DRUGI LETNIK — 1992–1993 – 6

LOGIKA

&

RAZVEDRILNA MATEMATIKA

Revijo sta za splet pripravila Nada in Marko Razpet
na podlagi datotek, ki jih je izdelal Darjo Felda.

Spoštovane bralke in bralci!

Pred vami je zadnja številka časopisa v tem šolskem letu, zato ne bo odveč dogovor za naslednje šolsko leto.

Ker bo prva številka v novem šolskem letu prvenstveno posvečena tekmovanju v logiki, bomo vsem posameznikom in šolam poslali revijo zadnji teden v avgustu po številu naročnikov iz preteklega šolskega leta. Spremembe v številu naročnikov bomo uredili v septembru. Cena ene številke brez prometnega davka ne bo presegala 3 DEM, odvisna pa bo od uspeha pridobivanja subvencije in novih naročnikov.

Izidor Hafner

V S E B I N A

Logične naloge 3

Rešitve logičnih nalog 16

17. državno tekmovanje srednješolcev iz znanja računalništva 21

Tekmujmo v razvedrilni matematiki 22

Izbirno tekmovanje iz matematike za srednješolce 25

International mathematical talent search 29

Fishergeometric 36

Na sredini revije je bilten *Bilten 2. državnega tekmovanja za zlato Vegovo priznanje*

Izdaja: Založniško podjetje LOGIKA d.o.o., Svetčeva 11, 61240 Kamnik,
št. žiro računa: $50140 - 603 - 57434$

Za izdajatelja: Izidor Hafner

Revija *Logika & Razvedrilna matematika* je vpisana v register časopisov pri *Ministrstvu za informiranje* pod registrsko številko *949*. Po mnenju *Ministrstva za informiranje* št. *23/89–92* šteje revija *Logika & Razvedrilna matematika* med proizvode informativnega značaja, za katere se plačuje davek od prometa po stopnji 5%.

Revijo *Logika & Razvedrilna matematika* subvencionira *Ministrstvo za šolstvo in šport*

Člani časopisnega sveta: prof. dr. Frane Jerman, prof. dr. Tomaž Pisanski in Darjo Felda, prof.

Strokovni pokrovitelj: Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko – Oddelek za teoretično računalništvo

Glavni in odgovorni urednik: dr. Izidor Hafner

Sodelavci: Marija Božnar, Jasna Bratanič, Breda Cestnik, Urša Demšar, Gregor Dolinar, Urška Drčar, Petra Ipavec, Alenka Kavčič, Dušanka Kocić, Jana Kristanc, Katka Kurent, Meta Lah, Nina Milač, Nika Novak, Hiacinta Pintar, Maja Pohar, Darja Polak, Tanja Soklič, Mirjana Todorovič, Aleš Vavpetič in Metka Žnidar

Jezikovni pregled: računalniški program *Besana*

Generalni sponzor: Marand d.o.o., zastopstvo Borland

Sponzorji: Državna založba Slovenije, Mlacom d.o.o., Mlakar & Co, Časopisno podjetje *Dnevnik*, NIL d.o.o., IR Electronic, Aster d.o.o.

Obdelava podatkov na računalniku firme *Mlacom* s programskim paketom PARADOX 3.5

Naslovnica: Alfred Anžlovar, Aster d.o.o.

Tisk: Tiskarna "Planprint", Rožna dolina c. IV/32–36, Ljubljana

Ilustrirala: Ana Hafner

Naklada: 1700 izvodov

© 1993 LOGIKA d.o.o.

ISSN $0354 - 0359$

LOGIKA & RAZVEDRILNA MATEMATIKA
letnik *II*, št. 6, 1992/93

Cena revije: 210 SIT, od tega prometni davek 10 SIT

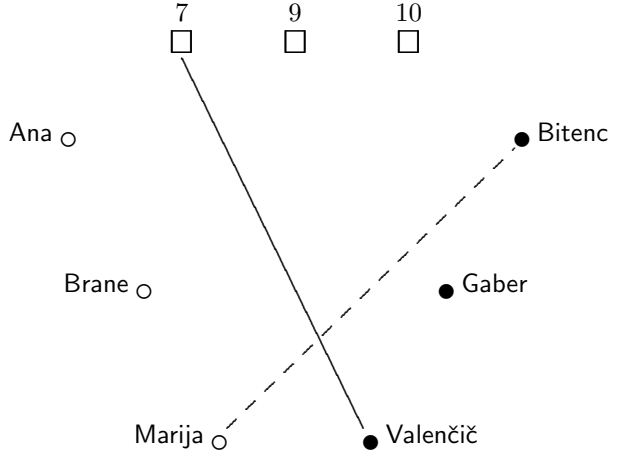
LOGIČNE NALOGE

1. OTROCI

Ana, Brane in Marija so trije otroci iz naše ulice. Pišejo se Bitenc, Gaber in Valenčič, stari pa so 7, 9 in 10 let. Iz naslednjih dveh podatkov sklepaj, kako se kateri piše in koliko je star.

1. Gospodična Bitenc je tri leta starejša od Marije.
2. Valenčičev otrok je star 7 let.

Pri reševanju naloge si pomagaj z grafom. S črtkano črto poveži vozla, če med njima ni povezave (na primer Marija — Bitenc), s polno črto pa, kadar povezava obstaja (Valenčič, 7 let).

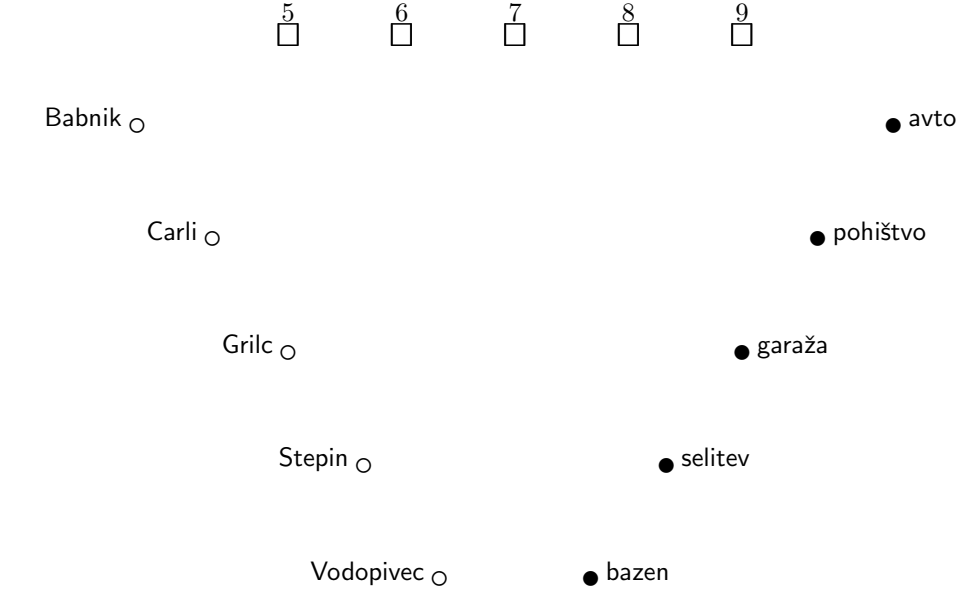


2. ŠTUDENTSKA DELA

Študent Peter se loti vsakega dela, da bi se lahko preživljal med študijem v Ljubljani. Tako je prejšnji teden delal pri Grilčevih in še štirih družinah ter za dela zaslužil 5, 6, 7, 8 in 9 stotakov. Iz naslednjih podatkov ugotovi, kaj je delal pri posamezni družini (pri eni je čistil bazen) in koliko je pri tem zaslužil.

1. Pet družin je bilo: Carlijevi, Stepinovi, družina, kjer je zaslužil 600 SIT, družina, kjer je zaslužil 900 SIT in družina, kjer je pospravljal garažo.
2. Pet družin lahko opišemo tudi takole: Babnikovi, Stepinovi, družina, kjer je zaslužil 800 SIT, družina, kjer je zaslužil 700 SIT, družina, kjer je pomagal pri selitvi.
3. Družini, kjer je zaslužil 7 oz. 5 stotakov, sta bili Vodopivčevi in družina, kjer je poliral pohištvo, vendar ne nujno v tem vrstnem redu.
4. Družina, kjer je opral avto, mu ni plačala ne 8 ne 9 stotakov.

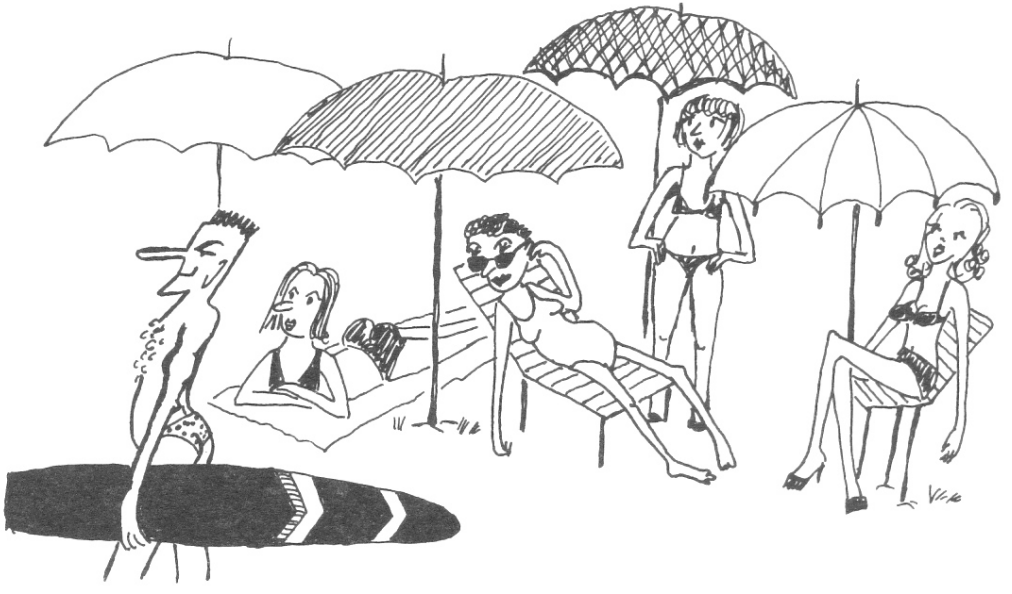
Pomagaj si z grafom.



3. POČITEK V SENCI

Na portoroški plaži leži tik ob obali v vrsti šest senčnikov različnih barv (zelena, vijolična, rdeča, modra, rumena, bela), pod njimi pa sedi šest turistk (Petra Peternelj, Tina Tavželj, Nada Nastran, Sonja Hlebec, Olga Jarnik, Urša Sodnik) iz različnih krajev Slovenije (Ljubljana, Kranj, Maribor, Novo mesto, Celje, Postojna). Iz naslednjih podatkov ugotovi za vsako od deklet njen domači kraj, barvo senčnika in njihov vrstni red na plaži (od leve proti desni).

1. Urša Sodnik ima osebo iz Novega mesta na svoji levi, turistko pod zelenim senčnikom pa na desni strani, vendar ne sedi neposredno poleg njiju.
2. Senčnik Sonje Hlebec je bele barve in leži desno od vijoličnega, vendar spet ne nujno zraven njega.
3. Pod rdečim senčnikom je našlo zavetje pred soncem dekle iz Postojne, ki leži na enem od koncev vrste (ima samo eno sosedo).
4. Tina Tavželj je doma iz Celja; turistka z rumenim senčnikom ni desna soseda Petre Peternelj.
5. Na tretjem mestu sedi dekle iz Ljubljane.
6. Olga Jarnik je druga v vrsti, vendar njen senčnik ni vijoličaste barve.
7. Četrti senčnik je moder; dekle , ki ga je najelo, ni doma iz Kranja, njeno ime pa se ne začne na isto črko kot priimek.



4. RAZLIČNI OKUSI

Poskuševalci vin imajo pogosto nenavadno prefinjena mnenja o sortah žlahtne kapljice in tako je bilo tudi na vinskem sejmu, o katerem govori ta naloga. Za vsakega od petih poskuševalcev (Boris, Jasna, Karmen, Miha, Viktor) ugotovi, katero vino je poskusil (bolgarsko–rdeče, francosko–rdeče, nemško–belo, italijansko–belo, špansko–belo), kakšno lastnost mu je pripisal (poživljujoče, izzivalno, neposredno, robustno, senzibilno) in na kaj ga je njegov okus najbolj spominjal (banana, žajbelj, žafran, usnje, sandalovina).

1. Boris je poskusil eno od belih vin, ki ni bilo tisto z okusom po banani; neka druga oseba pa je odkrila rahel priokus žafrana v enem od rdečih vin, vendar to spet ni bilo rdeče vino, ki je imelo "robusten" značaj.
2. Oseba, ki je označila svoje vino za "senzibilno", je bila ženskega spola, prav tako pa tudi njena sodelavka, katere vino je vsebovalo aromo sandalovine.
3. Po dolgem premišljevanju je Miha nazadnje prisodil svoji sorti nadih usnja, medtem, ko se Jasni njeno vino nikakor ni zdelo posebno poživljujoče.
4. Niti Karmen, niti oseba, ki je poskusila nemško–belo vino, nista opisala svoje vrste žlahtne kapljice za izzivalno.
5. Francosko–rdeče vino je ocenjevala oseba moškega spola, vendar to ni bil Viktor.
6. Strokovnjaku moškega spola, ki je imel priložnost okušati italijansko–belo vino, se je zdelo, da to deluje zelo neposredno, čeprav v njem ni bilo sledov žajblja.



5. TURNIR GOLFA

Na golf igrišču ležijo štiri žogice (A, B, C, D), od katerih je vsaka last drugega igralca. Ugotovi njegovo ime (Boštjan, Miran, Jože, Tilen), priimek (Sajovic, Grabner, Jesenik, Colnar) in vrstni red žogic na igrišču glede na oddaljenost od luknje z zastavico.

1. Niti žogica B niti C ne ležita najbližje luknji.
2. Žogica D pripada Colnarju, ki mu ni ime Jože; žogica C ni druga.
3. Žogica A je Boštjanova, ta pa se ne piše Jesenik, katerega žogica je bila tretja.
4. Žogica B leži bliže luknji kot tista, ki je last Sajovica.
5. Grabnerju je ime Miran.

Namig: najprej ugotovi Colnarjevo ime!



6. KAVELJCI IN KORENINE

V Klubu kaveljcev in korenin Zgornjega Kašlja vsako leto ob različnih praznikih organizirajo 5 javnih tekaških prireditev, da poskrbijo za rekreacijo someščanov. Ugotovi datum ($1.$ april, $1.$ maj, $25.$ junij, zadnja nedelja v juliju, prvi ponedeljek v septembru), startno mesto (mestni trg, gostilna, športno igrišče, avtobusna postaja, pošta), dolžino (3, 8, 10, 12, 15 km) in ime organizatorja (Alenka, Bojan, Janez, Lado, Silva) vsakega od letošnjih tekov.

1. Rekreativni navdušenci se bodo pod Silvinim vodstvom zbrali v ponedeljek na avtobusni postaji.
2. Gostilna je startno mesto 8 km teka, ki pa ga ne vodi Lado.
3. Tek, organiziran $1.$ aprila, bo letos potekal na nedeljo in bo 7 km krajši od prvomajskega.
4. Janezovi "kaveljci" bodo tekli prvi ponedeljek v septembru, in to dlje kakor tisti, ki se bodo zbrali pred pošto.
5. Tek, ki se bo začel na mestnem trgu, bo potekal $25.$ junija, kar bo letos na ponedeljek.
6. Alenka je zadolžena za 10 km tek.
7. Najkrajši tek ne bo organiziran zadnjo nedeljo v juliju.



7. MLADI ZBIRALCI

Starejša zakonca sta se po upokojitvi preselila v majhno hišico ob morju, kamor ju redno hodi obiskovat njunih pet vnukov (Ana, Cene, Janez, Lara, Sabina) različnih starosti (3, 4, 6, 8, 10 let). Ti se najraje igrajo na plaži pred hišico, kjer nabirajo različne predmete (raznobarvni kamenčki, školjke, sipe, polži, morska trava), za katere pa jim morata babica in dedek že prej pripraviti ustrezne posode (vedro, platnena torba, prazen marmeladni kozarec, vrečka, škatla za čevlje). Iz naslednjih podatkov ugotovi starost vsakega od otrok, katerih predmetov je ob zadnjem obisku največ zbral in kam jih je shranil.

1. Sabina je nabirala sipe in je dve leti starejša od otroka, ki je uporabljal babičin marmeladni kozarec.
2. Janez, ki je prosil za vrečko, je mlajši od Ane.
3. Raznobarvne kamenčke je nabiral osemletni otrok.
4. Otrok, star šest let, je svoje "najdbe" spravil v škatlo za čevlje.
5. Morska trava je bila shranjena v vedru.
6. Najmlajši vnuk, Cene, ni hotel nositi stare dedkove platnene torbe.
7. Lara, katere starost ni deljiva s štiri, ni zbirala školjk.



8. IGRAČE OŽIVIJO

Ponoči, ko pri Korenovih že vsi sladko spijo, se v njihovi hiši dogajajo čudne stvari – igrače iz otroške sobe (baletka, zmaj, železni mož, medvedek, svinčeni vojak) in iz podstrešja (slon, poštarček, zajec, punčka iz cunj, gumijasti pajac) oživijo in se v parih veselo igrajo vse do jutra, pri čemer jih zanimajo tudi bolj "odrasle" stvari, kot jim jih ponavadi pripisujejo (popivanje, igranje pokra, tenis, branje časopisov, gledanje videa). Ugotovi, kdo se je igral s kom, kaj je počel in kje (pritličje, Tadejeva soba, omara, škatla z igračami, postelja).

1. Igrače se igrajo v parih – vedno je ena iz otroške sobe, druga pa iz podstrešja.
2. Železni mož ima najraje popivanje (brez skrbi, narejen je iz nerjavečega jekla); baletka in gumijasti pajac se igrata skupaj, vendar ne v omari.
3. Medvedek ostane v škatli z igračami; video se nahaja v pritličju.
4. Punčka iz cunj je na postelji.
5. Zmaj se ne druži z zajcem in nobeden od njiju ne igra pokra. Niti zmaj, niti zajec ali igralca pokra pa niso v omari.
6. Zmaj ne mara tenisa.
7. Slon igra tenis, vendar ne s svinčenim vojakom.





*Opomba: Povprašajte koga za Zenonov paradoks o Ahilu in želvi, če ga še ne poznate!

9. RIMSKI TEMPLJI

V nekem antičnem rimskem mestu je na vsaki strani glavnega trga – foruma pravokotne oblike postavljen tempelj (v smeri urinih kazalcev jih imenujmo templji A, B, C in D). Vsak izmed njih je posvečen svojemu božanstvu (Jupiter, Mars, Merkur, Venera), v njem pa opravlja obrede drug svečenik (Dusticus, Fusticus, Lusticus, Rusticus). V templju se vedno nahaja tudi umetniška podoba čaščenega božanstva (bronasti kip, talni mozaik, marmornati kip, stenski mozaik). Za vsakega izmed templjev ugotovi, katero je to božanstvo, kako je upodobljeno in kdo je njegov svečenik.

1. Lusticus opravlja obrede v Venerinem templju.
2. Tempelj z bronastim kipom Merkurja stoji na trgu nasproti templja, za katerega skrbi Rusticus.
3. Dusticus je zadolžen za tempelj s stenskim mozaikom.
4. Marmornati kip stoji v templju A, tempelj B pa je posvečen Marsu.
5. Fusticus ni svečenik templja C.

Namig: najprej ugotovi ime svečenika v Merkurjevem templju!

10. VAŠKE PRIREDITVE

V Gorenjskem glasu je bilo na zadnji strani objavljenih 5 reklamnih oglasov za različne vaške prireditve, ki bodo potekale v prihodnjem mesecu (dražba, sejem starih znamk in kovancev, sejem domače obrti, bolšji trg, razstava malih domačih živali). Iz naslednjih podatkov ugotovi, v kateri vasi (Cerklje, Lesce, Križe, Kropa, Preddvor) in kje natanko bo organizirana vsaka od prireditev (kulturni dom, dom Taborniške zveze, prostori KS, mladinski klub, trg pred cerkvijo), poleg tega pa še, kakšen je bil vrstni red oglasov v časopisu.

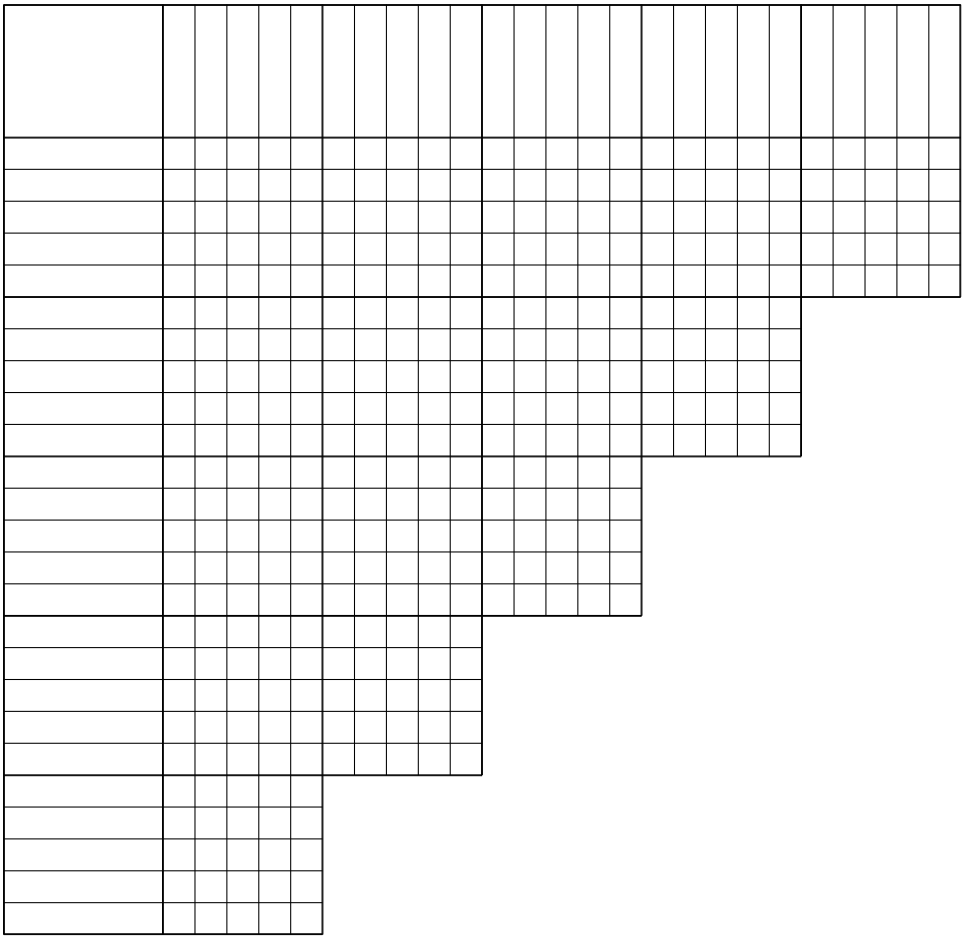
1. Taborniki bodo kot vsako leto organizirali bolšji sejem v domu Taborniške zveze, vendar to ne bo v Cerkljah. Njihov oglas ni bil na zadnjem mestu.
2. Oglas za sejem domače obrti v Kropi je bil objavljen tik pod oglasom za prireditev, ki bo potekala pred cerkvijo.
3. Preddvorčani so svoj oglas objavili na drugem mestu.
4. Prireditev, objavljena na četrtem mestu, bo organizirana v kulturnem domu.
5. Mladinski klub imajo v Križah, vendar tam ne bo potekala razstava malih domačih živali.
6. Vabilo na dražbo je bilo objavljeno na predzadnjem mestu, tik pod oglasom za prireditev v prostorih KS; v zadnjem oglasu pa je bil omenjen sejem starih znamk in kovancev.

Namig: začni z oglasom na zadnjem mestu!

11. KOŠARKARSKI TURNIR

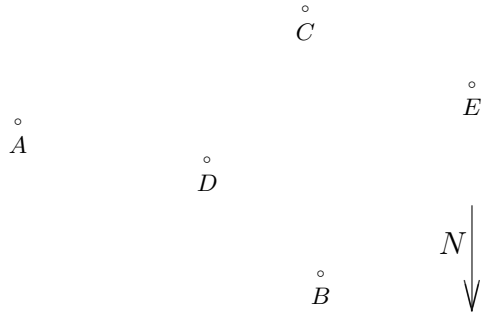
Na nekem turnirju v košarki za mlajše od 13 let je zmagala ekipa ene izmed Celjskih osnovnih šol. Pet najboljših igralcev je prejelo tudi posebne nagrade. Iz spodaj navedenih podatkov ugotovi celotno ime igralca, število tekem, v katerih je igral, njegovo številko na dresu, število prostih metov, metov za 2 točki in metov za 3 točke, ki jih je zadel, ter število osebnih napak za vsakega izmed petih igralcev.

1. Igralec *št. 4* in Aleš sta igrala v vseh desetih tekmah, Medvešek je igral samo v petih tekmah, ostala dva (nobeden ni bil *št. 5*) sta igrala v osmih tekmah.
2. Zupanc in Stepišnik sta bila enako stara, toda nobeden ni bil *št. 4* (ki je star 10 let) niti *št. 5*, ki ni star 10 let.
3. Igralec *št. 12*, ki ni bil star 11 let in se ni pisal Robič, je igral v osmih tekmah. Zupanc ni bil igralec *št. 10*.
4. Igralec *št. 10* je igral v osmih tekmah. Aleš, ki se ne piše Stepišnik, je dal 3 trojke, 22 metov za 2, 15 prostih metov in dobil največ osebnih napak.
5. Rok, ki je igral v 10 tekmah, je dal 22 "dvojk", 11 prostih metov in dobil več kot eno osebno napako. Ni zadel nobene trojke in ni bil star 11 let.
6. Borut, ki ni igral v 8 tekmah, je dal 20 metov za 2 točki, a nobenega prostega meta in nobene trojke.
7. Gregor, ki se ne piše Geršak, je zadel 10 prostih metov in 14 metov za dve točki. Dal je eno trojko in napravil eno osebno napako.
8. David je dal 6 prostih metov manj kot Zupanc in 7 metov za 2 točki manj kot Robič.
9. Vsi skupaj so zadeli 6 trojk in dobili 6 osebnih.

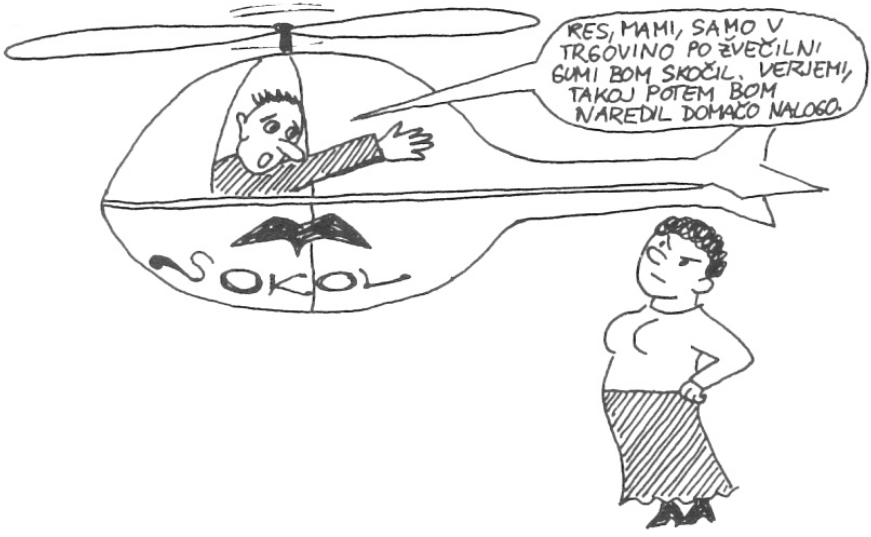


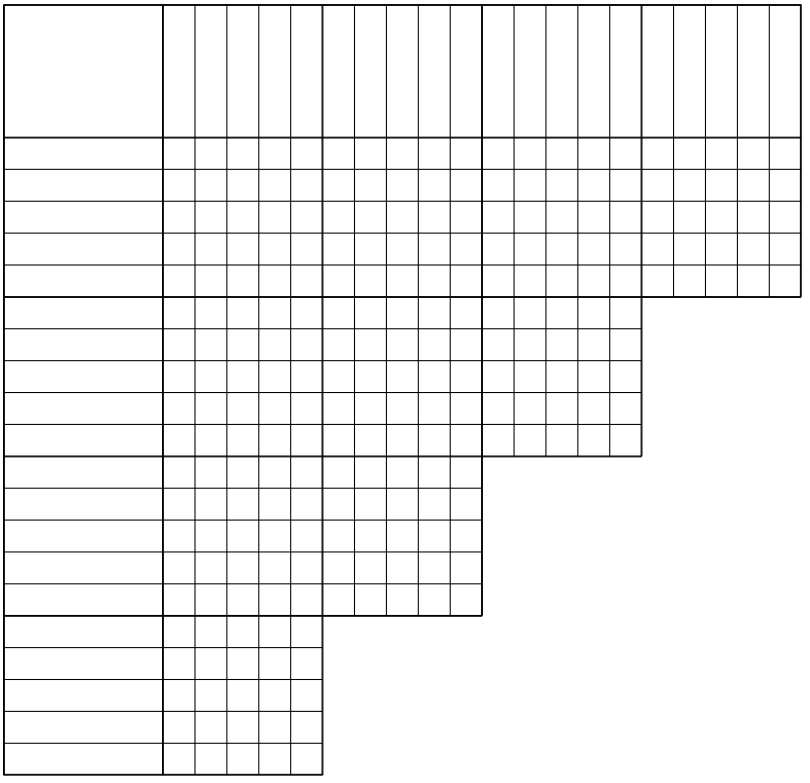
12. LETALSKI POLETI

V neki deželi, ki je zelo neprehodna, so najpomembnejša prevozna sredstva letala in helikopterji. V nekem mestu deluje pet letalskih družb, imenovanih po pticah. Prejšnjo soboto so vse družbe opravile po en let. Iz spodaj navedenih podatkov in s pomočjo priloženega zemljevida dežele ugotovi letalsko družbo, št. leta, čas odhoda (en polet je bil ob 11^{h} in eden ob 12^{h}), smer poleta in pilotov priimek.



1. Teh pet poletov je bilo: *št. 10*, polet v kraj C, polet Galebov, polet pilota Berganta in polet ob 9^h (ki ni bil namenjen v kraj A).
2. Birsa ta dan ni letel na jug, ni letel leta *št. 25* (ki je bil let Sokolov), in ni poletel ob 20^h.
3. Polet v kraj D je bil prej kot polet Ptičarjev in kasneje kot polet orlov (ki ni imel najmanjše št. poleta).
4. Letalo pilota Bajca (ki ni ne letalo Galebov in ne Sokolov) ni bilo na poti na vzhod, medtem ko je Banovo letalo bilo.
5. Polet *št. 15* je bil za poletom v kraj E, toda pred poletom *št. 20*, ki je bil pred poletom Jastrebov.
6. Pilot Bensa je letel zjutraj na jug, medtem ko je polet *št. 5* bil na vrsti šele popoldan. Nobeden od teh dveh poletov ni bil od družbe Orli (ki so ta dan leteli na sever).
7. Odhod letala v kraj B je bil 6 ur pred poletom *št. 10*. Pilot poleta *št. 10* ni bil ne Birsa in ne pilot Ptičarjev.





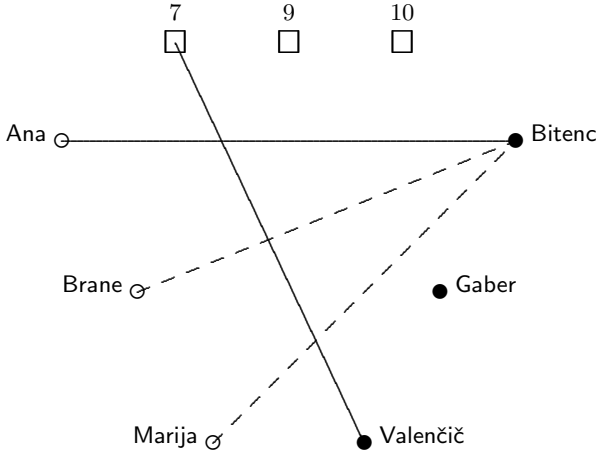
Rešitev križanke
iz Ł&RM št 5, str. 33

1 7	2 2	3 9		4 6	5 1
	6 8	4	7 4	3	3
8 2	1	9 9	7	10 8	5
11 4	1	3	2	12 8	7
13 6	8		14 4	4	
	15 2	2	16 1	5	9

Rešitve logičnih nalog

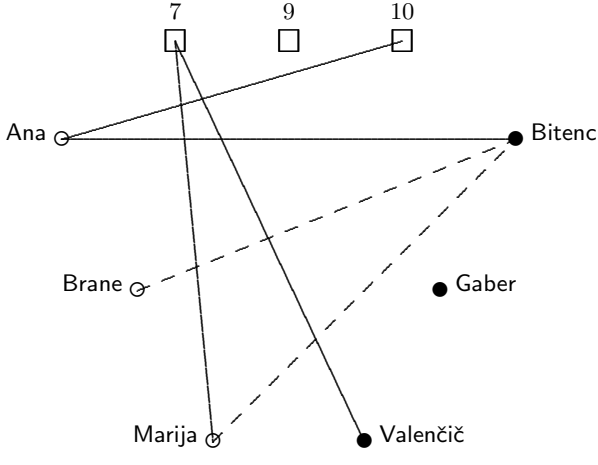
1. OTROCI

Tokrat bomo logično nalogo predstavili z grafom. Iz prvega podatka sklepamo, da se Brane ne piše Bitenc. To dejstvo – imenujemo ga elementarna prepoved – bomo na grafu zaznamovali s črtkano povezavo med vozloma "Brane", "Bitenc". Enako storimo z vozloma "Marija" in "Bitenc", saj se Marija ne piše Bitenc. Valenčičev otrok je star 7 let. To zaznamujemo s polno črto med vozloma.

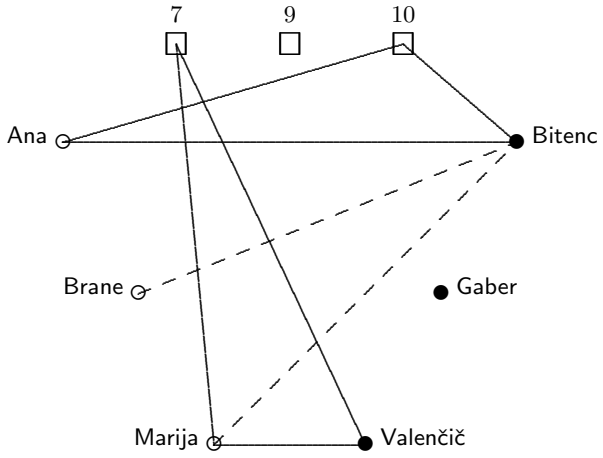


Ker se niti Marija niti Brane ne piše Bitenc, se mora tako pisati Ana. To dejstvo bomo zaznamovali s polno črto med vozloma "Ana" in "Bitenc".

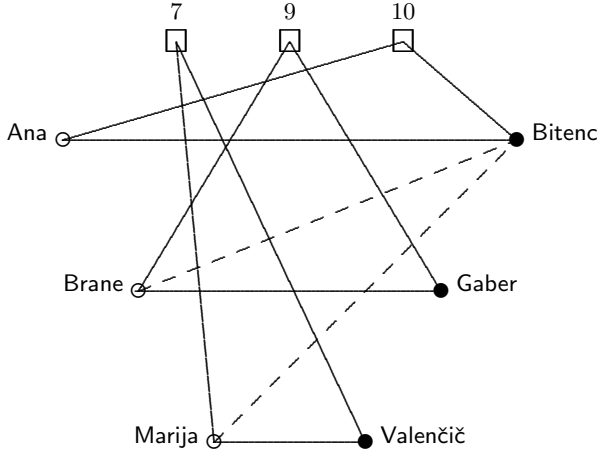
Iz prvega podatka sledi, da je Bitenčeva stara 10 let, Marija pa 7 let.



Ker je Marija stara 7 let in enako velja za Valenčičevega otroka, se Marija piše Valenčič. Enako sklepamo, da je Ana Bitenc stara 10 let.



Ostane nam le, da prikažemo zvezo Brane Gaber 9 let.



2. ŠTUDENTSKA DELA

Babnik	avto	6
Carli	bazen	8
Grilc	selitev	9
Stepin	pohištvo	5
Vodopivec	garaža	7

3. POČITEK V SENCI

Pod četrtim senčnikom modre barve ne sedijo Petra Peternelj, Tina Tavželj ali Nada Nastran (enake začetnice imen in priimkov), senčnik Sonje Hlebec je bel, Olga Jarnik pa je druga v vrsti, torej je četrta Urša Sodnik. Zato je glede na prvi pogoj šesti senčnik zelen, iz tretjega pogoja pa sledi, da je rdeči, pod katerim je dekle iz Postojne, prvi. Urša Sodnik ni iz Novega mesta (*1*), iz Celja je Tina Tavželj (*4*), Ljubljančanka pa leži na tretjem mestu (*5*). Pogoj *7* izloči tudi

Kranj, vemo pa še, da ima Postojnčanka rdeč senčnik. Torej je Urša Sodnik doma iz Maribora. Olgi Jarnik na drugem mestu ostane zdaj Novo mesto (*1*). Njen senčnik ni vijoličast (*6*), torej je rumen, Sonja Hlebec z belim senčnikom je peta (*2*), pod vijoličastim senčnikom pa sedi dekle iz Ljubljane (na tretjem mestu). Vidimo še, da Tini Tavželj iz Celja ostane šesto mesto, Sonja Hlebce pa je doma iz Kranja. Petra Peternelj zdaj ne more biti prva (*4*), zato je tretja in je torej iz Ljubljane, Postojnčanka na prvem mestu pa je Nada Nastran pod rdečim senčnikom.

1.	Nada Nastran	Postojna	rdeča
2.	Olga Jarnik	Novo mesto	rumena
3.	Petra Peternelj	Ljubljana	vijoličasta
4.	Urša Sodnik	Maribor	modra
5.	Sonja Hlebce	Kranj	bela
6.	Tina Tavželj	Celje	zelena

4. RAZLIČNI OKUSI

Okus Borisovega vina ni bil podoben banani, niti ne žafranu (*1*), sandalovini (*2*) ali usnju (*3*), torej je bil podoben žajblju. Iz tega tudi sledi, da njegovo belo vino ni bilo italijansko (*6*). Francosko–rdeče vino je poskusil nek moški, ki pa ni bil Viktor (*5*), zato je bil to lahko le Miha. Italijansko–belo oz. "neposredno" vino, omenjeno v šestem pogoju, tako ostane Viktorju. Rdeče vino z aromo žafrana je bilo bolgarsko (*1*), Mihu pa se je njegovo francosko zdelo "robustno". Zdaj je jasno, da je bila oseba, ki je poskusila bolgarsko–rdeče vino, ženska, ker pa vemo, da v njem ni našla priokusa sandalovine, ga je torej označila za "senzibilno" (*2*). Nemško vino ni bilo "izzivalno" (*4*), zato je bilo lahko le "poživljujoče", "izzivalnost" pa ostane španskemu vinu. Karmen ni poskusila nemškega vina ali uporabila izraz "izzivalen" (*4*), torej je bila njena sorta bolgarska. Jasni se njena sorta kapljice ni zdela "poživljujoča" (*3*), torej je bila "izzivalna" in je šlo za špansko vino, ki je imelo okus po sandalovini (*2*). Ostaneta nam še Boris, ki je okušal nemško–belo vino, in Viktor, katerega italijansko vino je imelo okus po banani.

Boris	nemško–belo	"poživljujoče"	žajbelj
Karmen	bolgarsko–rdeče	"senzibilno"	žafran
Jasna	špansko–belo	"izzivalno"	sandalovina
Viktor	italijansko–belo	"neposredno"	banana
Miha	francosko–rdeče	"robustno"	usnje

5. TURNIR GOLFA

Miran se piše Grabner (*5*), Boštjan je udaril žogico A (*3*), torej je Colnarju, ki ima žogico D in ni Jože, ime Tilen. Boštjan ni Jesenik (*3*), torej mora biti Sajovic, Jeseniku pa je ime Jože. Prva žogica ni last Boštjana Sajovica (*4*), torej to ni žogica A, zato je glede na prvi pogoj lahko le žogica D, ki jo je udaril Tilen Colnar. Zdaj vidimo, da žogica Boštjana Sajovica ni bila druga (*4*), in ker je bila tretja last Jožeta Jesenika, ostane Boštjanu le še četrto mesto, Miranu pa drugo. Miranova žogica zato ni C (*2*), torej je B, C pa pripada Jožetu.

1.	D	Tilen Colnar
2.	B	Miran Grabner
3.	C	Jože Jesenik
4.	A	Boštjan Sajovic

6. KAVELJCI IN KORENINE

Tek 25. junija se bo začel na mestnem trgu (*5*), Janez pa bo vodil tek prvi ponedeljek v septembru (*4*), torej bo Silvin tek, ki ne bo na nedeljo in katerega startno mesto je avtobusna postaja (*1*),

potekal 1. maja. Zato je glede na tretji pogoj lahko dolg 10 ali 15 km. Ker 10 km tek vodi Alenka (*6*), Silvi ostane 15 km tek. Zdaj iz pogojev *2* in *3* sledi, da bo 8 km tek izpred gostilne, organiziran v nedeljo, 1. aprila. Zaradi njegovega datuma tega teka ne bosta vodila Silva ali Janez, glede na dolžino pa to ne bosta Alenka in Lado (*2*), torej ga bo vodil Bojan. Janez ne bo zadolžen za 3 km tek (*4*) in mu ostane le tek na 12 km, na 3 km rekreacijo pa bo svoje tekače popeljal Lado. To se ne bo zgodilo zadnjo nedeljo v juliju (*7*), torej se bo 25. junija na mestnem trgu. Nazadnje ugotovimo še, da bo Alenkin tek na 10 km organiziran zadnjo nedeljo v juliju, in to izpred pošte (*4*), Janezov tek prvi ponedeljek v septembru pa se bo začel na športnem igrišču.

1. april	8 km	gostilna	Bojan
1. maj	15 km	avtobusna postaja	Silva
25. junij	3 km	mestni trg	Lado
zadnja ned. v jul.	10 km	pošta	Alenka
prvi poned. v sept.	12 km	športno igrišče	Janez

7. MLADI ZBIRALCI

Šestletnik je uporabil škatlo za čevlje (*4*), Janez pa vrečko (*2*). Cene, star 3 leta, ni imel niti platnene torbe (*6*) niti marmeladnega kozarca (*1*), torej je uporabljal vedro, kamor je shranil morsko travo (*5*). Osemletni otrok je zbiral raznobarvne kamenčke (*3*), zato iz prvega pogoja sledi, da je Sabina, ki je nabirala sipe, stara šest ali deset let, otrok z marmeladnim kozarcem pa štiri ali osem let (*1*). To ne more biti Lara (*7*), vemo pa, da to prav tako niso Sabina, Janez ali Cene, torej je Ana. Ker je Cene star tri leta, iz drugega pogoja vidimo, da Ana ne more biti stara štiri leta, zato je stara lahko le osem let in je zbirala raznobarvne kamenčke. Sabina je potemtakem stara deset let (*1*). Vsak od otrok drugih štirih starosti že ima določeno posodo za hranjenje, torej je Sabina uporabljala platneno torbo, Lara škatlo za čevlje in je stara šest let, Janez pa je star štiri leta. Nazadnje iz sedmega pogoja sledi, da je Lara nabirala polže, školjke pa ostanejo Janezu.

Ana	8	raznobarvni kamenčki	marmeladni kozarec
Cene	3	morska trava	vedro
Janez	4	školjke	vrečka
Lara	6	polži	škatla za čevlje
Sabina	10	sipe	platnena torba

8. IGRAČE OŽIVIJO

Zmaj ne igra tenisa (*6*), baletka je skupaj z gumijastim pajacem (*2*), železni mož pa najraje popiva (*2*), zato je slonov nasprotnik pri tenisu, ki ni svinčeni vojak (*7*), lahko le medvedek, ki s slonom igra tenis v škatli za igrače (*3*). Punčka iz cunj je na postelji (*4*), v omari pa nista niti gumijasti pajac (*2*), niti zajec (*5*), zato mora biti eden od njenih "stanovalcev" poštarček. Njegov kolega ni zmaj (*5*), ta pa tudi ni skupaj z zajcem (*5*), zato je s punčko iz cunj na postelji. Zmaj in punčka ne igrata pokra (*5*) in ne gledata videa, ki je v pritličju (*3*), torej bereta časopise. Poštarčka v omari prav tako ne zanima poker (*5*) in mu preostane le še popivanje z železnim možem; svinčeni vojak je torej skupaj z zajcem. Tudi njiju ne privlačijo igre s kartami (*5*), zato gledata video v pritličju. Poker igrata zdaj baletka in gumijasti pajac v Tadejevi sobi.

baletka	gumijasti pajac	poker	Tadejeva soba
zmaj	punčka iz cunj	branje časopisov	postelja
železni mož	poštarček	popivanje	omara
medvedek	slon	tenis	škatla z igračami
svinčeni vojak	zajec	video	pritličje

9. RIMSKI TEMPLJI

Lusticus je svečenik Venerinega templja (*1*), v Dusticusovem templju pa se nahaja stenski mozaik (*3*), torej je lahko svečenik Merkurjevega templja, ki ni Rusticus (*2*), samo Fusticus. Zato Merkurjev tempelj ni C (*5*). V templju A stoji marmornati kip, tempelj B pa je Marsov (*4*), torej je Merkurju posvečen tempelj D. Iz drugega pogoja potem sledi, da je Rusticus svečenik templja B, ki je Marsov, Dusticusu, svečeniku templja s stenskim mozaikom (*3*), pa ostaneta Jupiter in tempelj C. Nazadnje ugotovimo še, da marmornati kip v templju A pripada Veneri, Marsov pa je mozaik v templju B.

tempelj A	Venera	Lusticus	marmornati kip
tempelj B	Mars	Rusticus	talni mozaik
tempelj C	Jupiter	Dusticus	stenski mozaik
tempelj D	Merkur	Fustikus	bronasti kip

10. VAŠKE PRIREDITVE

Prireditev, omenjena v zadnjem oglasu, ne bo potekala pred cerkvijo (*2*) ali v prostorih KS (*6*), poleg tega pa ne bo šlo za bolšji sejem v domu Taborniške zveze (*1*). Na četrtem mestu je omenjen kulturni dom (*4*), torej je lahko na zadnjem mestu lahko le mladinski klub v Križah (*5*), kjer bodo prodajali stare znamke in kovance (*6*). Iz šestega pogoja nadalje sledi, da je bila na tretjem mestu objavljena prireditev v prostorih KS, na četrtem mestu pa dražba, ki bo potekala v kulturnem domu (*4*). Oglas za sejem domače obrti v Kropi ni bil objavljen na prvem, drugem ali petem mestu (*2*), (*3*), na četrtem mestu pa je bilo vabilo na dražbo, torej je bil objavljen na tretjem mestu in bo potemtakem potekal v prostorih KS, v Preddvoru pa bo prireditev pred cerkvijo (*2*). Če izločimo preostale možnosti, vidimo, da bo to razstava malih domačih živali, oglas za taborniški bolšji sejem pa je bil objavljen prvi. Ta ne bo potekal v Cerkljah, torej bo v Lescah, Cerkljani pa bodo imeli svojo dražbo v kulturnem domu.

oglas 1	Lesce	bolšji sejem	dom Taborniške zveze
oglas 2	Preddvor	razstava malih domačih živali	trg pred cerkvijo
oglas 3	Kropa	sejem domače obrti	prostori KS
oglas 4	Cerklje	dražba	kulturni dom
oglas 5	Križe	sejem starih znamk in kovancev	mladinski klub

11. KOŠARKARSKI TURNIR

Št. 4 je star 10 let, Zupanc in Stepišnik 11 let, *št. 5* pa 12 let (*2*). *št. 12* je star 10 let (*3*). Zupanc in Stepišnik sta številki 6 in 10 (*3*). Geršak je *št. 12* in je igral 8 tekem (*3, 1*). Robič je *št. 4* (*1*). Medvešek je *št. 5* in je igral 5 tekem (*1*). Stepišnik je igral 8 tekem (*4*). Robič in Zupanc sta igrala 10 tekem. Aleš se piše Zupanc (*1, 5*). Rok se piše Robič (*5*). Borut se piše Medvešek (*6*). Gregor se piše Stepišnik (*7*). David pa je Geršak. Rok je zadel 11 prostih, 22 dvojk, nobene trojke (*5*). Aleš je zadel 15 prostih, 22 dvojk, 3 trojke (*4*). Borut je zadel 20 dvojk, nobene trojke in nobenega prostega meta (*6*). Gregor je zadel 10 prostih, 14 dvojk, eno trojko, eno osebno (*7*). David je zadel 9 prostih, 15 dvojk (*8*), 2 trojki (*9*). Osebne napake: Aleš je imel 3, Rok pa 2 (*9, 4, 5*).

igralec	starost	*št.*	trojke	dvojke	prosti meti	osebne	št. iger
Aleš Zupanc	11	6	3	22	15	3	10
Borut Medvešek	12	5	0	20	0	0	5
David Geršak	10	12	2	15	9	0	8
Gregor Stepišnik	11	10	1	14	10	1	8
Rok Robič	10	4	0	22	11	2	10

12. LETALSKI POLETI

Polet ob 9^{h} je *št. 25* (*1, 5, 6*), Sokoli (*2*), na poti v kraj E (*1, 3, 7*), pilot je bil Ban (*4*). Polet ob 11^{h} je bil namenjen v kraj B (*7*), *št. 15* (*3, 5, 7*), Galebi (*3, 5, 6*), pilot je bil Bensa (*1, 2, 4*). Polet ob 17^{h} je *št. 10* (*7*), Jastrebi (*3, 7*), pilot je bil Bajc (*1, 7*), namenjen v kraj D (*6*). Ptičarji so leteli v kraj A, polet *št. 5* (*6*), pilot je bil Bergant (*7*), odhod ob 20^{h} (*3*). Opoldanski polet je *št. 20*, Orli, v kraj C, pilot Birsa.

TEKMUJMO V RAZVEDRILNI MATEMATIKI

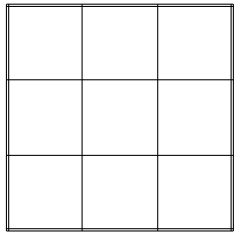
Letošnje tekmovanje v razvedrilni matematiki bo potekalo 4. septembra na *Fakulteti za elektrotehniko in računalništvo*. Tekmovalce bomo izbrali med reševalci nalog te rubrike, ki jih morate skupaj z nalogami v 5. številki poslati do 10. 8. 93 na naslov uredništva s pripisom *Za tekmovanje*.

1. NAJDENI DENAR

Matejin oče je zagledal na mizi denar.
"Kar veliko denarja imaš tukaj," je pripomnil.
"Dvesto tolarjev sem našla v parku," je odgovorila deklica.
"Srečo si imela," se je zasmejal oče. "Zdaj imaš petkrat toliko denarja, kot bi ga imela, če bi dvesto tolarjev izgubila!"
Koliko denarja je imela Mateja, preden je našla denar v parku?

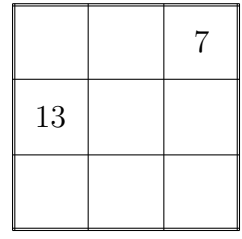
2. ŠTEVKE

V okenca spodnje tabele razvrsti števke od 1 do 9 tako, da bo vsota v vseh vrstah in stolpcih ter v obeh diagonalah enaka 15.



3. VSOTA

Prazna polja spodnje tabele zapolni s katerimikoli celimi števili tako, da bo vsota v vseh vrsticah, stolpcih in diagonalah enaka 111.



4. ZAKONI

V družbi desetih mladoporočencev poišči imena petih parov in koliko časa je vsak par poročen (1, 2, 3, 4 ali 5 let). Imena deklet so Anja, Beti, Cilka, Dunja in Ema, imena mož pa Aleš, Boštjan, Cene, Drago in Edo.

1. Dunja je poročena krajši čas kot Boštjan.
2. Aleš ni poročen s Cilko in Edova žena ni Anja.
3. Cene je poročen dalj časa kot Cilka, toda manj časa kot Beti, ki pa še ni poročena pet let.
4. Ema je poročena manj časa kot Edo, toda več kot Drago, ki pa je poročen že več kot eno leto.

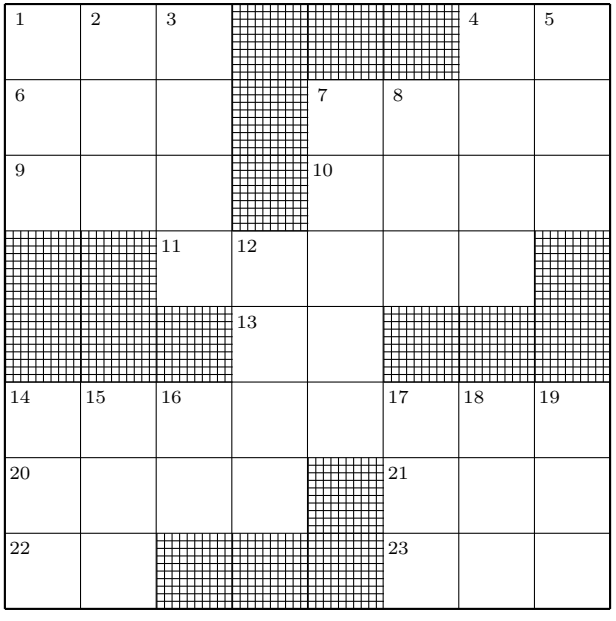
5. KRIŽANKA

Vodoravno:

1. Enake števke
4. Kvadrat lihega števila
6. Dvakrat *19 navp.*
7. Prvi dve števki sta polovici drugih dveh
9. Popolnemu kubu prištejemo 6
10. Enake števke
11. Menjavanje dveh cifer
13. Kvadrat
14. Zrcalno število
20. Vsota cifer je 9
21. Zamenjane števke *15 navp.*
22. Vsota cifer je enaka kot pri *1 vod.*
23. Prva števka je vsota drugih dveh

Navpično:

1. Kvadrat *22 vod.*
2. Praštevilo
3. Same sode števke
4. Prva in zadnja števka sta isti kot pri *3 navp.*
5. Število, deljivo s 5
7. Vsota cifer je 20
8. Vsota cifer je 10
12. Od *7 vod.* odštej *4 navp.*
14. Kvadrat praštevila
15. Kvadrat *4 vod.*
16. Praštevilo
17. Od *9 vod.* odštej *2 navp.*
18. Večkratnik *1 vod.*
19. Zaporedne števke



6. LETA

Matjaž je dražil svojo najstniško sestro: "Ti si še otrok! Ko boš ti toliko stara, kot sem bil jaz, ko si imela ti tretjino mojih zdajšnjih let, bom jaz dvakrat toliko star, kot si ti zdaj!" Imel je prav; koliko je torej stara Matjaževa sestra?

7. SORODSTVO

Osebe A, B, C in D so si med seboj v sorodu, toda ne krvoskrunsko.

1. Ena oseba je nasprotnega spola kot ostali trije.
2. Med njimi so: A–jeva mati, B–jev brat, C–jev oče in D–jeva sestra.
3. Najstarejši in najmlajši sta nasprotnega spola.

Kdo je nasprotnega spola od ostalih treh?

8. MNOŽENJE

Dopolni naslednji račun tako, da se bo množenje izšlo!

$$\begin{array}{cccccccc} 6 & _ & _ & & \cdot & _ & _ & _ \\ \hline & & _ & 5 & _ & 5 & & \\ & & & _ & _ & _ & _ & \\ \hline & & & & & _ & _ & _ \\ & & _ & _ & 5 & _ & 4 & _ \end{array}$$

9. KDO JE TAT

V soseščini živi pet parov. Težava je v tem, da je eden izmed mož tat. Ostali štirje so bogataš, revež, berač in zdravnik. V vsakem paru en vedno govori resnico, drugi pa vedno laže. V štirih parih govori resnico žena, mož pa laže. Edini moški, ki govori resnico, je revež. Vsaka oseba je dala eno ali dve izjavi. Nihče ni pri tem omenil imena svojega partnerja. Kdo je tat?

A: G in I sta poročena.
B: Oseba E je poročena z bogatašem.
C: B in H sta poročena.
D: B in J sta poročena.
C je berač.
E: D in I nista poročena.
F: G ni revež.
A in D sta poročena.
G: C in H sta poročena.
J ni zdravnik.
H: D je bogataš ali pa ženska.
A in E sta poročena.
I: C in F sta poročena.
B je ženska.
J: E je tat.
C govori resnico.

10. NAJMANJŠA VSOTA

V vsakem od spodnjih računov predstavlja različna črka različno števko. Vendar ni nujno, da neka črka v prvem primeru predstavlja isto števko tudi v drugem primeru. Lahko ugotoviš, katera vsota je najmanjša?

1.)
$$\begin{array}{cccccc} & & M & N & O & P \\ + & & R & P & N & O \\ \hline & & P & O & S & N \end{array}$$

2.)
$$\begin{array}{cccccc} & & P & O & S & N \\ + & & M & N & O & P \\ \hline & & R & P & N & O \end{array}$$

IZBIRNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJEŠOLCE

Prvi letnik

1. Za katera naravna števila n je število $14^n - 1$ deljivo s 15?

2. Po ravnini leze polž s stalno hitrostjo. Vsakih 15 minut se obrne za 90° (v levo ali desno) glede na smer gibanja. Dokaži, da se lahko vrne v izhodiščno točko le po vsakem celem številu ur.

3. Skozi točko v notranjosti trikotnika potegnemo vzporednice stranicam trikotnika in razdelimo trikotnik na šest likov, od katerih so trije trikotniki. Izrazi ploščino trikotnika s ploščinami teh treh trikotnikov.

4. Če v avtomat vržemo en rdeč žeton, nam vrne pet modrih; če pa v avtomat vržemo en moder žeton, nam vrne pet rdečih. Ali lahko Peter, ki ima na začetku en žeton, priigra enako število rdečih in modrih žetonov?

Drugi letnik

1. Dokaži, da je predzadnja števka vsakega števila 3^n ($n \in \mathbb{N}$) soda.

2. Na stranicah AB in CD kvadrata $ABCD$ se nahajata točki K in L zaporedoma. Izberimo točko M na daljici KL. Kroga, očrtana trikotnikoma AKM in MLC, se sekata v dveh točkah: M in N. Dokaži, da točka N leži na diagonali AC.

3. Za nek $c \in \mathbb{R}$ ima kvadratna enačba $x^2 - x + c = 0$ racionalna korena p in q. Dokaži, da sta tudi korena enačbe $x^2 + p\,x - q = 0$ racionalna.

4. Poišči vse realne rešitve sistema

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots + a_{1993} &= 1993 \\ a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{1993}^2 &= a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{1992}a_{1993} + a_{1993}a_1 \end{aligned}$$

Tretji letnik

1. Naravno število ima desetiški zapis $\overline{ababab}$. Dokaži, da nima nobenega praštevilskega faktorja večjega od 97.

2. Na krožnici izberemo zaporedoma točke A, B, C in D. Dokaži, da je tetiva, ki spaja razpolovišči lokov $\widehat{AB}$ in $\widehat{CD}$, pravokotna na tetivo, ki spaja razpolovišči lokov $\widehat{BC}$ in $\widehat{DA}$.

3. V trapezu $ABCD$ označimo z M presečišče njegovih diagonal. Osnovnica AB je pravokotna na AD. V trapez lahko včrtamo krog s polmerom r. Izračunaj ploščino trikotnika MBC.

4. Dokaži neenakost
$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y \leq 3 \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{2}$$
za pozitivni realni števili x in y.

Četrti letnik

1. Poišči vse rešitve enačbe $m! + 2 = n^2$, kjer sta m in n naravni števili.

2. Robovi tristrane piramide predstavljajo vektorje $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_6$. Ali je moč te vektorje tako usmeriti, da bo njihova vsota ničelni vektor?

3. Prvi člen zaporedja a_n naj bo poljubno naravno število, člen a_{n+1} pa naj bo vsota tretjih potenc števk števila a_n. Dokaži, je zaporedje od nekod naprej periodično.

4. Enakokraki trapez, ki ni pravokotnik, imenujemo *pravi* trapez.
   (a) Ali je moč razrezati enakostranični trikotnik na prave trapeze?
   (b) Ali je moč razrezati kvadrat na prave trapeze?

Matjaž Željko

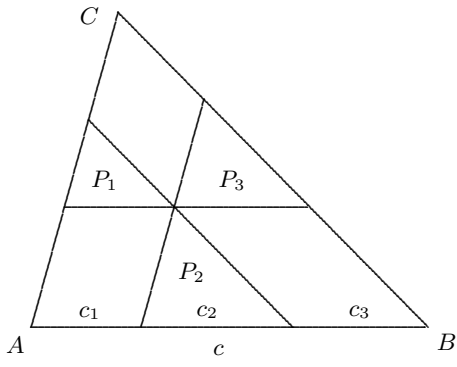
Rešitve nalog izbirnega tekmovanja

Prvi letnik

1. Če je $n = 2k$, lahko izraz razcepimo: $14^{2k}-1 = (14^2)^k-1 = (14^2-1)((14^2)^{k-1}+\ldots+1) = 13\cdot 15\cdot((14^2)^{k-1}+\ldots+1) = 15l$. Pri $n = 2k+1$ pa je $14^{2k+1}-1 = 14(14^{2k}-1)+13 = 14\cdot 15l+13$.

2. Z $n_\bullet$ označimo število pomikov v smer $\bullet \in \{\uparrow,\downarrow,\leftarrow,\rightarrow,\}$. Označimo še $n_\updownarrow = n_\uparrow + n_\downarrow$ in $n_\leftrightarrow = n_\leftarrow + n_\rightarrow$. Da bi se polž vrnil v izhodišče, mora biti $n_\leftarrow = n_\rightarrow$ in $n_\uparrow = n_\downarrow$. Torej $n_\updownarrow = 2n_\uparrow$ in $n_\leftrightarrow = 2n_\leftarrow$. Ker se polž obrača le po 90^0, mora biti $n_\updownarrow = n_\leftrightarrow$, in je zato celotno število pomikov $n_\updownarrow + n_\leftrightarrow = 2n_\updownarrow = 4n_\uparrow$. Ker je število korakov deljivo s 4, je polž na poti celo število ur.

3. Manjši trikotniki so podobni prvotnemu; torej $c_1 = ck, c_2 = cl, c_2 = cm$ in $P_1 = Pk^2, P_2 = Pl^2, P_3 = Pm^2$, pri čemer so $k,l,m \in (0,1)$ in je P ploščina celega trikotnika. Prve tri enakosti seštejemo, upoštevamo $c_1 + c_2 + c_3 = c$ in dobimo $k+l+m = 1$. Druge tri enakosti najprej korenimo in nato seštejemo. Sledi $\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}+\sqrt{P_3} = \sqrt{P}(k+l+m) = \sqrt{P}$ in nato $P = (\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}+\sqrt{P_3})^2$.



4. Ne, ker ima Peter na začetku liho mnogo žetonov in se po vsaki igri število njegovih žetonov poveča za 4.

Drugi letnik

1. Na zadnjem mestu se lahko pojavijo le števke 1, 3, 7 in 9. Ko množimo s 3, v prvih dveh primerih nimamo prenosa; v drugih dveh pa je prenos 2. Sodost predzadnje števke se torej ohranja, saj je na začetku 0.

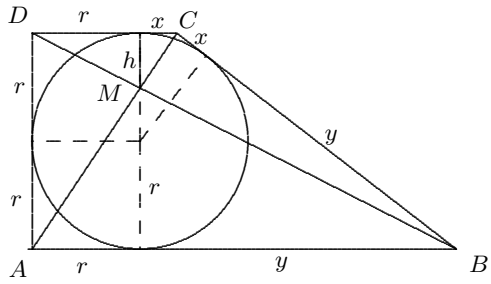
2. Predpostavimo lahko, da N ne leži v notranjosti štirikotnika $AKLD$; drugače zavrtimo kvadrat za π. Torej: $\angle ANM = \angle AKM = \angle CLM$, ker je $AKNM$ tetiven in $AK||LC$. Ker je $NMLC$ tetiven, je $\angle CLM + \angle CNM = \pi$. Sledi $\angle ANM + \angle CNM = \pi$ in so A,N,C kolinearne.

3. Korena enačbe $x^2 + px - q = 0$ bosta racionalna, če bo diskriminanta $D = p^2 + 4q$ kvadrat racionalnega števila. Iz prve kvadratne enačbe dobimo po Vietovih formulah zvezo $p+q = 1$. Torej $D = p^2 + 4(1-p) = (p-2)^2$. Torej $\sqrt{D} = |p-2| \in \mathbb{Q}$.

4. Drugo enačbo pomnožimo z 2 in preuredimo: $(a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2) + (a_2^2 - 2a_2a_3 + a_3^2) + \ldots + (a_{1992}^2 - 2a_{1992}a_{1993} + a_{1993}^2) + (a_{1993}^2 - 2a_{1993}a_1 + a_1^2) = 0$. Sledi $(a_1-a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \ldots + (a_{1992} - a_{1993})^2 + (a_{1993} - a_1)^2 = 0$. Torej je $a_1 = a_2 = \ldots = a_{1993}$. Iz prve enačbe pa vidimo, da je $a_1 = a_2 = \ldots = a_{1993} = 1$ edina rešitev sistema.

Tretji letnik

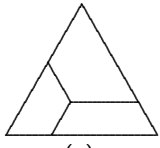
1. Brez kalkulatorja lahko razcepimo $\overline{ababab} = 10101(10a+b) = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37(10a+b)$. Ker je $10a+b$ dvomestno število, je lahko največji praštevilski faktor kvečjemu največje dvomestno praštevilo; torej 97.
2. Naj $M \in \widehat{AB}, N \in \widehat{BC}, P \in \widehat{CD}, Q \in \widehat{DA}$. Dovolj je pokazati $\angle PQN + \angle QPM = 90^0$. Kot $\angle MPQ$ je obodni kot nad $\widehat{MA} \cup \widehat{AQ}$, kot $\angle PQN$ pa je obodni kot nad $\widehat{PC} \cup \widehat{CN}$. Ker je $\widehat{MA} = \widehat{MB}, \widehat{QA} = \widehat{QD}, \widehat{PD} = \widehat{PC}, \widehat{NC} = \widehat{NB}$ je $\widehat{MA} \cup \widehat{AQ} \cup \widehat{PC} \cup \widehat{CN}$ ravno pol obsega kroga in je zato $\angle PQN + \angle QPM$ obodni kot nad premerom kroga; torej 90^0.
3. Iz Pitagorovega izreka sledi: $(x+y)^2 = (2r)^2 + (y-x)^2$ oz. $xy = r^2$. Trikotnika $\triangle DMC$ in $\triangle BMA$ sta podobna: $\frac{r+x}{h} = \frac{r+y}{2r-h}$. Upoštevamo $y = r^2/x$ in izpeljemo $2rx = h(r+x)$. Očitno $p_{\triangle DMC} = \frac{1}{2}(r+x)h = rx$ in $p_{\triangle MBC} = p_{\triangle DBC} - p_{\triangle DMC} = \frac{1}{2}(r+x)2r - rx = r^2$.

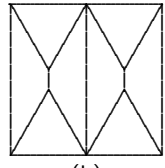


4. Predpostaviti smemo $x \le y$. Ker $\operatorname{arc\,tg}$ narašča, je $\operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{2} \ge \operatorname{arc\,tg} x$ in $\operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{2} \ge \operatorname{arc\,tg} y$. Sledi $3 \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{2} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{2} \ge 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{2} + \operatorname{arc\,tg} x \ge 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{2} + \operatorname{arc\,tg} x$. Dokazati moramo le še $2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{2} \ge \operatorname{arc\,tg} y$. Če je $y \ge 2$, je $2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{2} \ge 2 \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{2} \ge \operatorname{arc\,tg} y$. Če pa je $0 < y < 2$, pa sta obe strani neenačbe med 0 in $\frac{\pi}{2}$. Upoštevamo, da na tem intervalu tg narašča, pa izpeljemo: $2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{2} \ge \operatorname{arc\,tg} y \iff \operatorname{tg}(2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{2}) \ge \operatorname{tg} \operatorname{arc\,tg} y \iff \frac{y}{1-(y/2)^2} \ge y$, kar pa za $0 < y < 2$ drži.

Četrti letnik

1. Pri $m \in \{1,2,3\}$ je edina rešitev $m = 2, n = 2$. Če je $m \ge 4$, je $m! + 2 = 2(\frac{m!}{2} + 1)$. Število $\frac{m!}{2} + 1$ je liho in zato $2(\frac{m!}{2} + 1)$ ne more biti kvadrat naravnega števila.
2. Naj leži osnovnica piramide na ravnini xy, vrh pa na ravnini $z = z_0$. Potem imajo natanko trije vektorji z-komponento enako $\pm z_0$ in je zato z-komponenta vsote enaka $\pm\, n\, z_0$, kjer je n enak 1 ali 3. Vsota torej ne more biti $\vec{0}$.
3. Naj bo $S(n)$ vsota kubov števk števila n. Za $n < 10^4$ je $S(n) \le 4 \cdot 9^4 < 10^4$. Za k-mestno število n, ki je večje od 10^4, pa je $n \ge 10^{k-1} = 10^{k-4} \cdot 10^3 > k9^3 > S(n)$. Ker so pri $a_1 < 10^4$ vsi členi pod 10^4, se slej ali prej eno število ponovi in je od tam naprej zaporedje periodično. Če pa je $a_1 \ge 10^4$, pa je zaporedje padajoče vsaj tako dolgo, dokler ne pade pod 10^4. Ponovimo zgornji razmislek.
4. Rešitev (a) uporabimo pri rezanju trikotnikov pri (b).


(a)


(b)

INTERNATIONAL MATHEMATICAL TALENT SEARCH

Rezultati in rešitve nalog 6. kroga

Strokovno pokroviteljstvo nad akcijo $IMTS$ v Sloveniji je prevzel *Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko*, ki je plačal tudi nabavo 10 izvodov revije *Mathematics and Informatics Quarterly* za potrebe akcije. V šestem krogu smo takole ocenili prispevke:

Rezultati 6. kroga

	1	2	3	4	5	SKUPAJ
Bartolič Andrej	5	0	5	0	0	10
Brumen Gorazd	5	2	5	0	0	12
Cigale Gvido	5	5	5	5	0	20
Dolinar Damjan	5	5	5	5	2	22
Hočevar Nataša	5	4	5	0	0	14
Ipavec Petra	5	5	5	0	0	15
Kovačič Jernej	5	5	5	0	0	15
Kuzman Boštjan	5	3	5	0	2	15
Oreškovič Marko	5	5	5	0	0	15
Pangršič Tina	1	2.5	5	0	0	8.5
Pohar Maja	5	2	5	0	2	14
Pukšič Sašo	5	5	5	0	0	15

Rešitve nalog

1/6

Nine lines, parallel to the base of triangle, divide the other sides each into 10 equal segments and the area into 10 distinct parts. Find the area of the original triangle, if the area of the largest of these parts is 76.

Solution 1: By drawing in nine lines parallel to each of the other sides of the triangle we create 100 small congruent triangles of area A. The area of the largest triangle is then $100A$. The trapezoid at the bottom contains 19 of these triangles. Thus $76 = 19A$ so $A = 4$. Therefore the area of the large triangle is 400 square units.

Solution 2: The lines form similar triangles with bases $b, 2b, 3b, \ldots, 10b$ and heights $h, 2h, 3h, \ldots, 10h$. The area of the largest region is the area of the largest triangle (the original triangle) minus the area of the next largest triangle. This is $(10b \cdot 10h - 9b \cdot 9h)/2 = 19bh/2$. Since this is equal to 76, we see that $bh = 8$. Thus the area of the original triangle is $(10b \cdot 10h)/2 = 50bh = 400$.

Solution 3: Drop an altitude to the base. This will create two right triangles. We may then argue as above using the legs of the right triangles to see that the lower portion is $0.19\times$ the area of the whole right triangle for each triangle. Thus area of the lowest portion is $0.19\times$ the area of the original triangle. Thus the area of the original triangle is 400.

Solution 4: Let the other sides be a and b and the vertex angle be c then

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}ab\sin c &= \tfrac{1}{2}(0.9a)(0.9b)\sin c + 76 \\ \tfrac{1}{2}(0.19ab\sin c) &= 76 \\ \tfrac{1}{2}ab\sin c &= \tfrac{76}{0.19} = 400 \end{aligned}$$

Thus the area of the triangle is 400.

Comments: Several generalizations are possible. If the triangle is divided into k parts, and the area of the n-th smallest region is a_n, then the total area is of the triangle is $a_n k^2/(2n-1)$. When a trapezoid build around a rectangle of area b is divided into k segments, the largest of which has area a, then the area of the trapezoid is $[k^2a + (k-1)b]/(2k-1)$. When $b = 0$ this produces a triangle.

2/6

In how many ways can 1992 be expressed as sum of one or more consecutive (positive or negative) integers?

Solution 1: Suppose 1992 equals the sum of n consecutive integers starting with a_1 and ending with a_n. The sum of this arithmetic progression with common difference $d = 1$ is given by $n(a_1+a_n)/2$, and $a_n = a_1+(n-1)$. If we set this eaqual to 1992 and multiply both sides by 2, we get $n(a_1 + a_n) = n(2a_1 + n - 1) = 3984$. If n is odd, then it must be an odd divisor if 3984, and so n must be 1, 3, 83, or 249. If n is even, then $2a_1 + n - 1$ is odd and a factor of 3984, and so $2a_1 + n - 1$ must be 1, 3, 83, or 249. This gives us 8 possibilities to check, and each one gives us a solution:

$$\begin{aligned} 1992 &= 1992 \\ &= 663 + 664 + 665 \\ &= (-17) + (-16) + \ldots + 65 \\ &= (-116) + (-115) + \ldots + 132 \\ &= 117 + 118 + \ldots + 132 \\ &= 18 + 19 + \ldots + 65 \\ &= (-662) + (-661) + \ldots + 665 \\ &= (-1991) + (-1990) + \ldots + 1992 \end{aligned}$$

Solution 2: This solution is essentially the same as the previous one, but uses different quantities. Suppose 1992 equals the sum of n consecutive integers starting with k. Then summing the arithemtic progression, we have

$$1992 = k + (k+1) + (k+2) + \ldots + k + (n-1) = n(2k+n-1)/2$$

$$\text{or} \quad n(2n+k-1) = 3984.$$

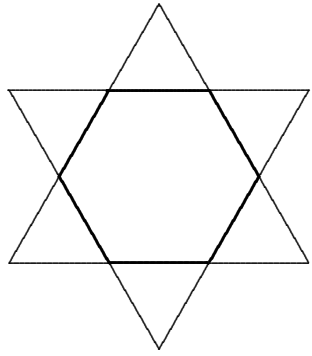
Notice that exactly one of n and $2n+k-1$ is odd. The only odd factors of 3984 are 1, 3, 83, and 249, therefore, either n or $2n+k-1$ takes on one of these four values. This leaves us only 8 possibilities for the pair (n,k), namely $(1,1992)$, $(3,663)$, $(83,-17)$, $(249,-116)$, $(16,117)$, $(48,18)$, $(1328,-662)$, and $(3984,-1991)$.

Comments: It is easy extend the above arguement to prove that the number of ways of expressing an integer m as the sum of consecutive integer is equal to twice the number of odd factor of m.

3/6

Show that there exists an equiangular hexagon in the plane, whose sides measure 5, 8, 11, 14, 23, and 29 units in some order.

Solution 1: An equiangular n-gon has angles of measure $180-360/n$ degrees, which equals 120 if $n=6$. Hence, by extending every other side of an equiangular hexagon we may embed it inside an equilateral triangle in such a way that the equilateral triangle is the union of the hexagon. We may do this construction in either of two ways as shown the diagram.



If consecutive sides of the hexagon have lengths a, b, c, d, e, and f, then the fact that the triangles are equlateral implies $a+b+c=c+d+e=e+f+a$ and $b+c+d=d+e+f=f+a+b$.

Each of these two sets of equations is equivalent to $a-d=e-b=c-f$. Conversely, given for example $a+b+c=c+d+e=e+f+a$ we can construct an equilateral triangle of side $a+b+c=c+d+e=e+f+a$ and clip off equilateral triangles of sides a, c, and e to obtain an equiangular hexagon of sides a, b, c, d, e, and f.

Because $29-23=14-8=11-5$ we can construct an equiangular hexagon in which consecutive sides have lengths 29, 8, 11, 23, 14, and 5. To see that this construction is unique up to rotation and reflection notice that of all fifteen possible differences of six numbers only 3 and 6 are repeated three times. However, $3=14-11=11-8=8-5$ omits 23 and 29 whereas $6=29-23=14-8=11-5$ uses all the sides.

Solution 2: Think of the sides of an equiangular n-gon as either vectors or as complex numbers in the plane. The requirement that the consecutive sides $a_1,\ldots,a_n$ form an equiangular n-gon becomes $a_1\omega_n+\ldots+a_n\omega_n^n=0$ where $\omega_n=exp(2\pi i/n)$ is a primitive nth root of unity. The minimal polynomial of ω_n over the rationals is the nth cyclotomic polynomial $\Phi_n(x)$ of degree $\phi(n)$ where ϕ is the Euler phi-function. ($\phi(n)$ is the number of integers m such that $1\le m\le n$ and $(m,n)=1$. It can be shown that

$$\phi(n)=n\prod_{\substack{p|n\\ p\ prime}}(1-\frac{1}{p}).$$

$\Phi_n(x)$ can be computed inductively by noting that the irreducible factors of $x^n - 1$ are given by

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x).)$$

Hence, if we require the a_i to be rational we need to impose $\phi(n)$ independent linear conditions on them. If $n = p$ is prime, then $\phi(p) = p - 1, \Phi_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + 1$, and the $p - 1$ conditions are $a_1 = \ldots = a_n$. If $n = 2p$ is twice an odd prime, then $\phi(2p) = p - 1, \Phi_{2p}(x) = x^{p-1} - x^{p-2} + x^{p-3} + \ldots + 1$, and the $p - 1$ conditions are $a_1 - a_{p+1} = a_{p+2} - a_2 = \ldots = a_p - a_{2p}$. This reduces to the first solution when $p = 3$.

Comments: The condition that the rational numbers $a_1, \ldots, a_n$, are the lengths of the sides of an equiangular n-gon can be stated as follows: If n has m distinct prime factors $p_1, \ldots, p_m$, then there exists $n/p_1 + \ldots + n/p_m$ rationals $c_{11}, \ldots, c_{1n/p_1}, c_{21}, \ldots, c_{2n/p_2}$, $\ldots, c_{m1}, \ldots, c_{mn/p_m}$ such that

$$a_i = \sum_{j=1}^{m} c_{j\bar{i}}$$

where $\bar{i}$ equals i reduced modulo n/p_j.

One can also divide the interior of the hexagon into 4 triangles, fix the measures of four of the angles and all six sides, and use the sine and cosine laws repeatly to show that the pieces fit together and that the remaining two angles must have measure 120 degrees.

4/6

An international firm has 250 employees, each of whom speak several languages. For each pair of employees, (A, B), there is a language spoken by A and not by B, and there is another language spoken by B and not by A. At least how many languages must be spoken at the firm?

Solution 1: Since $\binom{10}{5} = 252$, we could assign each of the 250 employees a different subset of 5 languages from set of 10 languages. We now need to show that it is impossible to find 250 distinct subset from a set of 9 language.

Suppose that a total of 9 languages would be enough. For a given subset of 3 of these languages, the 250 employees can be divided into $2^3 = 8$ disjoint subgroups depending on which they know (for instance, in one group, they will know all three, in another, they will know none, in another they will known one but not the other two, etc.). Since 8 times 31 is 248, one of these 8 subgroups must have 32 employees. Let G be a group of 32 employees, all of whom are in one of the above 8 subgroups.

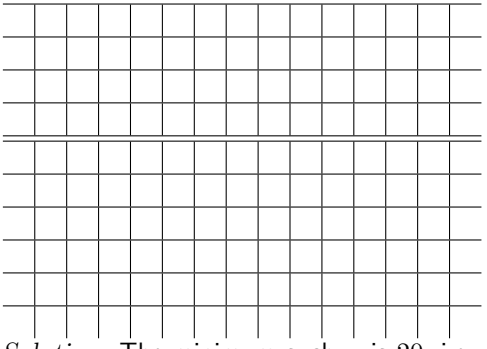
Let 1, 2, 3, and 4 represent languages which are distinct from the subset of the above mentioned 3 and call the remaining two languages A and B. With 4 languages, there are $2^4 = 16$ ways to divide people with respect to which languages they speak. If we divide the group G with respect to these 16 subgroups, we see that each has exactly two employees. For instance, if there are 3 emplooyees which know the same subset of the original three languages and also know the same subset of languages 1, 2, 3, and 4, then the languages which are different for the three must be A and B. However, A and B can only be used to distinguish at most two people. Therefore, the group G must be divided, with respect

to languages 1, 2, 3, and 4, into 16 subgroups, each having exactly two employees. Thus there are two employees, $E1$ and $E2$, which know the same subset of the original three languages and also know languages 1, 2, 3, and 4. Therefore, one of these employees, (say $E1$), knows A but not B and the other one knows B but not A. But at the same time, there are two employees, $E3$ and $E4$, knowing the same subset of original three languages but knowing none of languages 1, 2, 3, and 4. Again, one of these (say $E3$) must know A but not B and the other knows B but not A. Notice that the statement of the problem is not satisfied for $E1$ and $E3$ since the languages that $E3$ knows is a subset of the languages which $E1$ knows. We therefore conclude that 9 languages are not enough.

Solution 2: For a set of n languages, let $P(n)$ be the maximum number of people satisfying the condition of the problem. For instance, it is easy to check that $P(1) = 1, P(2) = 2, P(3) = 3$, and $P(4) = 6$. Even though the computations get more complicated as n increases, it is possible to find (and use) an upper bound for $P(n)$. For example, if there are n languages, call one of them L. Let $G1$ be the set of people who speak L and $G2$ the others. Since the people in $G2$ speak at most the other $n-1$ languages, the number of people in $G2$ is less than or equal to $P(n-1)$. But notice that since all the people in $G1$ speak the language L, it must be the other $n-1$ languages that allow them to satisfy the condition of the problem. Therefore, the number of people in $G1$ is also less than or equal to $P(n-1)$. Thus $P(n) \leq 2P(n-1)$. Using this condition to get bounds for a few more n's, we see that $P(5) \leq 2P(4) = 12, P(6) \leq 2P(5) \leq 24, P(7) \leq 2P(6) \leq 48, P(8) \leq 2P(7) \leq 96$, and $P(9) \leq 2P(8) \leq 192$. Thus, we need more than 9 languages to satisfy the condition of the problem for 250 employees.

5/6

An infinite checkboard is divided by a horizontal line into upper and lower halves as shown on the right. A number of checkers are to be placed on the board below the line (within the squares). A "move" consists of one checker jumping horizontally or vertically over a second checker, and removing the second checker. What is the minimum value of n which will allow the placement of the last checker in row 4 above the dividing horizontal line after $n-1$ moves? Describe the initial position of the checkers as well as each of the moves.



Solution: The minimum such n is 20; i.e., an initial arrangement of 20 checkers can be found which allows the last remaining checker to be in the fourth row, but no such initial arrangement of 19 or fewer checkers can be found.

Let us begin by showing that a specifed square in row 4 cannot be reached given an initial arrangement of 19 or fewer checkers. We will call an initial arrangement of checkers which allows the last remaining checker to be in a specified square "successful". Suppose, by way of contradiction, that a successful initial arrangement of 19 checkers can be found. Let x denote a real number (which will be determined momentarily) and label each square in the plane with the number x^n where n in the number of one-square steps (horizontal or vertical) in a shortest path from the specified square. Thus, the specified square is labeled $x^0 = 1$, and other squares are labeled as shown in Figure 1.

–	–	–	x^4	x^3	x^2	x^1	x^2	x^3	x^4	–	–	–
			x^3	x^2	x^1	x^0	x^1	x^2	x^3			
			x^4	x^3	x^2	x^1	x^2	x^3	x^4			
			x^5	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	x^5			
			x^6	x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	x^6			
			x^7	x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	x^7			
			x^8	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	x^8			
			x^9	x^8	x^7	x^6	x^7	x^8	x^9			
–	–	–	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^8	x^9	x^{10}	–	–	–
			–	x^{10}	x^9	x^8	x^9	x^{10}	–			
			–		x^{10}	x^9	x^{10}		–			
			–			x^{10}			–			

Figure 1.

We will now define the value of the game at any moment to be the sum of the labels of all occupied squares. Now a move toward the specified square will result a net change of $x^n - (x^{n+1} + x^{n+2}) = -x^n(x^2 + x - 1)$ in the value of the game. At this point let us choose x to be the positive real number satisfying $x^2 + x - 1 = 0$, i.e., $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Note that $0 < x < 1$. This choice of x forces a zero net change in game value due to one move toward the specified square. Also, other possible types of moves cause a decrease in game value; a move away from specified square accounts for a net change of $x^n - (x^{n-1} + x^{n-2}) = x^{n-2}(x^2 - x - 1) = x^{n-2}(1 - x - x - 1) = -2x^{n-1} < 0$ while a (horizontal) move from an x^n square to an x^n square yields $x^n - (x^{n-1} + x^n) = -x^{n-1} < 0$. It follows that no move increases the game value.

Since the final game value must be 1, no previous game value can be less than 1. Now the maximum initial game value attainable for any initial arrangement of 19 checkers is obtained by filling all x^4, x^5, x^6, x^7 squares as well as three of the x^8 squares below the line yielding a value of $x^4 + 3x^5 + 5x^6 + 7x^7 + 3x^8$ which reduces (using repeated application of $x^2 + x = 1$) to exactly 1. So we may conclude (1) that our successful arrangement of 19 checkers must occupy all the x^4, x^5, x^6, x^7 squares as well as three of the x^8 squares below the line; (2) no successful initial arrangement of 18 or fewer checkers exists; and (3) given our successful arrangement of 19 checkers, any move must be a jump toward the specified square (since any other type of jump would decrease the game value below 1). Thus, our successful initial arrangement, and all squares occupied during play, must be limited to those shown in Figure 2.

				34				
42	-21	21	0	21	-7	28	-35	63
26	-13	13	0	13	-4	17	-21	38
16	-8	8	0	8	-3	11	-14	25
10	-5	5	0	5	-1	6	-7	13
	-3	3	0	3	-2	5	-7	
		2	0	2	1	1		
			0	1	-3			
				1				

Figure 2.

Note that we have relabeled these squares with integers in such a way that, using these integers to compute the game value, a game value of 34 is always maintained. The initial successful arrangement covers the 16 squares forming the "inner triangle" below the line, and the labels of those 16 squares sum to 16. The arrangement also covers exactly 3 of the 9 squares forming the outer "V" border, and the labels of those 3 squares must sum $34 - 16 = 18$, which is clearly impossible. Therefore, no successful intial arrangement of 19 checkers can be found.

An example of a successful intial arrangement of 19 checkers is shown in Figure 3, where intial checkers are placed on the squares labeled E through X. It will allow the last remaining checker to fall in row 4 after the following 19 moves:

				A				
				B				
				C				
				D				
E	F	G	H	I	J	K		
	L	M	N	O	P	Q		
		R	S	T	U	V		
		W		X				

Figure 3.

1. O over I into D
2. G over H into I
3. I over D into C
4. E over F into G
5. S over N into H
6. L over M into N
7. W over R into M
8. M over N into O
9. G over H into L
10. O over I into D
11. D over C into B
12. X over T into O
13. K over J into I
14. O over I into D
15. U over P into J
16. V over Q into K
17. K over J into I
18. I over D into C
19. C over B into A

Comments: The solution presented is a slight variation on a proof by John Conway of a perhaps more intriguing result: There is no intial arrangement of checkers which will allow the last remaining checker to be in row 5. Conway's proof is chronicled in Ron Honseberger's *Mathematical Gems II* (Dolciani Mathematical Expositions No. 2, Mathematical Association of America, 1976). This version of checkers has also been discussed in a variety of places in the popular mathematical literature since 1976.

Aleš Vavpetič

FISHERGEOMETRIC

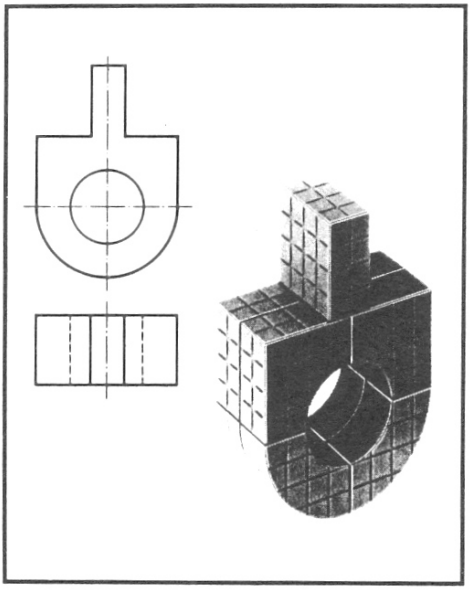
Fishergeometric je pri nas manj znana sestavljanka, če jo primerjamo s kompleti *Fishertehnik*.

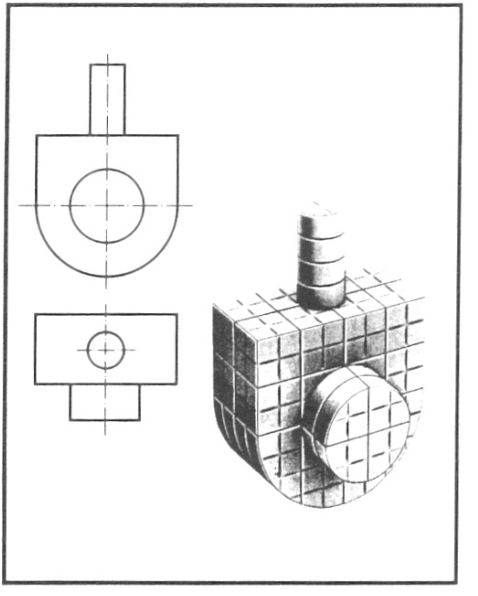
Sestoji iz štirih kompletov gradnikov. Prvi vsebuje kocke in kvadre. Z njimi sestavljamo pravokotna telesa. V drugem kompletu so prizme in piramide. Skupaj s prvim kompletom sestavljamo telesa s poševnimi stranskimi ploskvami.

Tretji komplet sestoji iz delov valjev, četrti pa iz delov stožcev. S kombiniranjem vseh kompletov lahko sestavimo precej zahtevna telesa.

Osnovni namen sestavljanke je razumevanje pravokotne projekcije kot se uporablja pri tehničnem risanju:

- Dano telo nariši v treh pravokotnih projekcijah.
- Dana je tehnična risba. Sestavi telo.





Čeprav je razumevanje tehničnega risanja osnovni namen tega učila, pa nam sestavljena telesa nudijo veliko možnosti za matematične naloge.

Poišči volumne in površine naslednjih teles:

