivajo, lahko igralci zbrišejo. Tistim, ki se bodo zapletli v bolj kompleksno igro, predlagam, naj sproti popravljajo besedila pravil in imajo vedno nek "čistopis" pravil, ki trenutno veljajo. Idealna alternativa pa bi bila: vsa pravila naj bodo vnesena v računalnik, na katerega je s terminalom priključen vsak od igralcev, spremembe bi se na ta način lahko tekoče vnašale v glavni tekst in sproti prilagajale numeričnemu zaporedju.

ZAČETNI SKLOP PRAVIL *"NOMIC"*

I. NESPREMENLJIVA PRAVILA

101.

Vsi igralci se morajo vedno držati vseh pravil, ki v tistem trenutku učinkujejo, in sicer v obliki, v kateri takrat učinkujejo. Začetni sklop pravil učinkuje, ko se igra začne. Začetni sklop pravil je sestavljen iz *Pravil 101-116* (nespremenljivih) in *201-213* (spremenljivih).

102.

V začetku so pravila pod številkami, ki se začenjajo s št. *1* nespremenljiva in pravila, ki se začenjajo s št. *2* spremenljiva. Naknadno uzakonjena ali spremenjena pravila (spremenjena iz nespremenljivih v spremenljiva ali obratno) so lahko spremenljiva ali nespremenljiva ne glede na svoje zaporedne številke. Pravilom v začetnem sklopu lahko zamenjamo spremenljivost ne glede na njihove številke.

103.

Sprememba pravila je katerakoli od sledečih:

1. uzakonjenje, preklic ali dopolnilo spremenljivega pravila;

2. uzakonjenje, preklic ali dopolnilo spremembe;

3. pretvorba nespremenljivega pravila v spremenljivega ali obratno. (Opomba: Iz tega pravila sledi, da so, vsaj v začetku, vsi novi zakoni spremenljivi. Nespremenljivi zakoni ne morejo biti spremenjeni ali preklicani (po 1. ali 2. točki), dokler so nespremenljivi, spremenljivi zakoni so lahko spremenjeni ali preklicani, dokler so spremenljivi. Nobeno pravilo ni popolnoma izvzeto iz spreminjanja).

104.

O vseh spremembah pravil, ki so predlagane na pravilen način, je potrebno glasovati. Sprejete bodo, če in samo če bodo dobile zahtevano število glasov.

105.
Vsak igralec je primeren glasovalec. Vsak primeren glasovalec mora sodelovati v vsakem glasovanju o spremembi pravila.

106.
Vsako predlagano spememebo pravila je treba zapisati, preden se o njej glasuje. Če je sprejeta, mora postati del igre v obliki, v kakršni je bila sprejeta.

107.
Nobena sprememba pravila ne more začeti učinkovati pred zaključkom glasovanja, s katerim je sprejeta, četudi njeno besedilo eksplicitno pravi drugače. Nobena sprememba pravila ne more učinkovati retroaktivno (za nazaj).

108.
Vsako predlagano spremembo zakona je potrebno označiti z zaporedno številko zaradi referenc ("označimo ga, da se bomo lahko obračali nanj"). Te zaporedne številke naj se začnejo s št. *301* in vsaka predlagana sprememba naj dobi naslednjo zaporedno številko, če je (ali pa tudi, če ni) sprejeta. Če je pravilo preklicano in nato ponovno uzakonjeno, dobi zaporedno številko predloga, ki ga želi ponovno uzakoniti. Če je pravilo dopolnjeno ali spremenjeno, dobi zaporedno številko predloga, ki ga spreminja ali dopolnjuje. Če je dopolnilo spremenjeno ali dopolnjeno, dobi celotno pravilo, katerega del je, zaporedno številko predloga, ki spreminja ali preklicuje dopolnilo.

109.
Sprememba zakona, ki spreminja nespremenljiv zakon v spremenljivega, je lahko sprejeta le in samo, kadar jo primerni glasovalci enoglasno sprejmejo (vsi se morajo strinjati).

110.
Spremenljiva pravila, ki so v kakršnemkoli protislovju s katerimkoli nespremenljivim pravilom (razen kadar predlagajo njegovo spememebo), so popolnoma neveljavne in brez učinka. Ta pravila ne morejo implicitno spremeniti nespremenljivih pravil v spremenljiva in jih istočasno dopolniti. Spremembe pravil, ki pretvarjajo nespremenljiva pravila v spremenljiva, bodo učinkovite le in samo, kadar nedvoumno (eksplicitno) navajajo učinek svojega spreminjanja.

111.
Če je predlagana sprememba pravila nejasna, dvomljiva, paradoksalna oziroma uničujoče deluje na igro, ali če obstaja verjetnost, da je sestavljena iz dveh ali več sprememb zakonov, ali če gre za dopolnilo, ki ne pomeni nobene spememebe, ali če je iz kakršnegakoli razloga dvomljive vrednosti, potem lahko ostali igralci predlagajo dopolnila k predlogu ali protestirajo proti njemu, še preden pride do glasovanja. Taka debata mora biti časovno primerno omejena. Predlagatelj določi končno

obliko predloga, o katerem se bo glasovalo in tudi čas, v katerem je debato treba končati in glasovati. Edino zdravilo proti slabemu predlogu je preventiva: negativen glas.

112.

Dejansko stanje, ki določa zmagovalca, ne sme biti spremenjeno iz doseženih N točk v nobeno drugo dejansko stanje. Vendar se obseg N in sredstva doseganja točk lahko spremeni in lahko se uzakonijo pravila, ki določajo zmagovalca, če se igra ne more nadaljevati in se (kadar so spremenljiva) dopolnijo ali prekličejo.

113.

Igralec ima vedno možnost, da raje izgubi igro, kot da nadaljuje z igranjem ali se izpostavi kakšni kazni v igri. Igralcu se ne sme naložiti nobene hujše kazni, kot je izgubiti igro; ob tem pa se upošteva mnenje igralca, ki je kazni izpostavljen.

114.

Vedno mora biti vsaj eno spremenljivo pravilo. Sprejemanje sprememb pravil ne sme nikoli postati popolnoma nedopustno.

115.

Spremembe pravil, ki zadevajo pravila, potrebna, da omogočijo ali usmerjajo speminjanje pravil, so ravno tako dovoljena kot katerekoli druge spremembe. Tudi spremembe pravil, ki dopolnjujejo ali preklicujejo svoj lastni vpliv, so dopustne. Nobena sprememba pravila ali vrsta poteze ni nedovoljena izključno zato, ker se nanaša samo nase ali usmerja samo sebe.

116.

Vse, kar ni izrecno prepovedano ali urejeno s pravili, je dovoljeno in neregulirano; z izključujočo izjemo spreminjanja pravil, ki je dovoljeno le, kadar pravilo ali sklop pravil spreminjanje izrecno ali implicitno dovoljuje.

II. SPREMENLJIVA PRAVILA

201.

Igralci naj se izmenjujejo v smeri urinega kazalca; vsak je enkrat na vrsti. Noben igralec ne sme biti spuščen ali predati svojega vrstnega reda drugemu in vsakič se mora zvrstiti cel krog. Vsak igralec začne z 0 točkami.

202.

Ko pride igralec na vrsto, mora izpolniti dvoje, in sicer v sledečem vrstnem redu:

1. predlagati eno spremembo pravila in doseči glasovanje o njej;
2. vreči eno kocko enkrat in prišteti dobljeno število točk k svojemu rezultatu.

203.

Sprememba pravila je sprejeta le in samo, če zanjo enoglasno glasujejo vsi primerni glasovalci.

204.

Če in kadar je sprememba pravila možna brez soglasja vseh igralcev, prejme vsak igralec, ki je glasoval proti spremembi, ki je bila sprejeta, 10 točk.

205.

Sprejeta sprememba pravila začne učinkovati v trenutku, ko je sklenjeno glasovanje, ki jo je sprejelo.

206.

Če predlagana sprememba ni sprejeta, izgubi predlagatelj 10 točk.

207.

Vsak igralec ima vsakič natančno en glas.

208.

Zmagovalec je prvi igralec, ki doseže 100 pozitivnih točk.

209.

Nikoli ne sme biti več kot 25 spremenljivih zakonov.

210.

Igralci ne smejo sodelovati ali se posvetovati o pripravi prihodnjih sprememb pravil, razen če so skupaj v teamu.

211.

Če si dve ali več spremenljivih pravil nasprotuje(ta) ali če si nasprotujeta dve ali več nespremenljivih pravil, ima tisto z nižjo zaporedno številko prednost.

Če vsaj eno pravilo, ki je v nasprotju z drugim(i) zase izrecno pravi, da odlaga neko drugo pravilo (ali vrsto pravila), ali si zagotavlja prioriteto pred nekim drugim pravilom (ali tipom pravila), potem tako pravilo izpodrine numerično metodo določanja prioritete.

Če si dve ali več takih pravil jemlje prioriteto drugo nad drugim, ali se medsebojno odklanjajo, potem velja spet numerična metoda.

212.

Če se igralci ne strinjajo o zakonitosti neke poteze ali interpretacije ali uporabi nekega pravila, potem je igralec, ki je bil na vrsti pred igralcem, ki je ob trenutku nestrinjanja na potezi, sodnik in odloči o sporu. Nestrinjanje pa lahko ustvari katerikoli od igralcev. Tak proces se imenuje klicanje razsodbe. Kadar je bila pravica klicana, naslednji igralec ne sme začeti svoje poteze brez soglasja večine ostalih igralcev. Sodnikovo razsodbo ostali igralci lahko prekličejo le s svojim soglasnim sklepom; glasovanje o tem pa mora biti izvedeno še pred začetkom naslednje poteze.

Če je sodnikova razsodba razveljavljena, postane nov sodnik, ki naj

odloči o vprašanju, o katerem teče spor, igralec, ki je eno mesto pred igralcem, ki je bil sodnik pred njim. Nihče pa ne sme biti sodnik med svojo potezo ali potezo svojega soigralca v teamu.
O vseh vprašanjih, ki izvirajo iz igre do naslednje poteze, odloča en sodnik (tudi o vprašanjih svoje lastne legitimnosti), razen v primeru, ko je preglasovan.
Novi sodniki niso z ničimer vezani na odločitve prejšnjih sodnikov. Sodniki lahko odločajo le o vprašanjih, o katerih trenutno teče spor in ki zadevajo izpolnitev poteze, v kateri je bila razsodba klicana. Vse odločitve sodnikov naj bodo v skladu z vsemi zakoni, ki so tedaj v veljavi; če pa so zakoni protislovni ali nejasni, potem naj bodo sodnikovo vodilo morala, logika in duh te igre.

213.
Če so pravila spremenjena tako, da je nadaljnja igra nemogoča ali če je nemogoče dokončno opredeliti legitimnost poteze ali če se pojavi poteza, ki je enako legitimna in nelegitimna, potem postane prvi igralec, ki poteze ne more končati, zmagovalec. To pravilo je prioritetno pred vsemi ostalimi pravili, ki določajo zmagovalca.

No pa smo skozi. Osnovna zbirka pravil, kot si jo je zamislil avtor, naj bi bila dovolj kratka in enostavna, da igro spodbudi, pa vendarle dovolj dolga in kompleksna, da prepreči naključja, ki bi lahko igro zaustavila. Če mu je to res uspelo, pa presodite sami. Za lažji začetek in morda kot izziv naj navedem še nekaj avtorjevih idej in predlogov za spremembe:

– omogočite lažje spreminjanje spremenljivih pravil, tako da soglasje v *pravilu 203* nadomestite npr. z navadno večino;

– omogočite spreminjanje nekaterih pravil le s posebno proceduro;

– izumite pravila, ki izginejo oz. "ne učinkujejo več" že po nekaj krogih;

– dovolite posvetovanje o naslednji potezi;

– dovolite tajno glasovanje;

– dovolite "revolucije", v katerih so vsa pravila lažje spremenljiva;

– spremenite način določanja prioritete (npr. s spreminjanjem zaporednih številk);

– spremenite sistem služenja točk iz naključnega v takega, ki bo zahteval nekaj spretnosti (intelektualnih, pa tudi fizičnih);

– dovolite ekipno igro in zavezništvo;

– če pa vsem navodilom, nasvetom in spodbudam navkljub, igra ne bi stekla, prižgite TV in si oglejte, kako stvari strežejo profesionalci; domnevam namreč, da bodo glede na to, da mora biti celotna slovenska zakonodaja v skladu z ustavo do konca tega leta, prenosi iz državnega zbora še nekaj časa eden glavnih hitov dnevno-informativnega programa;

– bodite torej aktualni, vrzite proč "človek ne jezi se" in igrajte *Nomic*.

Darja Polak

MATEMATIČNE NALOGE

Prvih deset nalog smo si z dovoljenjem sposodili iz *Kotička za najmlajše* hrvaškega časopisa MATKA.

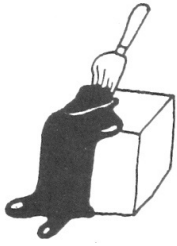
1. Vsakega od obeh enakih kvadratov prereži na dva dela, potem pa iz dobljenih štirih delov sestavi nov kvadrat.



2. Iz treh vžigalic naredi štiri, ne da bi jih lomil.



3. Če se eno jajce kuha 4 minute, koliko časa moramo kuhati 5 jajc?



4. Najmanj koliko različnih barv potrebujemo za barvanje kocke, če moramo sosednji stranski ploskvi (tisti, ki imata skupen rob) pobarvati z različnima barvama?

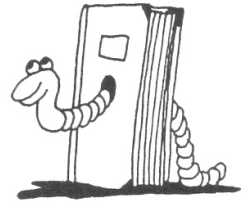


5. Učenci šestega razreda so kupili skupaj 341 učbenikov. Koliko učencev je v tem razredu?



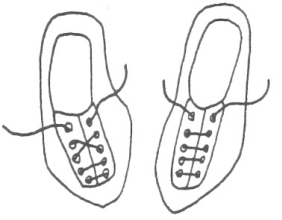
6. Števila $1, 2, 3, \ldots, 9$ zapiši v kvadrat 3×3, tako da bodo vsote po vrsticah, stolpcih in po diagonalah različne (antimagični kvadrat).

7. Na polici sta drug poleg drugega dva zvezka matematične enciklopedije. Prvi zvezek je levo in je debel 5.7 cm, drugi je desno od prvega in je debel 5.4 cm. Debelina papirja ovitkov znaša 0.9 mm. Kolika je skupna debelina papirja, ki ga prežre knjižni molj, če začne gristi pri prvi strani prvega zvezka in konča pri zadnji strani drugega zvezka?





8. Čarobni fižol raste tako, da vsak dan podvoji svojo višino. Po treh tednih fižol doseže oblake. Kdaj je bil fižol na polo[illegible]

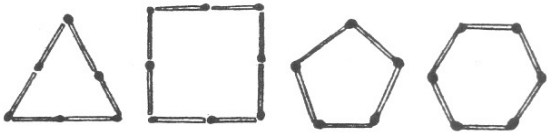


9. Poglejte kako je Ivica zavezal copate. Kako vidimo vezalke z notranje strani? Nariši.

	:	2	−		=	
×		+		×		×
	+		−	4	=	5
:		−		+		−
4	+		−		=	
=		=		=		=
	−	3	+		=	8

10. Izpolni prazna mesta v križanki tako, da bodo enačbe pravilne.

11. Nekoč je nekdo vzel nekaj vžigalic iz škatlice in ugotovil, da lahko iz njih sestavi katerakoli dva pravilna mnogokotnika, našteta na sliki, in da pri tem vedno uporabi vse vžigalice.



Če bi imel 11 vžigalic, bi lahko sestavil trikotnik in petkotnik ali petkotnik in šestkotnik, ne more pa sestaviti na primer kvadrata in šestkotnika.

Kolikšno je najmanj število vžigalic, ki jih je imel, če seveda za vsako stranico v liku uporabi enako število vžigalic?

12. Reši tale kriptaritem

D	V	E			$\times$		D	V	E
						$*$	$*$	$*$	E
						$*$	$*$	V	
				$*$	$*$	$*$	D		
				$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$

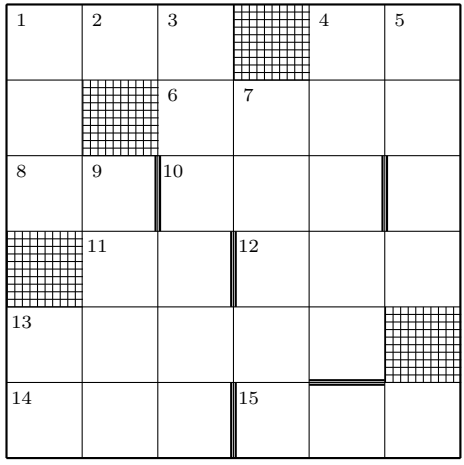
Različne črke predstavljajo različne števke, zvezdice pa poljubne števke.

13.

S	S	L		$\times$	L	L	
	S	L	S	L			
$+$	S	L	L				
L	L	L	L	L			

Tokrat S pomeni poljubno sodo, L pa poljubno liho števko.

14. Tole križanko nam je poslala Luca Lovrečič.



Vodoravno

1. tri enake števke
4. prva števka je štirikratnik druge
6. kub
8. druga števka je za 6 večja od prve
10. tretja števka je zmnožek prvih dveh
11. vsota števk je enaka vsoti prve in zadnje števke $9N$
12. večkratnik $11V$
13. anagram kuba števila manjšega od 35 (anagram ima iste števke kot prvotno število)
14. anagram kvadrata
15. kub

Navpično

1. kub
3. zrcalno število
4. zrcalno število
5. enakomerno naraščajoče števke
7. število, sestavljeno iz števk 1, 2, 3, 6 in 7
9. enakomerno padajoče števke
13. praštevilo, manjše od 37

15. Spodnja preglednica predstavlja izid volitev za direktorja nekega podjetja v upravnem odboru, ki šteje 17 članov, med 4 kandidati a, b, c in d.

	Število glasov				
Vrstni red	5	3	5	4	Točke
1	a	a	b	c	3
2	d	d	c	d	2
3	c	b	d	b	1
4	b	c	a	a	0

To pomeni, da je 5 članov upravnega odbora na 1. mesto postavilo kandidata a, na 2. mesto kandidata d, na 3. kandidata c in na 4. kandidata b. Pri tem smo še točkovali 1. mesto s 3 točkami, 2. z 2 točkama, 3. z 1 točko in 4. z 0.

a) Kdo bi bil izbran, če bi uporabili *relativno večinsko pravilo*, kjer vsak volilec da svoj

glas enemu kandidatu, zmaga pa tisti, ki dobi največ glasov.

b) *Pravilo absolutne večine.* Tudi tokrat ima vsak volilec en glas, toda zmagovalec mora zbrati več kot polovico glasov. Če tega v prvem krogu ni, zmagovalca določi drugi krog, v katerem sodelujeta dva najbolje uvrščena kandidata iz prvega kroga. Kdo bo zmagovalec v tem primeru, če predpostavimo, da bodo člani upravnega odbora enako razvrstili vodeča kandidata iz prvega kroga tudi v drugem krogu?

c) *Pravilo najboljšega rezultata.* Tokrat volilci povedo celotno preferenco za vse kandidate s točkovanjem: 0 točk za zadnje mesto, ... Zmaga tisti, ki ima največji seštevek točk. Kdo bi bil zmagovalec v tem primeru?

d) *Condorcetovo pravilo.* Kandidat, ki zmaga v vseh medsebojnih srečanjih, je izbran. To pravilo se imenuje po markizu de Condorcetu, francoskemu filozofu, matematiku in politiku, ki je v času prosvetljenstva opazil paradokse, ki se pojavijo pri takšnem načinu izbire. Tako se lahko zgodi, da a premaga b, b premaga c in c premaga a. Kdo je zmagovalec v našem glasovanju, če se uporabi Condorcetovo pravilo? (*QUANTUM, 3(1993)*)

16. V prejšnji nalogi smo se ukvarjali s štirimi različnimi koncepti za najboljši izbor in pri tem dobili 4 različne zmagovalce. Še več, zmagovalec pri enem načinu je bil najslabši pri drugem. Tako je zmagovalec pravila relativne večine najslabši po Condorcetovem postopku, zmagovalec po absolutno večinskemu pravilu pa je zbral najmanj točk. Presenečenj pa še ni konec. Recimo, da je v uporabi pravilo absolutne večine. Zmagovalec je kandidat b. Zdaj pa vzemimo, da je kandidat a ocenil, da nima možnosti v primerjavi z b-jem in je umaknil kandidaturo (morebiti tudi za primerno podkupnino). Ali bo tudi zdaj zmagovalec kandidat b?

17. Oglejmo si še dve možni glasovanji

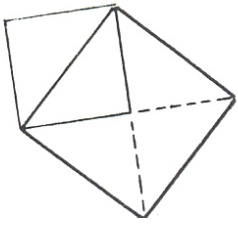
Število glasov			
6	5	4	2
a	c	b	b
b	a	c	a
c	b	a	c

Število glasov			
6	5	4	2
a	c	b	a
b	a	c	b
c	b	a	c

Preglednici se razlikujeta le v zadnjem stolpcu, kjer sta a in b zamenjana. To si lahko tolmačimo kot uspeh a-jeve propagande. Ali se je takšna propaganda splačala, če je v uporabi pravilo relativne večine? Kaj pa, če je v veljevi pravilo absolutne večine?

REŠITVE MATEMATIČNIH NALOG

1. Oba kvadrata moramo razrezati po diagonali, tako da dobimo 4 pravokotne enakokrake trikotnike, ki jih sestavimo v kvadrat kot kaže slika levo spodaj.





2. Glej desno sliko zgoraj.

3. Tudi 5 jajc bomo kuhali le 4 minute.

4. Tri barve so dovolj. Nasprotne ploskve pobarvamo z isto barvo. Z dvema barvama pa tega ne moremo, saj imamo v vsakem oglišču tri paroma sosednje ploskve, ki jih moramo pobarvati z različnimi barvami.

5. Ker je $341 = 31 \cdot 11$ in sta 31 in 11 praštevili sklepamo, da je v razredu 31 učencev. Matematično bi bilo sicer možno, da je v razredu 11 učencev ali celo 1 učenec, ki ima 341 predmetov, ali pa 341 učencev, ki ima samo en predmet. Toda te rešitve so stvar fantazije, ne pa realnosti.

6. Eno možnost prikazuje slika levo spodaj.

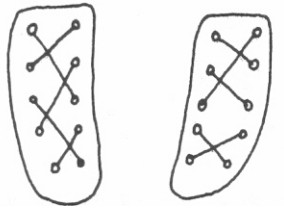
7. Molj bo prežrl le po en list ovitka obeh knjig, to je skupaj 1.8 mm papirja.

8. Ker je fižol dosegel oblake $21.$ dan, je bil na pol poti $20.$ dne.

9. Glej sliko v sredini spodaj.

10. Glej sliko desno spodaj.

1	7	9
4	2	3
5	6	8



8	:	2	−	1	=	3
×		+		×		×
2	+	7	−	4	=	5
:		−		+		−
4	+	6	−	3	=	7
=		=		=		=
4	−	3	+	7	=	8

11.

1 3	2 3	3 3		4 8	5 2
4		6 2	7 7	4	4
8 3	9 9	10 7	1	7	6
	11 8	7	12 3	4	8
13 3	7	2	6	8	
14 1	6	3	15 2	1	6

12. Najmanjše možno število je 36. Tako lahko sestavimo trikotnik in kvadrat z 12 in 24 vžigalicami, trikotnik in petkotnik 6 in 30 vžigalicami, trikotnik in šestkotnik s 6 in 30 vžigalicami, kvadrat in petkotnik s 16 in 20 vžigalicami, kvadrat in šestkotnik z 12 in 24 vžigalicami in petkotnik in šestkotnik s 30 in 6 vžigalicami.

Vsekakor mora biti število vžigalic deljivo s 6. Toda s 6, 12, 18, 24 ali 30 vžigalicami ni mogoče hkrati sestaviti petkotnika in šestkotnika.

13. DVE $= 426$

14.

$$\begin{array}{r} 285 \times 39 \\ \hline 2565 \\ 855 \\ \hline 11115 \end{array}$$

15. **a)** V primeru pravila relativne večine je zmagovalec kandidat a, ki je dobil 8 glasov.

b) Tokrat je potreben drugi krog. Prva dva $a = 8$ in $b = 5$ gresta v drugi krog. Če bodo člani upravnega odbora glasovali enako kot prej, bo preglednica izgledala takole

Število glasov			
5	3	5	4
a	a	b	b
b	b	a	a

$\longrightarrow$

8	9
a	b
b	a

Zmagovalec bo torej kandidat b.

c) in **d)** Preštejmo točke in preštejmo medsebojne dvoboje kandidatov.V primeru točkovanja je najboljši kandidat d, pri Condorcetovem pravilu pa kandidat c.

Kandidat	Točke	Dvoboji proti			
		a	b	c	d
a	24	—	8:9	8:9	8:9
b	22	9:8	—	8:9	5:12
c	27	9:8	9:8	—	9:8
d	29	9:8	12:5	8:9	—

16. Tokrat sta preglednici za $1.$ in drugi krog takšni

Število glasov			
5	3	5	4
d	d	b	c
c	b	c	d
b	c	d	b

$\longrightarrow$

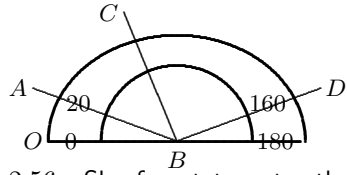
12	5
d	b
b	d

Zdaj bo zmagovalec kandidat d.

17. Pri pravilu relativne večine imamo pri prvi preglednici neodločen rezultat med a in b, pri drugi pa zmago a-ja. Če pa uporabimo pravilo absolutne večine, potem gresta a in b v drugi krog (pri prvi preglednici), kjer zmaga a. Toda pri drugi razpredelnici gresta v drugi krog a in c, kjer zmaga c. Torej propaganda a-ja proti b-ju pomeni izgubo a-ja proti c-ju.

ANGLEŠKE NALOGE ZA OSNOVNOŠOLCE

1. If $\sphericalangle CBD$ is a right angle, then this protractor indicates that the measure of $\sphericalangle ABC$ is approximately

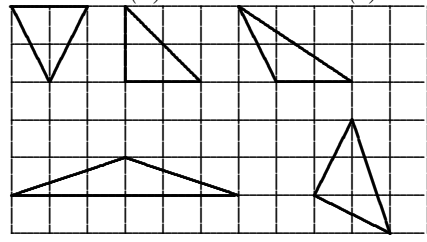


(a) $20°$ *(b)* $40°$ *(c)* $50°$ *(d)* $70°$ *(e)* $120°$

2. Betty used a calculator to find the product 0.075×2.56. She forgot to enter the decimal points. The calculator showed 19200. If Betty had entered the decimal points correctly, the answer would have been

(a) 0.0192 *(b)* 0.192 *(c)* 1.92 *(d)* 19.2 *(e)* 192

3. An isosceles triangle is a triangle with two sides of equal length. How many of the five triangles on the square grid on the right are isosceles?

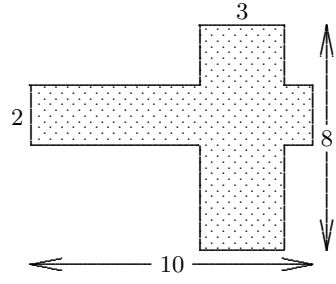


(a) 1 *(b)* 2 *(c)* 3 *(d)* 4 *(e)* 5

4. $\sqrt{164}$ is

(a) 42 *(b)* less than 10 *(c)* between 10 and 11
(d) between 11 and 12 *(e)* between 12 and 13

5. The shaded area formed by the two intersecting perpendicular rectangles, in square units, is



(a) 23 *(b)* 38 *(c)* 44
(d) 46 *(e)* unable to be determined from the information given

6. The average weight of 6 boys is 150 pounds and the average weight of 4 girls is 120 pounds. The average weight of the 10 children is

(a) 135 pounds *(b)* 137 pounds *(c)* 138 pounds *(d)* 140 pounds *(e)* 141 pounds

7. What is the 100^{th} number in the arithemetic sequence: $1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, \ldots$?

(a) 397 *(b)* 399 *(c)* 401 *(d)* 403 *(e)* 405

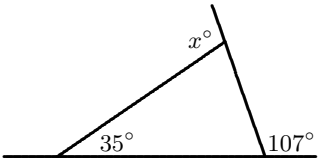
8. How many digits are there in 5^8?

(a) 4 *(b)* 5 *(c)* 6 *(d)* 7 *(e)* 8

9. An aeroplane flies at 800 km/h for one third of its flight time and averages 700 km/h for the entire trip. What is the average speed, in kilometres per hour over the remaining part of the journey?
(a) 600 *(b)* 750 *(c)* 650 *(d)* 500 *(e)* 625

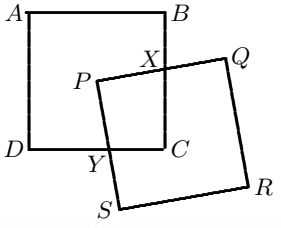
10. $3/8$ expressed as a percentage is
(a) 60 % *(b)* 62.5 % *(c)* 42.55 % *(d)* 40 % *(e)* 37.5 %

11. Two adults have ages in years whose product is 770. The sum of their ages is
(a) 25 *(b)* 57 *(c)* 69 *(d)* 87 *(e)* 117

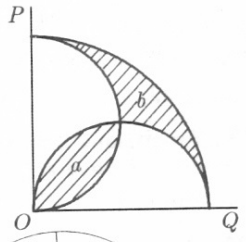


12. In the figure the value of x is
(a) 142 *(b)* 72 *(c)* 107 *(d)* 108 *(e)* 145

13. $ABCD$ and $PQRS$ are two squares of side 10 cm. As shown in the diagram P is placed at the centre of square $ABCD$ and $BX = 4$ cm. The area of quadrilateral $PXCY$, in square centimetres, is
(a) 21 *(b)* 25 *(c)* 30 *(d)* 24 *(e)* 28



14. OPQ is a quadrant of a circle and semi–circles are drawn on OP and OQ. Areas a and b are shaded. Find a/b.
(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *(b)* $\frac{1}{2}$ *(c)* $\frac{\pi}{4}$ *(d)* 1 *(e)* $\frac{\pi}{3}$



15. $12 - 11 + 10 - 9 + 8 - 7 + 6 - 5 + 4 - 3 + 2 - 1 =$
(a) -12 *(b)* -6 *(c)* 0 *(d)* 6 *(e)* 12

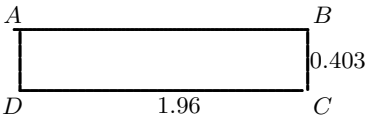
16. According to the following circle graph (drawn to scale), about what percentage of tax money is spent on education?
(a) 10 % *(b)* 20 % *(c)* 30 % *(d)* 50 % *(e)* 70 %



17. $\frac{3}{5} : \frac{5}{6}$ written as a decimal is
(a) 0.5 *(b)* 1.3888... *(c)* 0.72 *(d)* 1.4333... *(e)* 2.0

18. The difference between the largest number and the smallest number in the set $\{0.5, 0.505, 0.55, 0.5005\}$ is
(a) 0.005 *(b)* 0.045 *(c)* 0.0495 *(d)* 0.05 *(e)* 0.055

19. The best estimate of the area of rectangle $ABCD$ in square units is



(a) 0.8 *(b)* 1.2 *(c)* 4.8 *(d)* 6 *(e)* 8

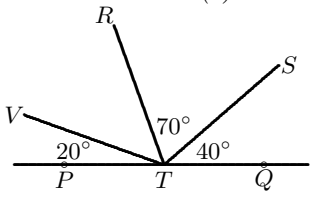
20. The product 737×767 is closest to which of the following:

(a) $50\,000$ *(b)* $55\,000$ *(c)* $60\,000$ *(d)* $500\,000$ *(e)* $550\,000$

21. Using a calculator, a student mistakenly multiplied by 10 when he should have divided by 10. The incorrect answer displayed was 600. The correct answer is

(a) 0.6 *(b)* 6 *(c)* 60 *(d)* $6\,000$ *(e)* $60\,000$

22. PQ is a straight line. The number of degrees in angle VTS is



(a) 80 *(b)* 90 *(c)* 100 *(d)* 110 *(e)* 120

23. Compute

$$\frac{597+598+599+600+601+602+603+604+605+606}{5}$$

(a) 1201 *(b)* 1203 *(c)* 1205 *(d)* 1206 *(e)* 1208

24. $\sqrt{49}-\sqrt{9}=$

(a) 2 *(b)* 4 *(c)* $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ *(d)* $\sqrt{40}$ *(e)* 10

25. $0.5\,\%$ of 246 is

(a) 0.123 *(b)* 1.23 *(c)* 12.3 *(d)* 123 *(e)* 1230

26. An airplane flies 1000 miles due west in 3 hours and then flies 1000 miles due east in 2 hours. The average speed of the airplane for the entire 2000-mile trip is

(a) 200 mph *(b)* $208\frac{1}{3}$ mph *(c)* $333\frac{1}{3}$ mph *(d)* 400 mph *(e)* $416\frac{2}{3}$ mph

27. A girl had her monthly allowance doubled, received an additional \$ 3 increase, and then had her allowance cut in half. How much is her present allowance compared to her original allowance?

(a) \$ 1.50 less *(b)* the same *(c)* \$ 1.50 more *(d)* \$ 3 more *(e)* \$ 4.50 more

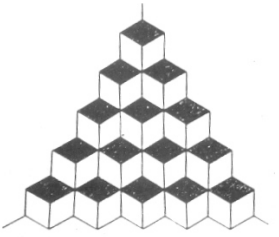
28. The sum of the smallest odd prime, the largest prime less than 50, and the smallest prime greater than 60 is

(a) 110 *(b)* 111 *(c)* 113 *(d)* 115 *(e)* 117

29. After being discounted $20\,\%$, a coat sells for \$ 30.00. The original selling price of the coat was

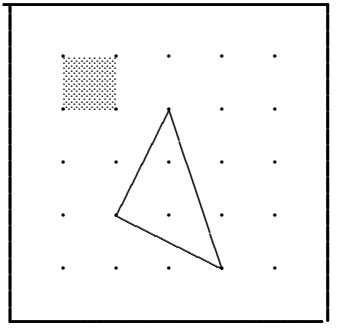
(a) \$ 24.00 *(b)* \$ 32.00 *(c)* \$ 36.00 *(d)* \$ 37.50 *(e)* \$ 42.50

30. If $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, and so on, then $\frac{8!}{6!} =$
(a) $\frac{4}{3}$ *(b)* 4 *(c)* 8 *(d)* 28 *(e)* 56



31. Identical cubes are stacked in the corner of a room as shown. How many of the cubes are not visible?
(a) 10 *(b)* 12 *(c)* 15 *(d)* 18 *(e)* 20

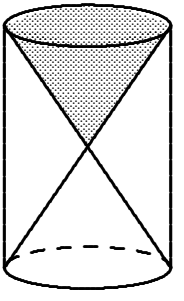
32. What is the area, in square units, of the triangular region if the shaded area is 1 square unit?
(a) 2 *(b)* 2.25 *(c)* 2.5 *(d)* 3 *(e)* 3.5



33. If there are exactly four Sundays in October, then October 31 could *not* fall on what day?
(a) Tuesday *(b)* Wednesday *(c)* Thursday
(d) Friday *(e)* Saturday

34. A party is scheduled for an open area of the park, and a tent has been ordered. There is a $50\,\%$ chance of rain. Whether it rains or not, there is a $50\,\%$ chance that the tent will not arrive in time for the party. Of the following, which best describes the chance that the partygoers willl get wet (assuming they will not get wet if the tent arrives in time)?
(a) Certain to be wet *(b)* 3 chances in 4 to be wet *(c)* Chances even to be wet or dry
(d) 1 chance in 4 to be wet *(e)* Certain to be dry

35. An hourglass consists of two identical cones contained in the right cylinder of radius 2.5 cm and height 6 cm. The top cone is filled with sand. The volume of a cylinder equals the product of the area of its base and its height. The volume of a cone equals one third of the product of the area of its base and its height. The ratio of the volume of sand to the volume of the cylinder is
(a) $\frac{1}{8}$ *(b)* $\frac{1}{6}$ *(c)* $\frac{1}{4}$ *(d)* $\frac{1}{3}$ *(e)* $\frac{1}{2}$



36. A crowd watching a parade fills the sidewalks of Fifth Avenue for a distance of 2 miles on each side. The sidewalks are 10 feet wide, and an average person requires 4 square feet on which to stand. A good estimate of the size of the crowd is
(a) $25\,000$ *(b)* $50\,000$ *(c)* $100\,000$ *(d)* $250\,000$ *(e)* $500\,000$

37. The average price of hamburger goes up $10\,\%$ the first month, goes down $10\,\%$ the

second month, and goes up $10\,\%$ the third month. By what percentage did the average price of hamburger go up from its initial price to its price at the end of the third month?
(a) $10\,\%$ *(b)* $9.9\,\%$ *(c)* $9.5\,\%$ *(d)* $8.9\,\%$ *(e)* $8.5\,\%$

38. Let r be a real number, positive, negative, or zero. Which of the following numbers is always greater than r?
(a) r^2+1 *(b)* $2r$ *(c)* $\sqrt{r^2+r}$ *(d)* $(r+1)^3$ *(e)* r^{100}

39. Sam and Dave run a 50-m race, Sam winning by 10 m. (When Sam crosses the finish line, Dave is exactly 10 m behind.) They run a second 50-m race with Sam starting 10 m behind the original starting line. What is the outcome of the second race if each runs at the same constant speed he did in the first race?
(a) Dave wins by 1 m. *(b)* They tie. *(c)* Sam wins by 1 m.
(d) Sam wins by 2 m. *(e)* Sam wins by 2.5 m.

Glossary

right angle	pravi kot	protractor	kotomer
approximately	približno	isosceles triangle	enakokrak trikotnik
side	stranica	perpendicular	pravokoten
rectangle	pravokotnik	average	povprečje
sequence	zaporedje	digit	števka
percentage	procent	square	kvadrat
quadrilateral	štirikotnik	circle	krog
semi-circle	polkrog	multiply	množiti
estimate	oceniti	divide	deliti
straight line	premica	odd prime	liho praštevilo
cube	kocka	cone	stožec
cylinder	valj	volume	prostornina
base	osnovna ploskev	height	višina
ratio	razmerje		

Solutions

1. c	2. b	3. d	4. e	5. b	6. c	7. a	8. c
9. c	10. e	11. b	12. d	13. b	14. d	15. d	16. b
17. c	18. d	19. a	20. e	21. b	22. e	23. b	24. b
25. b	26. d	27. c	28. b	29. d	30. e	31. e	32. c
33. a	34. d	35. b	36. b	37. d	38. a	39. d	

LOGIKA IN MATEMATIKA PO SVETU

Pri založbi *PennyPress* lahko naročite kar tri revije z logičnimi ugankami: **ORIGINAL LOGIC PROBLEMS**, **LOGIC PROBLEMS** in **ENGLAND'S FINEST LOGIC PROBLEMS**. Iz zadnje smo si sposodili 21. stran.

17 ON THE SHELF

Five children each have their favourite amongst the tinned foods stacked on the bottom shelf of their mother's pantry. From the clues given below, can you discover the contents and manufacturer's name on the label of each tin and say whose preference it is?

Clues

1 Danny's favourite is in a tin at one end of the shelf; it is not the chicken curry, which is not made by Williams.

2 The tin of Jones spaghetti stands next to Philip's choice, which is not in an even-numbered tin.

3 Jenny's great love is baked beans; the tin containing them is further to the left on the shelf than Clive's preference.

4 The ravioli is in the tin numbered 4 on the diagram.

5 Kate's favourite snack is made by Roberts.

6 The name 'Smiths' appears on the tin at the extreme left-hand end of the shelf.

Children: Clive, Danny, Jenny, Kate, Philip.
Manufacturers: Bloggs, Jones, Roberts, Smiths, Williams.
Foods: baked beans, chicken curry, ravioli, spaghetti, tomato soup.



GET 2 COPIES FREE!



SAMPLE OUR ORIGINAL LOGIC PROBLEMS BARGAIN BAG!

The Original Logic Problems Bargain Bag is a great way to treat yourself to challenging back issues that are as fresh and entertaining as ever.

To introduce you to our Bargain Bag, we'd like to send you 2 Penny Press, *Original Logic Problems* magazines - FREE! You pay only $1 for handling.

Sorry, this offer is limited to first-time customers only.

PennyPress

6 Prowitt St., Dept. BBS
Norwalk, CT 06855

☑ YES! Send me your free "Bargain Bag Sampler" of 2 *Original Logic Problems* magazines. Enclosed is my payment for $1 (U.S. funds) to cover handling and postage.

NAME _____ (please print)

ADDRESS _____

CITY _____

STATE _____ ZIP _____

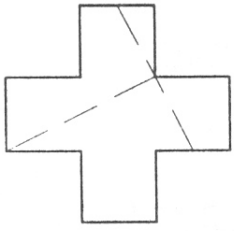
Limit 1 bag per customer. Please allow 6 weeks for delivery. OUTSIDE USA: Add an additional $1.75 for postage. Offer expires December 31, 1993. 91221-A1BLLL

MATKA

Matematični časopis za osnovnošolce *MATKA* izdaja hrvaško matematično društvo. Vsebina zadnje (4.) številke šolskega leta 92/93 je takale: *Matematične uganke – logične naloge, Čudoviti ulomki, Paralelogramsko pravilo in njegova uporaba, Eratosten, Naloge iz preteklosti, Fraktali s pomočjo loga, Matematična veselica, Tekmovanja v matematiki v letu 1993, Zagrebško mestno tekmovanje mladih informatikov, Izbrane naloge, Rešitve nalog iz* 3. *številke* in *Kot za najmlajše.* Tule so naloge iz preteklosti

1. Grčki križ. Izreži iz papira križ, razreži ga kao što je pokazano na slici, te iz tako dobivenih dijelova složi kvadrat.

Zadatak potječe iz 6. st. pr. Kr. Stari su Grci takav križ držali simbolom života te ga urezivali u kruh.



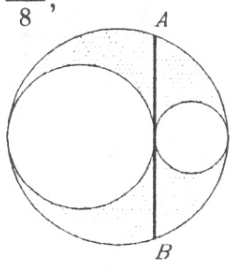
2. Udvjetnici su u starom Rimu imali običaj jedni drugima zadavati razne zadatke. Evo jednog zadatka iz I. st. pr. Kr.

Neka je udovica poslije smrti svojega muža njegovo nasljedstvo od 3500 dinara trebala podijeliti s još nerođenim djetetom. Ako bi se rodio sin, majci bi, prema rimskim zakonima, pripala polovina ostavštine, a ako bi se rodila kći, majci bi pripalo dvostruko više nego kćeri. No udovica rodi blizance, sina i kćerku. Kako valja podijeliti nasljedstvo da bi se zadovoljio zakon?

3. Dokažite Arhimedovu formulu za izračunavanje površine iscrtanog dijela kruga

$$P = \frac{\pi t^2}{8},$$

pri čemu je $|AB| = t$.



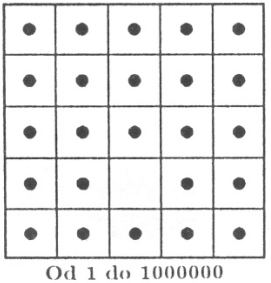
MATEMATIČKO–FIZIČKI LIST

MFL je časopis za srednješolsko matematiko in osnovnošolsko ter srednješolsko fiziko hrvaškega matematičnega in hrvaškega fizikalnega društva. Vsebina zadnje (dvojne, $3-4$) številke je takale: *Fizika kaosa* (4. del), *Indirektni dokazi*, *Izračun faktorielov za velika števila*, *Absorbcijski spekter joda*, *Brownovo gibanje in povest o atomih*, *Naloge iz fizike za osnovne šole*, *Kako močan je teleskop*, *Naloge iz matematike*, *Naloge iz fizike*, *Rešitve nalog*, *Kako izračunati* π, *Rešitve nalog s* 33. *matematične olimpiade*, *Republiško tekmovanje iz fizike za osnovne in srednje šole*, *Nobelova nagrada za fiziko za* 1992, *Testne naloge za sprejemne izpite na elektrotehniki in strojništvu*, *Rezultati nagradnih natečajev*. Tule je razvedrilna matematika:

ZABAVNA MATEMATIKA

Preskakivanje pločica

Kvadratna ploča podijeljena je na 25 kvadratića od kojih je 24 pokriveno crnim kružnim pločama, a samo je jedan slobodan. Preskakivanjem pločica vodoravno ili okomito preko susjednih ploča na slobodna polja i skidanjem preskočenih pločica treba postići to da nakon 23 preskoka na ploči ostane samo jedna pločica. Ako se koriste povezani skokovi, igra se može završiti već nakon 17 poteza. A možda vi uspijete pronaći još bolje rješenje. Ugodna zabava!



Od 1 do 1000000

Prvih milijun prirodnih brojeva čine podugačak niz, ali ipak nije teško naći zbroj svih tih brojeva. Malo je teži problem određivanje zbroja svih znamenaka svih brojeva od 1 do 1000000. No uz malu dosjetku i to se brzo postiže.

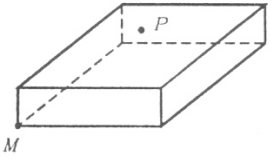
$$1, 2, 3, \ldots, 999999, 1000000$$

Možete li naći koliki je taj zbroj?

Muha i pauk

Športska dvorana ima oblik kvadratne prizme s cjelobrojnim duljinama bridova. U sredini stropa te dvorane nalazi se pauk, a u jednom donjem kutu dvorane uhvaćena u njegovu mrežu koprca se muha.

Kolike su duljine bridova športske dvorane ako najmanja udaljenost koju pauk treba prijeći po stranama dvorane da bi dospio do svoje žrtve iznosi 17 metara?



Tajanstveni račun

Matematički časopis "Problem" objavio je kao nagradni zadatak zanimljiv račun množenja. U njemu je umnožak dvaju nepoznatih troznamenkastih brojeva šesteroznamenkasti broj sastavljen od istih znamenaka A. Pronađite sva različita rješenja ovog zadatka!

$$\begin{array}{r} *\,*\,* \cdot *\,*\,* \\ \hline *\,*\,* \\ *\,*\,*\,* \\ \quad *\,*\,*\,* \\ \hline A\,A\,A\,A\,A\,A \end{array}$$

QUANTUM

3. številka 3. letnika prinaša tele vsebine: *Democracy and mathematics*, *Physics fights frauds*, *A magnificent obsession*, *Tactile microscopes*, *Brainteasers*, *How do you figure*, *At the blackboard I, II*, *Kaleidoscope*, *Math investigations*, *Physics contest*, *Happenings*, *Crisscross Science* in *Toy store*.

Revijo lahko naročite na naslov: *Springer–Verlag*, *Heidelberg Platz* 3, 1000 *Berlin* 33, *FGR*.
Cena: 14 $ (dijaki), 18 $ (posamezniki), 30 $ (inštitucije) + 8 $ poštnina.

Oglejmo si nekaj orehov te številke.



B71

Time machine. "You know," a friend of mine once said, "the day before yesterday I was 10 years old, and next year I'll be 13!" Can this be true? (S. Korshunov)



B72

Mysterious pictographs. What's the rule for drawing this sequence of figures? Guess what figure should be drawn next. (A. Zvonkin)



B73

Escaping pools. In karstic regions—that is, areas with irregular limestone formations, including caverns and underground streams—one can come upon unusual ponds. During the rainy season they gradually fill with water, but then they suddenly become surprisingly shallow. Why does that happen? (A. Buzdin)



B74

Calculating on the way. Alice used to walk to school every morning, and it took 20 minutes for her from door to door. Once on her way she remembered she was going to show the latest issue of *Quantum* to her classmates but had forgotten it at home. She knew that if she continued walking to school at the same speed, she'd be there 8 minutes before the bell, and if she went back home for the magazine she'd arrive at school 10 minutes late. What fraction of the way to school had she walked at that moment in time? (S. Dvorianinov)

MATHEMATICS AND INFORMATICS QUARTERLY

M&IQ je mednarodna revija, ki jo urejujejo v Bolgariji, tiskajo in razpošiljajo v Singaporu, naročnino pa zbira *George Berzsenyi, Department of Mathematics/box* 121, *Rose–Hulman Institute of Technology, Terr Haute IN 47803–3999 USA*, ki je tudi vodja *Mednarodnega iskanja matematičnih talentov*.

Zadnja številka 2. letnika ima tole vsebino: *Cyclic quadrilaterals with integral sides and diagonals, Knight tours, Pell's equation and continued fractions, The coach's dilemma, Warm-up problems, Tangent circles in an isosceles triangle* in *International mathematical talent search*.

Tule so vroči problemi za mlajše.

Junior Level

J1. Prove the inequality $\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{y}} \geq \frac{2^{5/4}}{\sqrt[4]{x+y}}$ for positive real numbers x and y.

J2. In an isosceles triangle ABC, $AC = BC$, angle C measures $20°$. Point D is chosen on segment AC so that $CD = AB$. Find $\angle ABD$.

J3. In the neighboring countries Halland and Hulland the monetary units are hallars and hullars respectively. The Halland Bank changes 10 hullars for 1 hallar and the Hulland Bank changes 10 hallars for 1 hullar. A dealer starts with 1 hullar and makes a lot of money by crossing the border, each time changing money at a high profit. Prove that he can never have as many hullars as hallars.

J4. The sum of the volumes of two cubes with integer edges equals the sum of the lengths of their edges. Find the edges of these cubes.

Senior Level

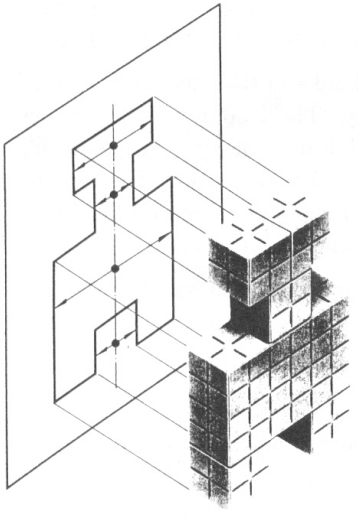
S1. Solve the equation $[\tan x] = 2\cos^2 x$, where $[z]$ stands for the integer part of z.

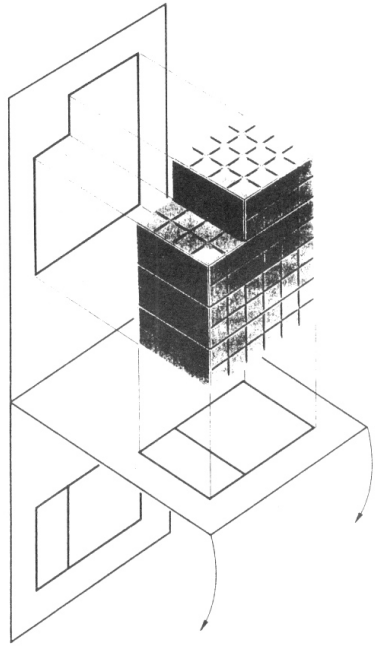
S2. Segment MN is the diameter of semicircle k. Point A_0 on k is different from M and N. The sequence $\{A_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ of points of k is defined by the recursive equation $|MA_n| + |NA_{n-1}| = |MN|$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Prove that $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = M$.

FISHERGEOMETRIC

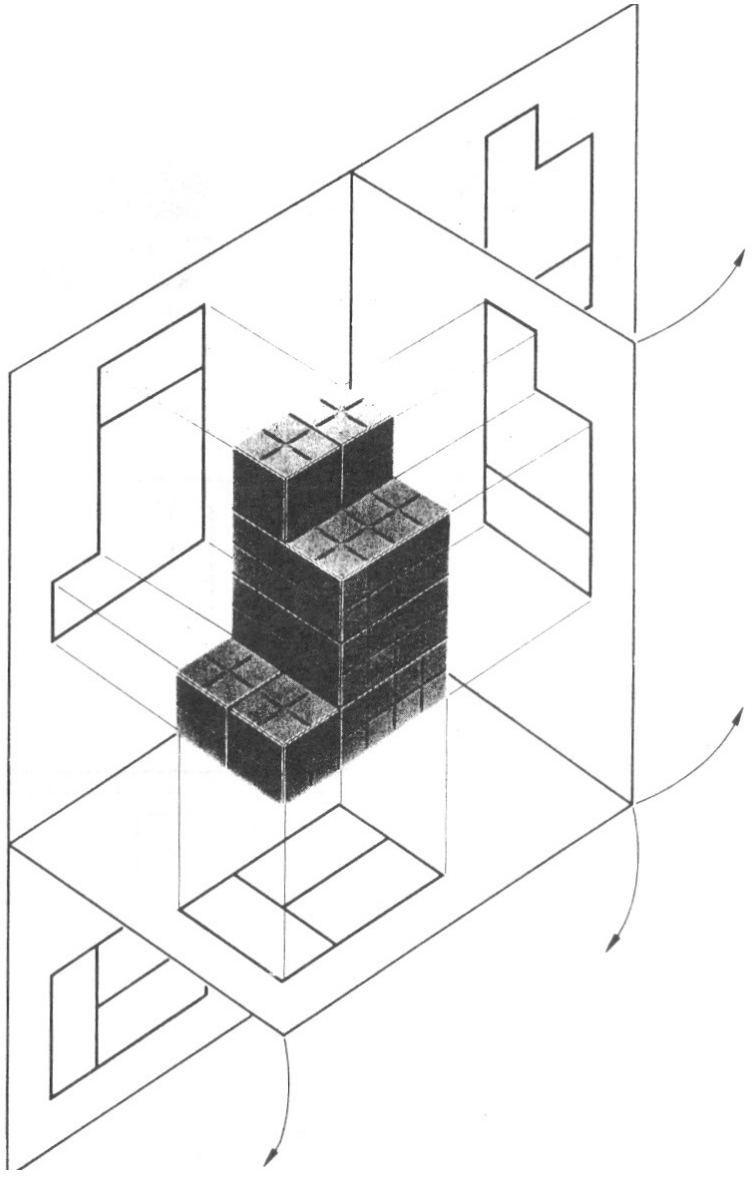
Fishergeometric je učilo, ki ga sestavljajo štirje kompleti: pravokotna telesa, deli piramid, valjev in stožcev. Namenjeno je razumevanju tehničnih risb.

Tokrat si oglejmo le prvi komplet. Telo, kakršno imamo na sliki spodaj, je popolnoma določeno že z eno pravokotno projekcijo, če povemo še njegovo širino.
Če širine ne podamo, potrebujemo dve pravokotni projekciji, kot na primer na sliki desno

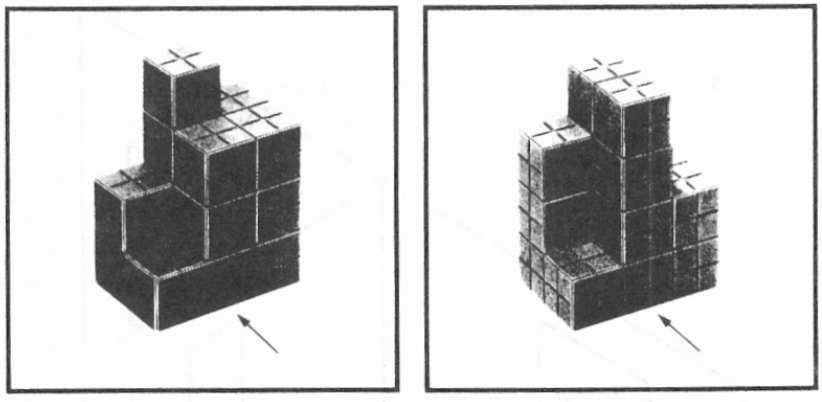




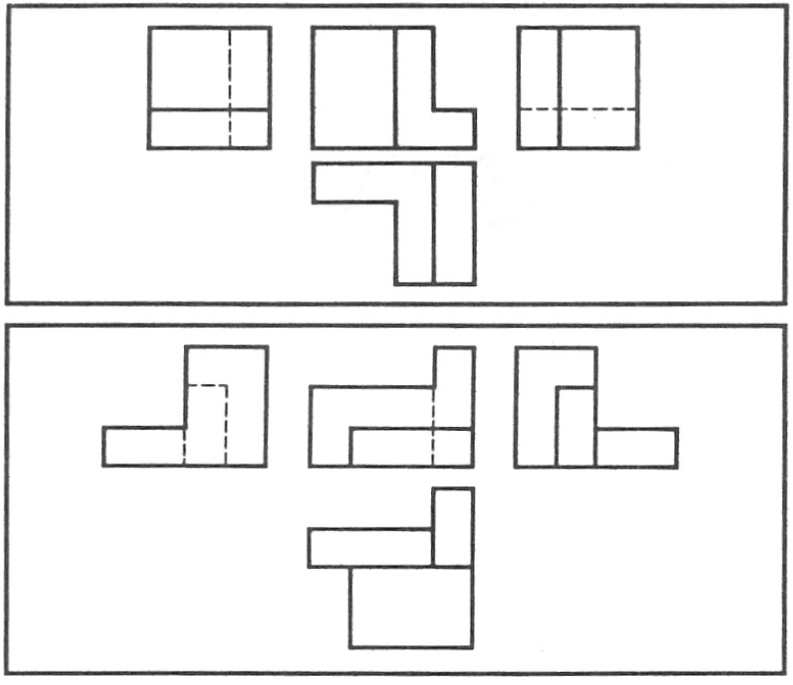
Za popolno predstavo o pravokotnih telesih potrebujemo tri pravokotne projekcije.



1. naloga. Osnovna naloga tehničnega risanja je poiskati vse tri pravokotne projekcije danega telesa.



2. naloga. Obratna naloga je napraviti telo, če poznamo tehnično risbo. Tokrat je dodana še četrta pravokotna projekcija.



3. naloga. Za matematiko pa je pomembno poiskati površine in prostornine teles iz prejšnjih dveh nalog.